有限元混合法理论基础及其应用

——发展与应用

N-S

罗振东 著

NAVIER-STOKES

有限元混合法理论基础及其应用
——发展与应用
罗振东　著
*
山东教育出版社出版发行
（济南经九路胜利大街）
山东电子工业印刷厂印刷
*
850×1168毫米 32开本 13.75印张 4插页 322千字
1996年8月第1版 1996年8月第1次印刷
印数 1—1000
ISBN7—5328—2259—1/G・2099

定价 16.90元

教师出版基金书稿评审委员会

内 容 提 要

全书共十章。一至四章介绍一般的有限元法的基本理论，主要包括椭圆型问题的广义解、有限元和函数插值、椭圆型问题的有限元法和抛物型问题的有限元分析等内容，提供了有限元法的理论基础和预备知识，是本书的基础部分。五至十章介绍混合有限元法的理论和应用，主要包括混合问题的广义解和混合有限元解的存在及误差分析、双调和方程的混合元法、二阶椭圆型问题的混合元法、弹性力学问题的混合有限元法、Stokes问题的混合有限元法及抛物型问题的混合有限元法等内容，是本书的重点内容。书中通过大量的混合元法格式说明混合有限元法的应用，使理论和应用更加紧密地结合起来。

本书深入浅出、内容新颖、精炼，可作理工科院校应用数学、计算数学或相关专业的研究生、本科生教材，亦可作为广大科技工作者学习有限元法的参考书。

序　　言

有限元法是求解偏微分方程数值解的一种重要方法。最早用有限元法处理偏微分方程近似解始于40年代的Courant等人。到了50年代中期，随着电子计算机的迅速发展，有限元法取得了巨大的进展。国内最早研究有限元法的是冯康先生，他的成果当时处于世界先进行列（见〔1〕）。到了60年代初，有限元法开始广泛应用于船舶、一般机械、巨型建筑和水利设施（如大坝、桥梁）的设计。近年来，又被用于解决流体力学、电磁场等非应力分析问题，并取得了很好的成果。70年代初，Babuška（见〔2〕）和Brezzi（见〔3〕）创立了混合有限元的一般理论。其主要结果是所谓的B.——B.条件（第五章定义5.2）。为了使混合有限元法能解决更多、更广泛的问题，得到更高的计算精确度，80年代初，Falk和Osborn提出了一种稍微改进的方法（见〔4〕），扩大了混合有限元法的适用范围，使混合有限元法得到更进一步的发展。但是，作为有限元法的一个前沿分支，它的理论仍有待于进一步的发展和完善，它的应用更有待于进一步的推广。

我们之所以讨论混合有限元法，因为混合有限元法较标准有限元法有以下优点：1. 混合有限元法的解空间（即有限元或有限维空间）的光滑度要求较普通有限元（也称为标准有限元）的解空间的光滑度低，从而较易构造出混合有限元空间，并提高计算的精确度。2. 混合有限元法可使解本身（位移）和梯度（应力或应变）在各自不同的有限元空间中按其有限元空间

的精度得到逼近，克服了一般有限元法中先求位移（解本身），再由位移求应变、应力（梯度）的方法，从而减少了计算过程中的许多工作量和计算所造成的误差。3. 混合有限元法对处理高阶方程（特别是四阶双调和方程）和含有两个未知函数的方程（如 Stokes 方程）更便利，且易于数字处理。4. 混合有限元解有很好的物理意义和物理性能。

本书分为两大部分：第一部分是一般有限元法的理论基础，本部分一方面可作为《有限元方法及其理论基础》（〔5〕姜礼尚、庞之垣著）一书的补充提高，另一方面也为学习后续内容提供了必需的基础理论。第二部分比较系统地介绍了混合有限元法的基本理论及其应用格式，概括了近年来混合有限元法的一些研究成果。其中大部分的结果是作者本人的研究成果。

由于混合有限元法的理论和应用仍在发展之中，本书不可能包含全部的内容。本书旨在将混合有限元法的基本理论和基本方法介绍给读者。衷心希望本书能成为读者在混合有限元的学习和研究中的一个向导。

在本书的编写和修改过程中，得到石钟慈教授、刘儒勋教授、李开泰教授、庞之垣教授等专家的大力支持和帮助，他们对该书的初稿和第一次修改稿提出了许多宝贵的修改意见，使该书经多次修改和补充后在理论上和应用上更加完备，推导论证过程更加详细，更便于自学者阅读。在此特感谢所有关心和支持本书的专家和有关人士。

本书的错漏之处，恳请读者指正。

作　　者

1993 年 10 月初稿于贵阳

1994 年 5 月第一次修改于贵阳

1995 年 8 月再次修改于中国科大

目　录

第一篇　有限元法的理论基础

第一章　椭圆型问题的广义解

所谓广义解，就是指变分方程的解. 本章主要讨论椭圆型偏微分方程的广义解的存在性，并给出广义解的正则性. 为此，我们先简略地介绍 Sobolev 空间的一些常用的符号及有关的结论，具体证明从略.

§1.1　Sobolev 空间及预备知识

设 $e\subset R^n(n=1,2,3)$ 是有界开集，$\mathscr{D}(e)$ 是 e 上无穷多次可微且紧支集在 e 内部的函数构成的线性空间，$\mathscr{D}'(e)$ 是 $\mathscr{D}(e)$ 的对偶空间(亦称为分布空间)，$(\cdot,\cdot)_e$ 表示它们的对偶内积. 下面用到的 N 表示自然数的集合.

定义 1.1　设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in N^n$，$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，若 $\forall\, u\in\mathscr{D}'(e)$，都有

$$(\partial^\alpha u,\varphi)_e=(-1)^{|\alpha|}(u,\partial^\alpha\varphi)_e,\ \forall\,\varphi\in\mathscr{D}(e),\tag{1.1}$$

则称 $\partial^\alpha u\in\mathscr{D}'(e)$ 是 u 的 $|\alpha|$ 阶广义导数.

注：当 $u\in C^{|\alpha|}(\bar{e})$($C^m(\bar{e})$ 表示 m 次连续可微的函数空间)时，$\partial^{|\alpha|}u=\partial^{|\alpha|}u/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$ 为微分学中的通常的导数.

定义 1.2　设 $m\in N$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$p\in R$(实数集)，则

Sobolev 空间定义为

$$W^{m,p}(e)=\{v\in L^p(e)\,|\,\partial^\alpha v\in L^p(e),|\alpha|\leqslant m\}.\tag{1.2}$$

其范数为

$$\text{当 } p<\infty \text{ 时}, \|v\|_{m,p,e}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_e|\partial^\alpha v|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}.\tag{1.3}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

$$\text{当 } p=\infty \text{ 时}, \|v\|_{m,\infty,e}=\sup_{|\alpha|\leqslant m}\{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in e}|\partial^\alpha v|\}.\tag{1.4}$$

其中 ess sup 表示本性上确界.

其半范为

$$\text{当 } p<\infty \text{ 时}, |v|_{m,p,e}=\Big(\sum_{|\alpha|=m}\int_e|\partial^\alpha v|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}};\tag{1.5}$$

$$\text{当 } p=\infty \text{ 时}, |v|_{m,\infty,e}=\sup_{|\alpha|=m}\{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in e}|\partial^\alpha v|\}.\tag{1.6}$$

注：当 $p=2$ 时，记 $H^m(e)=W^{m,2}(e)$ 且其范数和半范〔注〕的下角标的 p 均略.[1]

用 $H_0^m(e)$ 表示 $\mathscr{D}(e)$ 在 $\|\cdot\|_{m,e}$ 下的闭包而且记

$[H_0^m(e)]'=H^{-m}(e)$.

其范数为

$$\|v\|_{-m,e}=\sup\{|(v,u)_e|/\|u\|_{m,e};0\neq u\in H_0^m(e)\},$$

$\forall\, v\in H^{-m}(e)$. (1.7)

积空间的范数和半范仍用上述的记号. 如当 $\tau=(\tau_{ij})_{s\times n}\in H^m(e)^{s\times n}(s=1$ 或 $n)$ 时，记

$$\|\tau\|_{m,e}=\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\|\tau_{ij}\|_{m,e}^2\Big)^{\frac{1}{2}};\tag{1.8}$$

$$|\tau|_{m,e}=\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}|\tau_{ij}|_{m,e}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\tag{1.9}$$

积空间上相应的 L^2 内积仍记为 $(\cdot,\cdot)_e$，但 $\forall\,\tau=(\tau_{ij})_{s\times n}$,

---

〔1〕〔注〕：范数和半范也称为模和半模.

$\sigma = (\sigma_{ij})_{s\times n} \in W^{m,p}(e)^{s\times n}$,记

$$(\tau,\sigma)_e = \int_e \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\sigma_{ij}\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

其中 $p \geqslant 2$.

注:当 $e = \Omega$ 时,上述的范数、半范和内积的下角标 e 在不至于混淆的情况下将省略.

限于篇幅的限制,下面的定理和公式的证明均略.读者可参考有关文献([6]、[7]、[8]、[9]).

嵌入定理 $W^{m,p}(e) \hookrightarrow C^l(\bar{e})$,当 $\frac{n}{p} < m - l$ 时;$W^{m,p}(e) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{m',p}$,当 $m > m'$ 时.

其中 $\hookrightarrow$ 表示嵌入,$\hookrightarrow\hookrightarrow$ 表示紧嵌入,$l \geqslant 0$.

Riesz **表现定理** 若 H 是 Hilbert 空间,$f \in H'$,则存在唯一的 $x \in H$,使得

$$f(y) = (x,y)_H, \forall y \in H. \tag{1.11}$$

且 $\|f\|_{H'} = \|x\|_H$.

其中 $(\cdot,\cdot)_H$ 表示 H 中的内积或泛函.

Hahn-Banach **定理** 设 H 是线性赋范空间,$G \subset H$ 为子空间,则 $\forall f \in G'$,存在 $F \in H'$,使得

(i)$F(x) = f(x)$,当 $x \in G$ 时,

(ii)$\|f\|_G = \|F\|_{H'}$. (1.12)

直交分解定理 设 M 是 Hilbert 空间 H 的一闭子空间,则 $\forall x \in H$,存在唯一的 $x_0 \in M$,使得 $x - x_0 \in M^{\perp}$,即

$$x = x_0 + z, z \in M^{\perp}. \tag{1.13}$$

其中 $M^{\perp}$ 是 M 的正交空间.

有界算子逆存在定理 线性算子 T 具有有界逆算子的充分必要条件是 T 下有界,即存在 $\beta > 0$,使得

$$\|Tx\| \geqslant \beta\|x\|, \forall x \in D(T). \tag{1.14}$$

其中$D(T)$为T的定义域，不等式左、右两边的范数分别是T的值域和定义域上相关的空间的范数.

迹定理 在$C^m(\overline{\Omega})$上定义一个线性算子γ，使得：

$$\gamma: \gamma(u) = u|_{\partial\Omega}. \tag{1.15}$$

若记

$$\| \gamma u \|_{m-1,\partial\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} |\partial^\alpha u|^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.16}$$

则存在仅依赖于Ω的常数$C > 0$，使得

$$\| \gamma u \|_{m-1,\partial\Omega} \leqslant C \| u \|_{m,\Omega}. \tag{1.17}$$

附注： 因为$C^m(\overline{\Omega})$在$H^m(\Omega)$中稠密，则$\forall u \in H^m(\Omega)$，存在$u_k \in C^m(\overline{\Omega})$使得$\| u - u_k \|_{m,\Omega} \to 0$，且$\{u_k\} \subset H^m(\Omega)$是基本列(即柯西序列)，从而有$\| u_k - u_l \|_{m,\Omega} \to 0$($k,l \to \infty$时). 由(1.17)得$\| \gamma(u_k - u_l) \|_{m-1,\partial\Omega} \to 0$($k,l \to \infty$时). 从而有

$$\| \partial^\alpha u_k - \partial^\alpha u_l \|_{0,\partial\Omega} \to 0, |\alpha| \leqslant m-1 (k,l \to 0).$$

又因为$L^2(\partial\Omega)$是完备空间，则存在$\varphi_\alpha \in L^2(\partial\Omega)$，使得当$k \to \infty$时，$\| \partial^\alpha u_k - \varphi_\alpha \|_{0,\partial\Omega} \to 0$. 若$u \in C^m(\overline{\Omega})$，则$\varphi_\alpha = \partial^\alpha u|_{\partial\Omega}$，$|\alpha| \leqslant m-1$. 当$u \in H^m(\Omega)$时，必须引入广义边值.

定义 1.3 设$u \in H^m(\Omega)$，则称$\varphi_\alpha = \partial^\alpha u|_{\partial\Omega}$为$\partial^\alpha u$的广义边值，记为$\gamma_\alpha u = \partial^\alpha u|_{\partial\Omega}$. 算子$\gamma_\alpha$称为迹算子($|\alpha| \leqslant m-1$).

注：利用迹算子，我们可将空间$H_0^m(\Omega)$表示为

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) | \gamma_\alpha u = 0, |\alpha| \leqslant m-1\}. \tag{1.18}$$

Riesz-Thorin 定理 **设(R_1, rR, μ)和(R_2, rR, η)是两个测度空间，S是R_1上的复值简单函数全体，T是S到R_2上的复值函数空间的映射且满足**

$$\| Tf \|_{0,1/\beta_1} \leqslant M_1 \| f \|_{0,1/\alpha_1}, \forall f \in S; \tag{1.19}$$

$$\| Tf \|_{0,1/\beta_2} \leqslant M_2 \| f \|_{0,1/\alpha_2}, \forall f \in S. \tag{1.20}$$

其中$0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leqslant 1$. M_1, M_2为常数，令$\alpha = (1-t)\alpha_1 +$

$t\alpha_2, \beta = (1-t)\beta_1 + t\beta_2, 0 < t < 1$,则有

$$\| Tf \|_{0,1/\beta} \leqslant M_1^{1-t} M_2^t \| f \|_{0,1/\alpha}, \forall f \in S. \tag{1.21}$$

而且当 $\alpha > 0$ 时,T 可唯一地延拓到整个空间 $L^{1/\alpha}(\mu)$ 上使得(1.21)成立.

Hölder 不等式 $\forall u \in L^p(e)$ 和 $\forall v \in L^q(e)$ 都有

$$\int_e |uv| \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_e |u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \cdot \left(\int_e |v|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}. \tag{1.22}$$

其中 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

带 ε 的 Cauchy(柯西)不等式 $\forall \varepsilon > 0$ 及 $\forall a、b \geqslant 0$ 都有

$$ab \leqslant \frac{1}{2}\left(\varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2\right). \tag{1.23}$$

Green 公式

(1) 当 $u \in H^2(e), v \in H^1(e)$ 时,有

$$\int_e v \triangle u \mathrm{d}x = -\int_e \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\partial e} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}s. \tag{1.24}$$

其中 $\vec{n}$ 为 ∂e 上的单位外法向量,∇u 为 u 的梯度,$\triangle = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$.

(2) 当 $u \in H^4(e), v \in H^2(e)$ 时,有

$$\int_e \triangle^2 u \cdot v \mathrm{d}x = \int_e \triangle u \triangle v \mathrm{d}x + \int_{\partial e} v \frac{\partial \triangle u}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}s - \int_{\partial e} \triangle u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}s. \tag{1.25}$$

其中 $\triangle^2 = (\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2)^2$.

§1.2 椭圆型问题的广义解

先看几个具体的实例

一、Poisson 方程的广义解

Poisson 方程为

$$-\triangle u=f,\text{在 }\Omega\text{ 中}. \tag{2.1}$$

其中 $\Omega\subset R^n(n=2$ 或 $3)$ 是有界区域.

用 $v\in H^1(\Omega)$ 乘(2.1) 的两边且在 Ω 上两边积分，再由 Green 公式(1.24) 得

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s=\int_\Omega fv\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

其中(2.2) 中的 $\vec{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量.

1. 第一边值问题的广义解

Poisson 方程的第一边值问题为

$$\begin{cases}-\triangle u=f,\text{在 }\Omega\text{ 中},\\ u=u_0,\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}.\end{cases} \tag{2.3}$$

其中 f 是已知函数，u_0 也是已知函数.

将 u_0 延拓为 $H^1(\Omega)$ 中的函数且仍记为 u_0. 当 $v\in H_0^1(\Omega)$ 时，(2.2) 左边第二项为零. 从而由(2.2) 我们可归结出下一概念.

定义 1.4 称 $u\in H^1(\Omega)$ 是 Poisson 方程的第一边值问题(2.3) 的广义解，如果 $u-u_0\in H_0^1(\Omega)$，且 u 满足

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\forall\ v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

注：可以证明，当(2.4) 的解 u 适当光滑时，也是古典问题(2.3) 的解.

2. 第三边值问题的广义解

Poisson 方程的第三边值问题为

$$\begin{cases}-\triangle u=f,\text{在 }\Omega\text{ 内},\\ \dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}+bu=g,\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}.\end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $b\geqslant 0$，且 $b\neq 0$，f，g 均是已知函数.

将 $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}=-bu+g$ 代入(2.2)，移项整理得

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} buv\mathrm{d}s = \int_\Omega fv\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} gv\mathrm{d}s,$$
$$\forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{2.6}$$

定义 1.5　称 $u \in H^1(\Omega)$ 是 Poisson 方程第三边值问题的广义解，如果 u 满足(2.6).

注：当(2.6)的广义解适当光滑时，也是古典问题(2.5)的解.

3. 第二边值问题的广义解

Poisson 方程第二边值问题就是第三边值问题当 $b \equiv 0$ 时的情形，即

$$\begin{cases} -\triangle u = f, \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \partial u/\partial \vec{n} = g, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{2.7}$$

定义 1.6　称 $u \in H^1(\Omega)$ 是 Poisson 方程的第二边值问题(2.7)的广义解，如果 u 满足

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} gv\mathrm{d}s, \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{2.8}$$

注：(1) 当(2.8)的广义解适当光滑时也是古典问题(2.7)的解.(2) 并非任意 Poisson 方程的第二边值问题都有广义解，即 Poisson 方程的第二边值问题须在一定的条件限制下才有广义解，后面(见 §1.5)将给出(2.8)的广义解存在的条件.

二、双调和方程的广义解

设 Ω 是二维或三维空间中的有界区域，双调和的四阶方程为

$$\begin{cases} \triangle^2 u = f, \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = \partial u/\partial \vec{n} = 0, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{2.9}$$

其中 f 是已知函数，$\triangle^2 = (\sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2)^2$，$\vec{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量.