北京市中学课本

数学

第三册

北京市中学课本

数　学

第三册

北京市教育局中小学教材编写组编

*

北京人民出版社出版

北京市新华书店发行

北京市印刷二厂印刷

*

1972年1月第1版　1972年1月第1次印刷

书号：K7·13　定价：0.17元

毛主席语录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。学制要缩短，教育要革命，资产阶级知识分子统治我们学校的现象，再也不能继续下去了。

目　　录

第五章　二次根式

第六章　一元二次方程

第五章　二次根式

一　数的开方

1. 平方根

我们已经学过了数的平方运算，但是，在三大革命实践中，还会遇到平方的逆运算。

例如，工人师傅要截一块面积是 9 平方分米的正方形钢板，下料时，需要知道它的边长，问边长应是多少分米？

设正方形的边长为 x 分米．根据题意，得 $x^2=9$。这就需要求出一个数 x，使它的平方等于 9。

$$\because \quad 3^2=9 \text{ 和 } (-3)^2=9,$$

$$\therefore \quad x=3 \text{ 和 } x=-3.$$

在这个实际问题中，$x=-3$ 不符合题意，应舍去。

因此，$x=3$ 分米就是所求的正方形钢板的边长。

我们把 3 和 -3 叫做 9 的平方根。

一般地说，如果 $x^2=a\ (a\geqslant 0)$，那么，x 就叫做 a 的平方根。例如，

$\because\quad 0.4^2=0.16,\ (-0.4)^2=0.16$.

$\therefore\quad$ 0.16 有两个平方根：0.4 和 -0.4.

由此可知：一个正数有两个平方根，这两个平方根的绝对值相等，符号相反.

因为 $0^2=0$，所以，零的平方根是零.

因为任何有理数的平方都不能是负数，所以，负数的平方根没有意义. 例如，-9 的平方根就没有意义.

求一个数的平方根的运算叫做开平方. 开平方和平方互为逆运算.

正数 a 的两个平方根用符号 $\pm\sqrt[2]{a}$（“$\sqrt{\ }$”读作“根号”）表示. a 叫做被开方数，2 叫做根指数. 根指数是 2 时，通常省略不写，即 $\pm\sqrt{a}$. 例如，9 的平方根记作 $\pm\sqrt{9}=\pm3$.

一个正数的正的平方根叫做这个正数的算术平方根（简称算术根）. 正数 a 的算术平方根用符号 $\sqrt{a}$ 表示. 例如，25 的算术平方根记作 $\sqrt{25}=5$.

应该注意一个正数的平方根与它的算术平方根的区别和联系.

例 1 求下列各数的平方根：

(1) 36； (2) $\frac{1}{4}$.

解： (1) $\because\quad (\pm6)^2=36$,

$\therefore$ 36的平方根是 ± 6；

（2）$\because$ $\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

$\therefore$ $\frac{1}{4}$的平方根是$\pm\frac{1}{2}$.

例2 求下列各数的算术平方根：

（1）64； （2）$\frac{49}{100}$； （3）0.0004.

解：（1）$\because$ $8^2=64$，

$\therefore$ 64的算术平方根是8，即$\sqrt{64}=8$；

（2）$\because$ $\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{49}{100}$，

$\therefore$ $\frac{49}{100}$的算术平方根是$\frac{7}{10}$，即

$\sqrt{\frac{49}{100}}=\frac{7}{10}$；

（3）$\because$ $(0.02)^2=0.0004$，

$\therefore$ 0.0004的算术平方根是0.02，即

$\sqrt{0.0004}=0.02$.

练　习

1.（1）填表：

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2											

（2）根据上表写出下列各数的平方根：

361，289，324，256，169。

2. 求下列各数的平方根：

(1) 49； (2) 1600； (3) 1； (4) 0；

(5) 0.0081； (6) $\frac{64}{121}$； (7) 2.25； (8) $\frac{25}{144}$。

3. 求下列各数的算术平方根：

(1) 0.25； (2) 400； (3) 0.04； (4) $\frac{1}{256}$。

4. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{81}$； (2) $-\sqrt{\frac{4}{9}}$； (3) $\sqrt{0.01}$；

(4) $\pm\sqrt{\frac{36}{169}}$。

5. (1) 一个数的平方等于 16，求这个数；

(2) 一个数的平方等于 0.09，求这个数。

2. 立方根

在实际问题中，我们还会遇到立方的逆运算。

例如，红旗电镀厂要做一个容积是 8 立方米的正方体电镀槽，问电镀槽的边长应是多少米？

设电镀槽的边长为 x 米，根据题意，得 $x^3=8$。这就需要求一个数 x，使它的立方等于 8。

$$\because \quad 2^3=8, \qquad \therefore \quad x=2.$$

因此，电镀槽的边长为 2 米。

我们把 2 叫做 8 的立方根。

一般地说，如果$x^3=a$，那么，x就叫做a的立方根，a的立方根用符号$\sqrt[3]{a}$表示，其中a叫做被开方数，3叫做根指数。

求一个数的立方根的运算叫做开立方。开立方和立方互为逆运算。

例如，（1）$\because\ 4^3=64$，

$\therefore$ 64的立方根是4，

记作：$\sqrt[3]{64}=4$；

（2）$\because\ (-2)^3=-8$，

$\therefore$ -8的立方根是-2，

记作：$\sqrt[3]{-8}=-2$；

（3）$\because\ 0^3=0$，

$\therefore$ 0的立方根是0，

记作：$\sqrt[3]{0}=0$。

由此可知：正数的立方根是一个正数；负数的立方根是一个负数；零的立方根是零。

例 求下列各数的立方根：

（1）27；（2）0.125；（3）$-\frac{1}{216}$。

解：（1）$\because\ 3^3=27$，$\therefore\ \sqrt[3]{27}=3$；

（2）$\because\ 0.5^3=0.125$，$\therefore\ \sqrt[3]{0.125}=0.5$；

(3) $\because \quad \left(-\frac{1}{6}\right)^3=-\frac{1}{216}$,

$\therefore \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{216}}=-\frac{1}{6}$.

练　习

1. (1) 填表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3											

(2) 根据上表写出下列各数的立方根：

343； 1000； 729； 512。

2. 求下列各数的立方根：

(1) 64； (2) $-\frac{343}{1000}$； (3) 0.008。

3. 计算下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{125}$； (2) $\sqrt[3]{-0.729}$。

3. 开平方的一般方法

前面我们用直接观察的方法，求一些特殊的数，如 9、$\frac{1}{4}$、0.0004 等的平方根。但仅凭观察是不够的，很明显，对于一般的数，如 1225、0.5329、2、3 等，就不容易直接观察出它们的平方根。毛主席教导说：**“我们不但要提出任务，而且要解决完成任务的方法问题。”**这就需要我们从分析数的平方的规律中，得出数的开平方的一般方法。

由于正数的两个平方根是互为相反的数，因此，只研究一个正数的算术平方根就可以了.

(1) 整数开平方

例1 求 $\sqrt{1225}$.

解：① 确定$\sqrt{1225}$是几位数

因为 $1^2=1$, $9^2=81$;

$10^2=100$, $99^2=9801$;

$100^2=10000$, $999^2=998001$;

……………, …………….

并且，两个正数中，较大的数的平方也较大.

所以，一位数的平方是一位数或者两位数；两位数的平方是三位数或者四位数；三位数的平方是五位数或者六位数；…….反过来，就可以知道：

一位数或者两位数的算术平方根是一位数；

三位数或者四位数的算术平方根是二位数；

五位数或者六位数的算术平方根是三位数；

…………………………………………….

因此，我们可以用一个撇号“′”把一个整数从右向左，每隔两位分成一段(最后不到两位也算一段)，所分得的段数，就是这个数的算术平方根的整数位数.

1225 可以分成 12′25 两段，它的算术平方根是两位整数.

② 确定$\sqrt{12'25}$最高位上的数字(十位上的数字)

因为12′25左边第一段的数字是12，而12在3^2和4^2之间，也就是说，1225在30^2和40^2之间，所以，$\sqrt{1225}$最高位上的数字是3。

③ 确定$\sqrt{1225}$的个位上的数字

设$\sqrt{1225}$的个位数是a，那么，$\sqrt{1225}=30+a$。于是有

$$1225=(30+a)^2$$

$$=30^2+2\times30\cdot a+a^2.$$

从1225减去900（就是30^2），得

$$\begin{array}{rl} 1225= & 30^2+2\times30\cdot a+a^2 \\ -)\ 900= & 30^2 \\ \hline 325= & \qquad 2\times30\cdot a+a^2 \end{array}$$

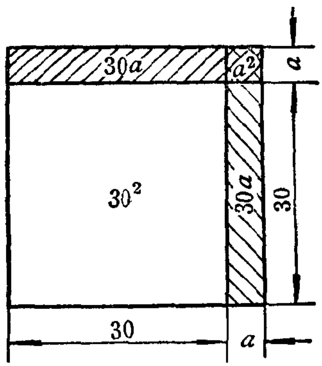

图 5—1

在$2\times30\cdot a+a^2$里，由于a是个位上的数，所以，a^2比$2\times30\cdot a$小得多(图5—1)，我们可以把a^2暂时忽略不计，写成$325\approx2\times30\cdot a$，

$$\therefore\quad a\approx\frac{325}{2\times30}\approx5.$$

就是说，用2×30(就是60)去除325来估计a的值。这里，所得的商的整数部分是5，这说明a的值可能是5，把它叫做试商。

要确定 a 的值是不是 5，只要计算当 $a=5$ 时，$2\times 30\cdot a+a^2$ 的值是不是 325 即可。当 $a=5$ 时，

$$2\times 30\cdot a+a^2=(2\times 30+a)a=(60+5)\times 5$$
$$=65\times 5=325,$$

所以，a 的值就是 5。因此，$\sqrt{1225}=35$。

在实际计算中，为了方便起见，我们把 $2\times 30\cdot a+a^2$ 中的 2×30 写成 20×3，并将上面计算过程简写成下面的形式：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;\;\;3\;\;\;\;5 \\
 & \sqrt{1\;\;2'\;2\;\;5} \\
 & \;\;\;\;9 \\
\cline{2-2}
20\times 3=60 & \;\;\;\;3\;\;2\;\;5 \\
+)\;\;5 & \;\;\;\;3\;\;2\;\;5 \\
\cline{1-2}
65 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{1225}=35.$$

总结以上的过程就是：

① 分段：把被开方数从右向左每隔两位用撇号“ ′ ”分开：$12'25$；

② 确定算术平方根最高位上的数字：从左边第一段数 12，确定算术平方根的十位上的数字是 3，写在第一段数 12 的上边；

③ 求余数：十位上的数字 $3^2=9$ 写在 12 的下

边，相减 $12-9=3$；再把第二段数 25 移下，得余数 325；

④ 试除：用 20 乘以十位上的数字 3 得 60，然后用 60 去试除余数 325，得试商 5，即算术平方根的个位上的数字可能是 5；

⑤ 确定算术平方根的个位数字：用 20 乘以十位数字 3，加上试商 5 得 65（写在竖线左边），再乘以试商 5（写在第二段数 25 的上边）得 325，写在余数 325 的下边，相减 $325-325=0$，刚好开尽，因此，$\sqrt{1225}=35$。

如果算术平方根是三位以上的数，用同样的方法，继续求算术平方根的其余各位上的数。

例 1 求 $\sqrt{1444}$。

解：

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 3 & & 8 \\
\hline
\sqrt{} & 1 & 4' & 4 & 4 \\
 & & 9 & & \\
\hline
68 & & 5 & 4 & 4 \\
 & & 5 & 4 & 4 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

$\therefore \sqrt{1444}=38$。

例 2 求 $\sqrt{32041}$。

解：

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & & 7 & & 9 \\
\hline
\sqrt{} & 3' & 2 & 0' & 4 & 1 \\
 & 1 & & & & \\
\hline
27 & 2 & 2 & 0 & & \\
 & 1 & 8 & 9 & & \\
\hline
349 & & 3 & 1 & 4 & 1 \\
 & & 3 & 1 & 4 & 1 \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

$\therefore \sqrt{32041}=179$。

在例 1 里，544 除以 60 商 9，而 $69\times 9>544$，所以改商 8。

在例 2 里，得到 $220-189=31$ 以后，把第三段上的数 41 移下来，得到 3141（称为第二余数）。在竖线的左边写上 34（实际上是 $20\times 17=340$），在 34 的右边要留出一个空位，以便写算术平方根个位上的数。3141 除以 340 商 9，如此继续下去。

例 3　求 $\sqrt{40401}$。

解：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{\sqrt{}}2\ \ 0\ \ 1 \\
 & \sqrt{4'04'01} \\
 & 4 \\ \hline
401 & 401 \\
 & 401 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt{40401}=201$。

例 4　求 $\sqrt{37636}$。

解：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{\sqrt{}}1\ \ 9\ \ 4 \\
 & \sqrt{3'76'36} \\
 & 1 \\ \hline
29 & 276 \\
 & 261 \\ \hline
384 & 1536 \\
 & 1536 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt{37636}=194$。

在例 3 里，移下第二段上的数 4 以后，用 $20\times 2=40$ 去试除 4，商不够 1，因此，商为 0。接着再移下第三段上的数 01，得余数 401，这时用 $20\times 20=400$ 去试除。

在例 4 里，用 $20\times 1=20$ 去试除 276 商 13，因为

商只能是一位数，所以改商9.

例5 前进大队贫下中农遵照毛主席关于“**备战、备荒、为人民**”的伟大教导，计划把地面渠道改为地下渠道。如果渠道水泥管的小圆截面面积是0.5平方米，那么水泥管的小圆直径是多少米(图5—2)？

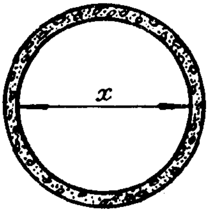

图 5—2

解：设水泥管的小圆直径是x米。根据题意，得

$$\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 0.5.$$

$$\frac{\pi}{4}x^2 = 0.5.$$

把x^2当作未知数，解这个方程，得

$$x^2 \approx 0.64.$$

根据平方根的意义，得

$$x \approx \pm\sqrt{0.64} = \pm 0.8.$$

$x \approx -0.8$不符合题意，应把它舍去。

答：水泥管的小圆直径约是0.8米。

(2) 小数开平方

小数开平方的方法和整数开平方的方法一样，只

是分段不同．小数部分由小数点起，从左向右每隔两位用撇号分开．

注意：所得的算术平方根的小数点的位置要和被开方数的小数点对齐．

例 1　求$\sqrt{0.5329}$．

解：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 0.\ 7\ \ 3 \\
 & \sqrt{0.53'29} \\
 & \quad 49 \\
\hline
143 & \quad 429 \\
 & \quad 429 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore \sqrt{0.5329}=0.73$．

例 2　求$\sqrt{322.5616}$．

解：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1\ \ 7.\ 9\ \ 6 \\
 & \sqrt{3'22.56'16} \\
 & 1 \\
\hline
27 & 222 \\
 & 189 \\
\hline
349 & 3356 \\
 & 3141 \\
\hline
3586 & 21516 \\
 & 21516 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore \sqrt{322.5616}=17.96$．

例 3　已知$x^2=0.000625$，求x．

解：

$$
\begin{aligned}
\because\quad & x^2=0.000625, \\
\therefore\quad & x=\pm\sqrt{0.000625} \\
& \ \ =\pm 0.025.
\end{aligned}
$$

（3）近似平方根

前面讲到的被开方数都是开得尽的数，但更多的是开不尽的数．可以用如下的方法来求它的近似平方根(平方根的近似值)．