

有限元混合法理论 基础及其应用

——发展与应用



罗振东
著

NAVIER-STOKES



有限元混合法理论基础及其应用

——发展与应用

罗振东 著

*

山东教育出版社出版发行

(济南经九路胜利大街)

山东电子工业印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开本 13.75 印张 4 插页 322 千字

1996 年 8 月第 1 版 1996 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—1000

ISBN7—5328—2259—1/G·2099

定价 16.90 元

教师出版基金理事会

顾 问	吴阶平			
名誉理事长	赵志浩	宋木文	柳 斌	董凤基
	吴爱英	崔惟琳	高明光	杨牧之
	宋桂植	石洪印	宋镇铃	
理 事 长	高挺先	钱海骅		
副 理 事 长	孙友海	张立升	单兆众	
	王洪信	(常务副理事长)		
秘 书 长	王洪信	(兼)		
副 秘 书 长	隋千存			
理 事	(以姓氏笔画为序)			
	马 钊	马 啸	王卓明	王洪信
	孙友海	孙永大	李华文	张立升
	张华纲	陈 育	单兆众	钱海骅
	高挺先	隋千存	谢荣岱	

教师出版基金书稿评审委员会

(以姓氏笔画为序)

顾 委 员	问	任继愈	刘国正	季羨林	周祖谟
		潘承洞			
	员	于漪	王洪信	邓从豪	朱 铭
		朱德发	刘祚昌	李润泉	杨殿奎
		张恭庆	陈玉波	侯明君	袁行霈
		顾明远	顾振彪	高更生	梅良模
		崔 峦	隋千存	彭聃龄	谢荣岱
		裘锡圭	翟中和		

内 容 提 要

全书共十章。一至四章介绍一般的有限元法的基本理论,主要包括椭圆型问题的广义解、有限元和函数插值、椭圆型问题的有限元法和抛物型问题的有限元分析等内容,提供了有限元法的理论基础和预备知识,是本书的基础部分。五至十章介绍混合有限元法的理论和应用,主要包括混合问题的广义解和混合有限元解的存在及误差分析、双调和方程的混合元法、二阶椭圆型问题的混合元法、弹性力学问题的混合有限元法、Stokes问题的混合有限元法及抛物型问题的混合有限元法等内容,是本书的重点内容。书中通过大量的混合元法格式说明混合有限元法的应用,使理论和应用更加紧密地结合起来。

本书深入浅出、内容新颖、精炼,可作理工院校应用数学、计算数学或相关专业的研究生、本科生教材,亦可作为广大科技工作者学习有限元法的参考书。

序 言

有限元法是求解偏微分方程数值解的一种重要方法。最早用有限元法处理偏微分方程近似解始于40年代的Courant等人。到了50年代中期,随着电子计算机的迅速发展,有限元法取得了巨大的进展。国内最早研究有限元法的是冯康先生,他的成果当时处于世界先进行列(见[1])。到了60年代初,有限元法开始广泛应用于船舶、一般机械、巨型建筑和水利设施(如大坝、桥梁)的设计。近年来,又被用于解决流体力学、电磁场等非应力分析问题,并取得了很好的成果。70年代初,Babuška(见[2])和Brezzi(见[3])创立了混合有限元的一般理论。其主要结果是所谓的B. — B. 条件(第五章定义5.2)。为了使混合有限元法能解决更多、更广泛的问题,得到更高的计算精确度,80年代初,Falk和Osborn提出了一种稍微改进的方法(见[4]),扩大了混合有限元法的适用范围,使混合有限元法得到更进一步的发展。但是,作为有限元法的一个前沿分支,它的理论仍有待于进一步的发展和完善,它的应用更有待于进一步的推广。

我们之所以讨论混合有限元法,因为混合有限元法较标准有限元法有以下优点:1. 混合有限元法的解空间(即有限元或有限维空间)的光滑度要求较普通有限元(也称为标准有限元)的解空间的光滑度低,从而较易构造出混合有限元空间,并提高计算的精确度。2. 混合有限元法可使解本身(位移)和梯度(应力或应变)在各自不同的有限元空间中按其有限元空间

的精度得到逼近，克服了一般有限元法中先求位移（解本身），再由位移求应变、应力（梯度）的方法，从而减少了计算过程中的许多工作量和计算所造成的误差。3. 混合有限元法对处理高阶方程（特别是四阶双调和方程）和含有两个未知函数的方程（如 Stokes 方程）更便利，且易于数字处理。4. 混合有限元解有很好的物理意义和物理性能。

本书分为两大部分：第一部分是一般有限元法的理论基础，本部分一方面可作为《有限元方法及其理论基础》（〔5〕姜礼尚、庞之垣著）一书的补充提高，另一方面也为学习后续内容提供了必需的基础理论。第二部分比较系统地介绍了混合有限元法的基本理论及其应用格式，概括了近年来混合有限元法的一些研究成果。其中大部分的结果是作者本人的研究成果。

由于混合有限元法的理论和应用仍在发展之中，本书不可能包含全部的内容。本书旨在将混合有限元法的基本理论和基本方法介绍给读者。衷心希望本书能成为读者在混合有限元的学习和研究中的一个向导。

在本书的编写和修改过程中，得到石钟慈教授、刘儒勋教授、李开泰教授、庞之垣教授等专家的大力支持和帮助，他们对该书的初稿和第一次修改稿提出了许多宝贵的修改意见，使该书经多次修改和补充后在理论上和应用上更加完备，推导论证过程更加详细，更便于自学者阅读。在此特感谢所有关心和支持本书的专家和有关人士。

本书的错漏之处，恳请读者指正。

作 者

1993年10月初稿于贵阳

1994年5月第一次修改于贵阳

1995年8月再次修改于中国科大

目 录

第一篇	有限元法的理论基础	1
第一章	椭圆型问题的广义解	1
§ 1.1	Sobolev 空间及预备知识	1
§ 1.2	椭圆型问题的广义解	5
§ 1.3	广义解的存在唯一性	10
§ 1.4	等价模定理及其推论	13
§ 1.5	椭圆型问题的广义解存在性举例	19
§ 1.6	椭圆型问题的广义解的正则性	29
第二章	有限元和函数插值	32
§ 2.1	有限元的概念	33
§ 2.2	有限元空间的性质	36
§ 2.3	插值误差估计	42
§ 2.4	三角形剖分的插值举例	48
§ 2.5	四面体剖分的插值举例	89
§ 2.6	矩形单元和四边形等参元的插值	108
§ 2.7	六面体等参元及其插值	133
第三章	椭圆型问题的有限元法	145
§ 3.1	投影定理及 Galerkin 逼近	145
§ 3.2	二阶椭圆型问题的有限元逼近	147
§ 3.3	双调和方程的协调有限元分析	176

§ 3.4	双调和方程的非协调有限元分析	180
第四章	抛物型问题的有限元分析	188
§ 4.1	抛物型问题的标准 Galerkin 方法	188
§ 4.2	基于椭圆型问题的更一般逼近的半离散方法	203
第二篇	混合有限元法及其应用	215
第五章	混合问题的广义解和有限元解的 存在性及误差分析	215
§ 5.1	混合变分问题的广义解的概念	215
§ 5.2	混合变分问题广义解的存在性	222
§ 5.3	混合变分问题广义解的存在性举例	233
§ 5.4	混合有限元解的存在性及误差分析	241
第六章	双调和方程的混合有限元格式	253
§ 6.1	Ciarlet—Raviart 的混合有限元格式	253
§ 6.2	Hermann—Miyoshi 的混合有限元格式	259
§ 6.3	Hermann—Johnson 的混合有限元格式	262
第七章	二阶椭圆型问题的混合有限元格式	265
§ 7.1	Raviart—Thomas 格式	265
§ 7.2	线性元格式	281
§ 7.3	二次元格式	287
§ 7.4	四边形双线性元格式	292
§ 7.5	三角剖分的高次元格式	298
§ 7.6	三角剖分的改进格式	301
§ 7.7	四边形的高次元格式	305
§ 7.8	Douglas—Roberts 整体估计格式	309
§ 7.9	整体估计的改进格式	322

第八章 弹性力学问题的混合元格式	333
§ 8.1 Johnson—Mercier 格式	334
§ 8.2 弹性力学问题的混合线性元格式	348
§ 8.3 弹性力学问题的混合二次元格式	353
§ 8.4 弹性力学问题的混合双线性元格式	357
§ 8.5 弹性力学问题的混合三角高次元格式	362
§ 8.6 弹性力学问题的改进三角高次元格式	364
§ 8.7 弹性力学问题的四边形高次元格式	367
第九章 Stokes 问题的混合元格式	371
§ 9.1 基本理论	372
§ 9.2 三角剖分的一阶格式	374
§ 9.3 一种改进的一阶格式	377
§ 9.4 三角剖分的二阶格式	380
§ 9.5 三角剖分的三阶格式	383
§ 9.6 一种改进的二阶三角格式	386
§ 9.7 四边形单元的一阶格式	389
§ 9.8 四边形单元的二阶格式	392
§ 9.9 六面体单元的一阶格式	395
§ 9.10 六面体单元的二阶格式	398
§ 9.11 三角剖分的高阶格式	404
§ 9.12 四边形单元的高阶格式	406
§ 9.13 六面体单元的高阶格式	408
第十章 抛物型方程的混合元格式	413
§ 10.1 Johnson—Thoméé 格式	413
§ 10.2 一些改进的混合元格式	417
参考文献	420

第一篇 有限元法的理论基础

第一章 椭圆型问题的广义解

所谓广义解,就是指变分方程的解.本章主要讨论椭圆型偏微分方程的广义解的存在性,并给出广义解的正则性.为此,我们先简略地介绍 Sobolev 空间的一些常用的符号及有关的结论,具体证明从略.

§ 1.1 Sobolev 空间及预备知识

设 $e \subset R^n (n=1,2,3)$ 是有界开集, $\mathcal{D}(e)$ 是 e 上无穷多次可微且紧支集在 e 内部的函数构成的线性空间, $\mathcal{D}'(e)$ 是 $\mathcal{D}(e)$ 的对偶空间(亦称为分布空间), $(\cdot, \cdot)_e$ 表示它们的对偶内积.下面用到的 N 表示自然数的集合.

定义 1.1 设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N^n, |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, 若 $\forall u \in \mathcal{D}(e)$, 都有

$$(\partial^\alpha u, \varphi)_e = (-1)^{|\alpha|} (u, \partial^\alpha \varphi)_e, \forall \varphi \in \mathcal{D}(e), \quad (1.1)$$

则称 $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(e)$ 是 u 的 $|\alpha|$ 阶广义导数.

注: 当 $u \in C^{|\alpha|}(\bar{e}) (C^m(\bar{e}))$ 表示 m 次连续可微的函数空间) 时, $\partial^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$ 为微分学中的通常的导数.

定义 1.2 设 $m \in N, 1 \leq p \leq \infty, p \in R$ (实数集), 则

Sobolev 空间定义为

$$W^{m,p}(e) = \{v \in L^p(e) \mid \partial^\alpha v \in L^p(e), |\alpha| \leq m\}. \quad (1.2)$$

其范数为

$$\text{当 } p < \infty \text{ 时, } \|v\|_{m,p,e} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_e |\partial^\alpha v|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (1.3)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$\text{当 } p = \infty \text{ 时, } \|v\|_{m,\infty,e} = \sup_{|\alpha| \leq m} \{ \text{ess sup}_{x \in e} |\partial^\alpha v| \}. \quad (1.4)$$

其中 ess sup 表示本性上确界.

其半范为

$$\text{当 } p < \infty \text{ 时, } |v|_{m,p,e} = \left[\sum_{|\alpha|=m} \int_e |\partial^\alpha v|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}; \quad (1.5)$$

$$\text{当 } p = \infty \text{ 时, } |v|_{m,\infty,e} = \sup_{|\alpha|=m} \{ \text{ess sup}_{x \in e} |\partial^\alpha v| \}. \quad (1.6)$$

注: 当 $p = 2$ 时, 记 $H^m(e) = W^{m,2}(e)$ 且其范数和半范^[注]的下角标的 p 均略.⁽¹⁾

用 $H_0^m(e)$ 表示 $\mathcal{D}(e)$ 在 $\|\cdot\|_{m,e}$ 下的闭包而且记

$$[H_0^m(e)]' = H^{-m}(e).$$

其范数为

$$\|v\|_{-m,e} = \sup \{ |(v, u)_e| / \|u\|_{m,e}; 0 \neq u \in H_0^m(e) \},$$

$$\forall v \in H^{-m}(e). \quad (1.7)$$

积空间的范数和半范仍用上述的记号. 如当 $\tau = (\tau_{ij})_{i \times n} \in H^m(e)^{s \times n}$ ($s = 1$ 或 n) 时, 记

$$\|\tau\|_{m,e} = \left[\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n \|\tau_{ij}\|_{m,e}^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (1.8)$$

$$|\tau|_{m,e} = \left[\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n |\tau_{ij}|_{m,e}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.9)$$

积空间上相应的 L^2 内积仍记为 $(\cdot, \cdot)_e$, 但 $\forall \tau = (\tau_{ij})_{i \times n}$,

(1) [注]: 范数和半范也称为模和半模.

$\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n \in W^{m,p}(e)^{n \times n}$, 记

$$(\tau, \sigma)_e = \int_e \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{ij} \sigma_{ij} dx. \quad (1.10)$$

其中 $p \geq 2$.

注: 当 $e = \Omega$ 时, 上述的范数、半范和内积的下角标 e 在不至于混淆的情况下将省略.

限于篇幅的限制, 下面的定理和公式的证明均略. 读者可参考有关文献([6]、[7]、[8]、[9]).

嵌入定理 $W^{m,p}(e) \hookrightarrow C^l(\bar{e})$, 当 $\frac{n}{p} < m - l$ 时; $W^{m,p}(e) \hookrightarrow W^{m',p}$, 当 $m > m'$ 时.

其中 \hookrightarrow 表示嵌入, $\hookrightarrow\hookrightarrow$ 表示紧嵌入, $l \geq 0$.

Riesz 表现定理 若 H 是 Hilbert 空间, $f \in H'$, 则存在唯一的 $x \in H$, 使得

$$f(y) = (x, y)_H, \forall y \in H. \quad (1.11)$$

且 $\|f\|_{H'} = \|x\|_H$.

其中 $(\cdot, \cdot)_H$ 表示 H 中的内积或泛函.

Hahn-Banach 定理 设 H 是线性赋范空间, $G \subset H$ 为子空间, 则 $\forall f \in G'$, 存在 $F \in H'$, 使得

- (i) $F(x) = f(x)$, 当 $x \in G$ 时,
- (ii) $\|f\|_G = \|F\|_{H'}$. (1.12)

正交分解定理 设 M 是 Hilbert 空间 H 的一闭子空间, 则 $\forall x \in H$, 存在唯一的 $x_0 \in M$, 使得 $x - x_0 \in M^\perp$, 即

$$x = x_0 + z, z \in M^\perp. \quad (1.13)$$

其中 M^\perp 是 M 的正交空间.

有界算子逆存在定理 线性算子 T 具有有界逆算子的充分必要条件是 T 下有界, 即存在 $\beta > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geq \beta \|x\|, \forall x \in D(T). \quad (1.14)$$

其中 $D(T)$ 为 T 的定义域, 不等式左、右两边的范数分别是 T 的值域和定义域上相关的空间的范数.

迹定理 在 $C^m(\bar{\Omega})$ 上定义一个线性算子 γ , 使得:

$$\gamma: \gamma(u) = u|_{\partial\Omega}. \quad (1.15)$$

若记

$$\|\gamma u\|_{m-1, \partial\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} |\partial^\alpha u|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.16)$$

则存在仅依赖于 Ω 的常数 $C > 0$, 使得

$$\|\gamma u\|_{m-1, \partial\Omega} \leq C \|u\|_{m, \Omega}. \quad (1.17)$$

附注: 因为 $C^m(\bar{\Omega})$ 在 $H^m(\Omega)$ 中稠密, 则 $\forall u \in H^m(\Omega)$, 存在 $u_k \in C^m(\bar{\Omega})$ 使得 $\|u - u_k\|_{m, \Omega} \rightarrow 0$, 且 $\{u_k\} \subset H^m(\Omega)$ 是基本列(即柯西序列), 从而有 $\|u_k - u_l\|_{m, \Omega} \rightarrow 0 (k, l \rightarrow \infty)$ 时. 由 (1.17) 得 $\|\gamma(u_k - u_l)\|_{m-1, \partial\Omega} \rightarrow 0 (k, l \rightarrow \infty)$ 时. 从而有

$$\|\partial^\alpha u_k - \partial^\alpha u_l\|_{0, \partial\Omega} \rightarrow 0, |\alpha| \leq m-1 (k, l \rightarrow \infty).$$

又因为 $L^2(\partial\Omega)$ 是完备空间, 则存在 $\varphi_\alpha \in L^2(\partial\Omega)$, 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|\partial^\alpha u_k - \varphi_\alpha\|_{0, \partial\Omega} \rightarrow 0$. 若 $u \in C^m(\bar{\Omega})$, 则 $\varphi_\alpha = \partial^\alpha u|_{\partial\Omega}, |\alpha| \leq m-1$. 当 $u \in H^m(\Omega)$ 时, 必须引入广义边值.

定义 1.3 设 $u \in H^m(\Omega)$, 则称 $\varphi_\alpha = \partial^\alpha u|_{\partial\Omega}$ 为 $\partial^\alpha u$ 的广义边值, 记为 $\gamma_\alpha u = \partial^\alpha u|_{\partial\Omega}$. 算子 γ_α 称为迹算子 ($|\alpha| \leq m-1$).

注: 利用迹算子, 我们可将空间 $H_0^m(\Omega)$ 表示为

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) | \gamma_\alpha u = 0, |\alpha| \leq m-1\}. \quad (1.18)$$

Riesz-Thorin 定理 设 (R_1, rR, μ) 和 (R_2, rR, η) 是两个测度空间, S 是 R_1 上的复值简单函数全体, T 是 S 到 R_2 上的复值函数空间的映射且满足

$$\|Tf\|_{0,1/\beta_1} \leq M_1 \|f\|_{0,1/\alpha_1}, \forall f \in S; \quad (1.19)$$

$$\|Tf\|_{0,1/\beta_2} \leq M_2 \|f\|_{0,1/\alpha_2}, \forall f \in S. \quad (1.20)$$

其中 $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leq 1$. M_1, M_2 为常数, 令 $\alpha = (1-t)\alpha_1 +$

$t\alpha_2, \beta = (1-t)\beta_1 + t\beta_2, 0 < t < 1$, 则有

$$\|Tf\|_{0,1/\beta} \leq M_1^{1-t} M_2^t \|f\|_{0,1/\alpha}, \forall f \in S. \quad (1.21)$$

而且当 $\alpha > 0$ 时, T 可唯一地延拓到整个空间 $L^{1/\alpha}(\mu)$ 上使得 (1.21) 成立.

Hölder 不等式 $\forall u \in L^p(e)$ 和 $\forall v \in L^q(e)$ 都有

$$\int_e |uv| dx \leq \left(\int_e |u|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_e |v|^q dx \right)^{1/q}. \quad (1.22)$$

其中 $1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

带 ϵ 的 Cauchy (柯西) 不等式 $\forall \epsilon > 0$ 及 $\forall a, b \geq 0$ 都有

$$ab \leq \frac{1}{2} (\epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2). \quad (1.23)$$

Green 公式

(1) 当 $u \in H^2(e), v \in H^1(e)$ 时, 有

$$\int_e v \Delta u dx = - \int_e \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial e} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds. \quad (1.24)$$

其中 \vec{n} 为 e 上的单位外法向量, ∇u 为 u 的梯度, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$.

(2) 当 $u \in H^1(e), v \in H^2(e)$ 时, 有

$$\int_e \Delta^2 u \cdot v dx = \int_e \Delta u \Delta v dx + \int_{\partial e} v \frac{\partial \Delta u}{\partial \vec{n}} ds - \int_{\partial e} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds. \quad (1.25)$$

其中 $\Delta^2 = (\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2)^2$.

§ 1.2 椭圆型问题的广义解

先看几个具体的实例

一、Poisson 方程的广义解

Poisson 方程为

$$-\Delta u = f, \text{ 在 } \Omega \text{ 中.} \quad (2.1)$$

其中 $\Omega \subset R^n (n = 2 \text{ 或 } 3)$ 是有界区域.

用 $v \in H^1(\Omega)$ 乘(2.1)的两边且在 Ω 上两边积分,再由 Green 公式(1.24)得

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.2)$$

其中(2.2)中的 \vec{n} 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量.

1. 第一边值问题的广义解

Poisson 方程的第一边值问题为

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ 在 } \Omega \text{ 中,} \\ u = u_0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 f 是已知函数, u_0 也是已知函数.

将 u_0 延拓为 $H^1(\Omega)$ 中的函数且仍记为 u_0 . 当 $v \in H_0^1(\Omega)$ 时, (2.2) 左边第二项为零. 从而由(2.2) 我们可归结出下一概念.

定义 1.4 称 $u \in H^1(\Omega)$ 是 Poisson 方程的第一边值问题(2.3)的广义解, 如果 $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 且 u 满足

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.4)$$

注: 可以证明, 当(2.4)的解 u 适当光滑时, 也是古典问题(2.3)的解.

2. 第三边值问题的广义解

Poisson 方程的第三边值问题为

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ 在 } \Omega \text{ 内,} \\ \frac{\partial u}{\partial n} + bu = g, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $b \geq 0$, 且 $b \neq 0$, f, g 均是已知函数.

将 $\frac{\partial u}{\partial n} = -bu + g$ 代入(2.2), 移项整理得

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} b u v ds = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds, \\ \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.6)$$

定义 1.5 称 $u \in H^1(\Omega)$ 是 Poisson 方程第三边值问题的广义解, 如果 u 满足 (2.6).

注: 当 (2.6) 的广义解适当光滑时, 也是古典问题 (2.5) 的解.

3. 第二边值问题的广义解

Poisson 方程第二边值问题就是第三边值问题当 $b \equiv 0$ 时的情形, 即

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \partial u / \partial \bar{n} = g, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.7)$$

定义 1.6 称 $u \in H^1(\Omega)$ 是 Poisson 方程的第二边值问题 (2.7) 的广义解, 如果 u 满足:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds, \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.8)$$

注: (1) 当 (2.8) 的广义解适当光滑时也是古典问题 (2.7) 的解. (2) 并非任意 Poisson 方程的第二边值问题都有广义解, 即 Poisson 方程的第二边值问题须在一定的条件限制下才有广义解, 后面 (见 § 1.5) 将给出 (2.8) 的广义解存在的条件.

二、双调和方程的广义解

设 Ω 是二维或三维空间中的有界区域, 双调和的四阶方程为

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = \partial u / \partial \bar{n} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.9)$$

其中 f 是已知函数, $\Delta^2 = (\sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2)^2$, \bar{n} 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量.