高等学校試用教材

解析几何与代数

下册

（代　数）

朱福祖
李汉佩　編

高等教育出版社

高等学校試用教材

解析几何与代数

下册

(代数)

朱福祖
李汉佩 編

高等教育出版社

本書是"解析几何与代数"的下册——代数部分。

本書是根据中华人民共和国教育部1955年編訂的师范学院物理系"解析几何与代数"試行教学大綱的代数部分編写的。可作为师范学院物理系的試用教材。

本書共分八章，内容有綫性代数初步，多項式和方程，排列、組合及概率。

解析几何与代数

下册

朱福祖　李汉佩編

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号13010·549　開本850×1168 1/32　印張10 6/16

字數272,000　印數1—9,000　定價(6)￥1.20

1959年2月第1版　1959年2月北京第1次印刷

序

本書是“解析几何与代数”的下册——代数部分。

本書是根据中华人民共和国教育部 1955 年頒布的师范学院物理系“解析几何与代数”試行教学大綱編写的。全書內容分为三个部分：(一)綫性代数初步，包括本書的第一章到第三章；(二)多項式和方程，包括本書的第四章到第六章；(三)排列、組合和概率，包括本書的第七章和第八章。这三个部分有它們相对的独立性，因此在講授教材时固可按照本書編排的顺序，也可以采取其他的顺序，例如先講授(二)(但必須先講 § 1)而后講(一)和(三)。

关于二阶和三阶行列式的性質以及含两个和三个未知量的綫性方程組的解法已經在“解析几何与代数”上册——解析几何部分中給出，所以認为这些內容是讀者已經熟悉的，在本書行列式論这一章中不再重复。

在編写过程中除了吸取苏联的高等代数等教材的优点外我們还参考了其他有关資料，力求結构清楚、論証緊严，并且考虑到我国学生的数学水平，尽量使他們易于接受。在每节之后都列有習題，力求配合各节內容，通过習題作业希望学生能巩固理論，熟練解題和計算技巧，并培养其独立思考的能力。

这本書在华东师范大学試教的过程中以及編写的过程中曾得到代数教研組同志們的关怀和帮助。还有东北人民大学王湘浩教授和本書审稿者提出的一些宝貴意見，使我們在最后修訂手稿时能获得更大的帮助。在这里对他們表示衷心的感謝。

最后，希望讀者予本書以批評和指正。

編　者

1958 年 5 月

目　录

第七章 排列与組合

第八章 概率

附 录

第一章　行列式論

在解析几何中讀者已学过关于两个未知量及关于三个未知量的綫性方程組解法。在本章及下一章中，我們將討論关于任意多个未知量的綫性方程組解法。为此，我們首先引入 n 阶行列式的概念并研究它的性質。行列式在数学的各个部門中有着广泛的应用。

在討論多項式与方程的問題中，常須明确多項式与方程的系数屬于怎样的数的系統，因此我們还要引入数环与数体的概念。

§1. 数环和数体

在中学代数內，我們曾經几次扩大数的范圍。現在我們对数的系統作一簡單的說明。所有的正整数(或称自然数)1, 2, 3, …的集合称为正整数系或自然数系。这是在算术中已熟悉的，在代数內，我們开始引入負整数，由此得出全部的正整数，負整数和零所构成的集合…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …，称为整数系。再引入分数我們就得出由正、負整数，零和正、負分数所构成的集合，称为有理数系。任何一个有理数都可以表示为下面的形状 $\frac{p}{q}$，其中 p, q 为整数且分母 $q>0$。除了有理数以外，还有无理数存在，它們不能用上面所說形状的分数来表出，例如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π 等都是无理数。全部有理数和无理数所构成的集合称为实数系。必須指出：并不是每一个无理数都是从有理数經由开方所得出的带有根号的数或是由有理数与有根号的数所能表出的。关于实数的理論讀者可参閱数学分析教程。

在中学代数內，最后把数系扩大到复数系。任何一个复数都

可以表示为下面的形状 $a+bi$, 其中 a,b 为实数,而 $i^2=-1$; 所有的复数的集合称为复数系。应当注意,实数系包含在复数系內,通常所謂数,一般均指复数。

上面所列举的五种数系:自然数系,整数系,有理数系,实数系和复数系,具有某些共同的性質,而另一方面它們也有不相同的性質。那末,我們应当根据什么准則来研究这些数系的特征呢?在代数学中,我們主要的是从四个有理运算(加、减、乘、除)的观点来研究数的性質。因此很自然的引入下面的概念。

定义 1. 已知某一数集 M 与一个有理运算"$\circ$",如果对 M 中任何二数(相同的或不相同的)施行运算"$\circ$"的結果所得的数仍屬于这数集,則称运算"$\circ$"在数集 M 中可施行或数集 M 关于这运算"$\circ$"是閉合的。

只是为了簡單起見,我們在定义 1 中用記号 $\circ$ 表示所討論的有理运算。

例 1. 在自然数系 1, 2, 3, … 中加法与乘法运算可以施行,因为任何两个自然数的和与积仍是自然数。但减法与除法运算在自然数系中不能施行,例如从自然数 3 减去 5 与以 3 去除 5 所得出的数都不是自然数。

例 2. 在整数系…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …中加法、减法与乘法运算可以施行,但除法运算(零为除数者除外)則不能施行。

例 3. 有理数系、实数系与复数系关于加、减、乘、除(零为除数者除外)四个运算都是閉合的;換句話說,这四个运算在所說的这三个数系中都是可以施行的。

定义 2. 設已予一个数集 Ω, 如果在 Ω 中加法、减法及乘法三个运算可以施行,則称数集 Ω 为一个数环。

定义 3. 設已予一个数集 Ω, 如果在 Ω 中加法、减法、乘法及除法(除数不等于零)四个运算都可以施行,並且 Ω 中至少含有一

个不等于零的数，则称数集 Ω 为一个数体。

从这两个定义我們知道：一个数体是滿足这样性質的一个数环，即在这数环內除法运算可以施行(除数不等于零)。

对于数环与数体的概念，可以更詳細的說明，它們的特征如下：在数环与数体中能施行加法与乘法，并且这两种运算具有下列性質：

1° 加法交换律：$a+b=b+a$。

2° 加法結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$。

3° 乘法交换律：$ab=ba$。

4° 乘法結合律：$(ab)c=a(bc)$。

5° 分配律：$(a+b)c=ac+bc$。

其中 a, b, c 表示所說的数环或数体中任意三个数。这些运算的基本定律可以推广到任意多个数的情形去。

在数环与数体中，对于任意两个数 a 与 b，方程

$$a+x=b$$

可解(减法可施行)。在数体中，对于任意的数 $a\neq0$ 与任意的数 b，方程

$$ax=b$$

可解(除法可施行)。

在代数学中，除了数环与数体外，还研討与它們有类似性質的集合，称为环与体，它們的元素不一定是数。比較常用到的是数体，在§19中我們給出一个与数环有类似性質的集合——任意数体上一个未定元的多項式环。

我們列举一些例子来說明什么样的数集是数环或数体。

1. 自然数系 1, 2, 3, …不是数环，因为减法在这数集中不能施行(参考定义 1 后的例 1)。

2. 整数系…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …是一个数环，称为整

数环；但不是数体(参考定义 1 后的例 2)。

3. 所有偶数的集合 $\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots$ 构成一个数环，但不成一个数体．更一般的說，能被一个整数 m 所除尽的整数集合 $\cdots, 2m, -m, 0, m, 2m, \cdots$ 构成一个数环，这是因为任何两个 m 的倍数之和、差与积仍是 m 的倍数：

$$k_1m+k_2m=(k_1+k_2)m,$$
$$k_1m-k_2m=(k_1-k_2)m,$$
$$k_1m\cdot k_2m=(k_1k_2m)m;$$

但这集合不成数体，因两个 m 的倍数之商不一定仍是 m 的倍数。

4. 所有奇数的集合 $\cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots$ 不是数环，因为两个奇数之和是一个偶数。

5. 有理数系、实数系与复数系都是数体(参考定义 1 后的例 3)这是我們常常碰到的三个最重要的数体，以后簡称它們为有理数体，实数体与复数体。我們着重的指出：这三个数体依次各含于它后面的一个之內，换句話說，实数体中的每一个数都屬于复数体，而有理数体中的每一个数都屬于实数体，因此又屬于复数体。

除了这三个重要数体之外，还存在着无限多的其他数体。

6. 考察所有具有下列形状的数所成的数集 Ω：$a+b\sqrt{2}$，其中 a, b 为任意的有理数，这数集中含有全部的有理数(取 $b=0$)及 $\sqrt{2}$(取 $a=0, b=1$)。

設 $\alpha=a+b\sqrt{2}, \beta=c+d\sqrt{2}$ 为数集 Ω 中任何二数，则

$$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)\sqrt{2},$$
$$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)\sqrt{2},$$
$$\alpha\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

在各等式右边的括弧內的数都是有理数，因此 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ 与 $\alpha\beta$ 这三个数都屬于数集 Ω．再考察这两个数的商 α/β(在除数 $\beta\neq0$ 的情形下)。由于 $c+d\sqrt{2}\neq0$, 数 $c-d\sqrt{2}\neq0$, 因此

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2},$$

等式右边的数 $\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ 与 $\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}$ 都是有理数，所以商 α/β 仍屬于数集 Ω。

根據定义 3. 数集 Ω 是一个数体。

显然在例 6 中我們可換 $\sqrt{2}$ 为任何一个質数的平方根，如 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$ 等等，也可得出数体，并且这些数体互不相同，因此不同的数体有无限多个存在。

注意：如果把例 6 中的数集 Ω 改为是由下列形状的数 $a+$ $+b\sqrt{2}$ 所成的集合，但系数 a, b 限于任意的整数，那末类似于上面的証明，我們知道数集 Ω 构成一个数环而不能成一个数体。

上面所列举的数体例子中沒有一个不包含有理数体，这一事实不是偶然的，我們有下面的一般結論：

定理　任何数体均包含有理数体。

証明　設 Ω 为一个数体，而 a 为 Ω 中任意一个不为零的数，則 Ω 含有数 a 除它自己的商：$\frac{a}{a}=1$。以 1 与它自己重复相加：

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}}=n$$

可得出全部的正整数，它們都含在 Ω 中。另一方面，数体 Ω 含有差 $a-a$，即数零，所以数体 Ω 含有零减去任一自然数的差：$0-n$，即 Ω 含有全部的負整数。最后，数体 Ω 含有任意两个整数的商（分母不是零），即含有全部的有理数，本定理証明完畢。

在本章及以下的几章中，我們都是在一般的数体上进行論証。

習　題

1. 判定下列各数集是否构成数环和数体:

i) 所有具有形式 $a+bi$ 的数，其中 a, b 为整数，$i^2=-1$;

ii) 所有具有形式 $a+b\sqrt{5}$ 的数，其中 a, b 为有理数;

iii) 所有具有形式 $a+b\sqrt[3]{2}$ 的数，其中 a, b 为有理数;

iv) 所有真分数。

2. 已知数集 Ω 是由所有具有形式 $\alpha+\beta i$ 的数所构成，其中 α, β 为某一数体 Ω_1 中的数，i 代表虚数單位($i^2=-1$)。問此数集 Ω 是否构成一数体?

又若 Ω 是由所有具有如上形式的数所构成，但其中 α, β 为某一数环 Ω_2 中的数，i 代表虚数單位($i^2=-1$)。問此时 Ω 还能构成一数体嗎?

3. 已知 Ω_1, Ω_2 是两个数体，証明: 所有既属于 Ω_1 又属于 Ω_2 的数所成的数集 Ω 也是一个数体。

§2. n 阶行列式的定义

在解析几何中讀者已熟諳二阶的与三阶的行列式，它們的引入是由于解两个与三个未知量的綫性方程組。現在我們来研究 n 阶行列式，它在解含有任意多个未知量的綫性方程組时将被利用。

对于 n 阶行列式的定义与它的研究我們必須引入关于有限集合的某些概念及其性質，設已知由 n 个元素所构成的一个有限集合 M，并用前 n 个自然数 $1, 2, \cdots, n$ 来記这些元素的序数，因为我們对于集合 M 中各别元素的性質并无兴趣，故可以把自然数 $1, 2, \cdots, n$ 取为集合 M 的元素。

除了数 $1, 2, \cdots, n$ 的自然次序外，还有其他各种各样的次序。例如数 $1, 2, 3$ 可以排列成 $2, 3, 1$ 或 $3, 1, 2$ 等等次序。把数 $1, 2, \cdots, n$ 按照一定的次序排列起来，我們称它为由这 n 个元素(或 n 个記数)所成的**排列**。首先我們来証明:

由 n 个元素所成的不同排列恰有 $1\cdot2\cdots n$ 个。

乘积 $1\cdot2\cdots n$ 常用簡写記号 $n!$(讀为 n 的阶乘)代表，事实上，

n 个記数的排列的一般形状是 $i_1, i_2, \cdots, i_n$, 其中每一个 i_s 是数 1, 2, …, n 里面的某一个数而且沒有两个 i_s 是相同的，我們可以取数 1, 2, …, n 中的任何一个作为 i_1, 这就是說 i_1 有 n 个不同的选法。但当 i_1 已經取定，那末可以取其余的 $n-1$ 个数中的任何一个作为 i_2, 所以元素 i_1 与 i_2 的不同选法共有 $n(n-1)$ 个，依此类推我們就証明了上述的論断。

例如由三个元素 1, 2, 3 可以作成 $3!=6$ 个排列：123, 132, 213, 231, 312 和 321。(当元素的个数 $n\leqslant 9$ 时我們不用分点去分开排列中的元素)。在这六个排列中，第一个排列 123 里面的数是按照自然次序排列的，但是其他的排列就不是这样，例如在排列 132 中，数 3 排列在数 2 的前面。一般，按照遞升的次序排列起来的排列

$$1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

称为**基本排列**。如果一个排列中的两个元素的相互次序与它們在基本排列(1)中的相互次序相反，就是說大的在小的前面，我們說該排列在这两个元素之間有一个**反序**。例如排列 132 就含有一个反序，而排列 312 則含有两个反序：即 3 在 1 前和 3 在 2 前各有一个反序。其余的可依此类推。

我們可以按照下述方法計算由 n 个元素所成排列的反序数。首先計算有多少个元素排列在 1 的前面，其次，把 1 划去，再計算有多少个元素排列在 2 的前面(已被划去的数 1 不再計算)，把 2 划去后，再計算有多少个元素排列在 3 的前面(已被划去的数 1 与 2 不再計算)，其余依此类推下去。如果在 1 的前面有 m_1 个元素，在 2 的前面有 m_2 个元素，等等，最后在 n 的前面有 m_n 个元素，那末，这个排列的反序数等于 $m_1+m_2+\cdots+m_n$。

例 計算排列 461352 的反序数。

1 前面有两个元素(4 与 6)，划去 1：461352

2 前面有四个元素(4, 6, 3 与 5)划去 2: 461352

3 前面有两个元素(4 与 6), 划去 3: 461352

4 前面沒有任何元素, 划去 4: 461352

5 前面有一个元素(6), 划去 5: 461352

6 前面沒有任何元素, 划去 6: 461352

由此就知道所求的反序数为: $2+4+2+0+1+0=9$。

上面所說的排列与反序的概念可以利用来研究二阶的与三阶的行列式的构造, 我們要由此找出这些行列式的构造規律, 再推广这些規律去定义 n 阶行列式。

首先采用所謂二重下标的記号来代表行列式的元素: 即行列式的每一个元素都用 a_{ij} 代表, 它的第一个下标 i 表示它所在的行的序数而第二个下标 j 表示它所在的列的序数。利用了这新的記号我們就可以把二阶的与三阶的行列式分别写为下列形状:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{3}$$

我們看到, 二阶行列式是由两項构成的, 其中每一項是两个元素的乘积, 每一个乘积含有行列式的每一行和每一列的唯一个元素, 并且含有行列式中每一行和每一列唯一个元素的两个元素的乘积只有这两个。事实上, 这些乘积具有下面的形状:

$$a_{1i}\, a_{2j}, \tag{4}$$

其中第一个下标构成基本排列 12, 而第二个下标則构成两个記数的各种可能的排列, 即 12 与 21。由此, 我們就得出二阶行列式(2)的两項。但是, 乘积(4)在(2)式中出現时, 有一个带有加号而另一个带有减号。为了說明选取符号所依据的法則我們注意: 带

有加号出現的乘积 (4) 的第二个下标构成排列 12, 它的反序数为零，而带有减号出現的乘积(4)的第二个下标构成排列 21, 它的反序数为 1; 換句話說，乘积(4)的前面带有加号或减号由它的第二个下标所构成的排列有偶数个或奇数个反序而定。

再詳細地来研究一下三阶行列式(3)的构造。我們看到，它是由六項构成的，其中每一项是三个元素的乘积，每一个乘积含有每一行和每一列的唯一个元素，并且含有每一行和每一列的唯一个元素的三个元素的乘积只有这六个。事实上，这些乘积具有下面的形状:

$$a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \tag{5}$$

其中第一个下标构成基本排列 123, 而第二个下标則构成三个記数的各种可能的排列，即:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321, \tag{6}$$

但是我們看到: 乘积(5)在(3)式中出現时有一些前面带有加号，而另一些則带有减号。因此我們还需要說明选擇符号的規律。事实上，前面带有加号出現的那些乘积(5)的第二个下标构成下面三个排列:

$$123,\ 231,\ 312; \tag{6_1}$$

而前面带有减号出現的那些乘积的第二个下标构成下面的三个排列:

$$132,\ 213,\ 321, \tag{6_2}$$

我們先計算(6_1)中各排列的反序数: 根据前面所說的方法这三个排列依次有反序数 0, 2, 2; 換句話說，(6_1)中每个排列都含有偶数个反序。用同样的方法可以計算出来，(6_2)中的每个排列都含有奇数个反序。現在我們可以把三阶行列式 (3) 中的符号規則总結如下: 把三阶行列式(3)的每一項都写为乘积(5)的形状，即它的第一个下标构成基本排列，如果它的第二个下标所构成的排列的反

序数是偶数，则这一項前面带有加号；如果它的第二个下标所成排列的反序数是奇数，则这一項前面带有减号。

現在不难把二阶与三阶行列式的构造規律推广到任意阶行列式的情形。

把数体 P 中給定的 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 排列成一个 n 行 n 列的正方形陣列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

我們称它为 n 阶方陣。数 a_{ij} 称为这方陣的元素，它的第一个与第二个下标分别表示元素 a_{ij} 所在的行与列的序数。

由方陣(7)作成所有可能的这样的 n 个元素的乘积，使得任一乘积恰好含有每一行和每一列的一个元素，这些乘积都具有下面的形状：

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}. \tag{8}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列。为了要得到所有可能的形状(8)的乘积，我們需要取第二个下标的所有可能的排列，这样排列的总数是 $n!$

注意乘积(8)的第一个下标构成基本排列，如果它的第二个下标所成排列含有偶数个反序，这乘积前面带以加号"+"，如果它的第二个下标所成排列含有奇数个反序，則这乘积前面带以减号"−"；这样得到的所有 $n!$ 个形状(8)的乘积的代数和就称为对应于方陣(7)的 n 阶行列式。

定义 对应于方陣(7)的 n 阶行列式是指次之形式的 $n!$ 項的代数和：这些項是一切可能的在(7)的每一行上取一个且只取一个元素，同时也是在(7)的每一列上取一个且只取一个元素的乘积；

把乘积中因子按第一下标的自然顺序排列后，如果第二下标所成排列的反序数是偶数，则在此項前带以加号"＋"，如果第二下标所成排列的反序数是奇数，则在此項前带以减号"－"。

以后我們将称形状(8)的乘积为行列式D的項。方陣(7)的元素称为行列式D的元素。

对应于方陣(7)的n阶行列式D常用下列記号之一来代表：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|a_{ij}|_n. \qquad (9)$$

n阶行列式当$n=2$和$n=3$时即化为我們以前所說的二阶和三阶行列式，特别当$n=1$时，也就是对应于只含一个元素的方陣的行列式，它等于这一元素。現在我們就$n>3$的情形举两个例子。

例 1. 試应用行列式的定义計算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义，D是一个含有$4!=24$項的代数和。因为元素$a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{24}, a_{31}, a_{34}, a_{42}, a_{43}$均等于0，所以$D$中不为零的項最多只有下面四个：

$$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41},\ a_{14}a_{23}a_{32}a_{41},\ a_{11}a_{22}a_{33}a_{44},\ a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}.$$

每一項的第一个下标有自然数的次序，第二个下标依次构成下面四个排列：

$$4231, 4321, 1234, 1324,$$

它們的反序数依次是5, 6, 0, 1。所以第一項和第四項应带以减号，