

高等学校教材

工程数学

张春霖 彭成奖
朱明娣 潘文熙 主编

暨南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/张春彝等编著. —广州:暨南大学出版社, 1999. 9

ISBN7-81029-868-2

I. 工…

II. 张…

III. 工程数学

IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 37976 号

暨南大学出版社出版

(广州·石牌)

暨南大学出版社照排中心排版

广东省农垦总局印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 25 字数: 608 千

1999 年 9 月第 1 版 1999 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2000 册

定价: 38.00 元

前 言

《工程数学》包括线性代数、概率论、数理统计、复变函数和数理方程,是高等学校工科专业的一门重要基础课程,也是高等数学的继续和发展。工程数学在自然科学和工程技术领域中有着广泛的应用,对培养学生的分析问题和解决实际问题的能力都将起着重要的作用。

编写本教材的指导思想是,从高等学校工科专业,特别是电子信息工程等专业的培养目标出发,根据国家教育部制定的工科本科专业基础课程教学基本要求,突出应用性、科学性和电子信息类专业的教学特点,并结合编者教学实践进行编写。因此,本书除可供电子信息类专业作工程数学的教材外,还可供其他工科专业选作教学用书,也可作为相关专业研究生和工程技术人员的参考书。

本书从具体问题入手,深入浅出地引出基本概念,力求做到通俗易懂,使初学工程数学者不致于感到过于难学。本书重点突出,同时列举了足够的例题来说明其应用,启发读者的解题思路。本书配备了较丰富的习题,习题按章安排,各专业可根据需要选用。书后附有各种附表和习题答案以及参考书目。

本书由张春舜教授、彭成奖副教授任主编。参加编写的还有朱明娣副教授及潘文熙教授。其中第1篇由朱明娣编写,第2篇、第5篇由张春舜编写,第3篇由彭成奖编写,第4篇由潘文熙编写。各篇的主审人员如下:第1篇由宋兆鸿教授主审,第2、3篇由邓炜材教授主审,第4、5篇由林宗振教授主审。本书最后由彭成奖整理定稿。

本书在酝酿和编写过程中得到暨南大学教学指导委员会教材评审专家组、教务处、物理系、电子工程系和数学系等领导和专家们热情支持和帮助,在此,一并表示感谢!

由于编者水平有限,时间仓促,疏漏乃至错误之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者

1999.7

目 录

I 线性代数	1
1.1 行列式	2
1.1.1 二阶与三阶行列式	2
1.1.2 n 阶行列式	5
1.1.3 克莱姆法则	11
习题	14
1.2 矩阵	16
1.2.1 线性变换与矩阵	16
1.2.2 矩阵的运算	18
1.2.3 逆矩阵及其求法	25
1.2.4 分块矩阵	31
1.2.5 矩阵的初等变换	34
习题	39
1.3 线性方程组	43
1.3.1 向量及向量间的线性关系	43
1.3.2 向量组的秩与矩阵的秩	49
1.3.3 线性方程组有解的判别定理	56
1.3.4 线性方程组解的结构	59
1.3.5 线性方程的数值解法	66
习题	74
1.4 矩阵的特征值与特征向量	78
1.4.1 特征值与特征向量	78
1.4.2 相似矩阵与矩阵的对角化	84
1.4.3 矩阵特征值问题的数值解法	89
习题	91
1.5 二次型	93
1.5.1 二次型的基本概念	93
1.5.2 用正交变换化二次型为标准型	96
1.5.3 惯性定律与正定二次型	103
习题	105

2 概率论	108
2.1 随机事件及其概率	109
2.1.1 随机事件的频率和概率	109
2.1.2 随机事件间的关系及其运算	111
2.1.3 古典概型	114
2.1.4 条件概率、相依事件、独立事件	115
2.1.5 独立试验序列	120
习题	123
2.2 随机变量及其概率分布	127
2.2.1 随机变量的概念	127
2.2.2 离散型随机变量的概率分布	128
2.2.3 连续型随机变量的概率分布	133
2.2.4 随机变量的分布函数	137
习题	143
2.3 多维随机变量及其概率分布	145
2.3.1 二维随机变量的联合分布和连续分布	145
2.3.2 随机变量的独立性	152
2.3.3 二维随机变量的函数分布	154
习题	160
2.4 随机变量的数字特征	162
2.4.1 随机变量的数学期望	162
2.4.2 随机变量的方差和协方差	167
2.4.3 矩	173
习题	177
2.5 大数定律和中心极限定理	179
2.5.1 大数定律	179
2.5.2 中心极限定理	183
习题	187
3 数理统计	188
3.1 数理统计的基本概念	189
3.1.1 总体·个体·样本和统计量	189
3.1.2 直方图	190
3.1.3 样本特征数	192
3.1.4 几个常用统计量的分布	195
3.1.5 正态概率纸和正态概率积分表	197
习题	199
3.2 参数估计	200
3.2.1 参数的点估计	200

3.2.2	参数的区间估计	203
3.2.3	估计量的好坏标准	207
	习题	209
3.3	假设检验	210
3.3.1	假设检验的基本思想和基本概念	210
3.3.2	U 检验	211
3.3.3	t 检验	212
3.3.4	F 检验和 χ^2 检验	215
	习题	218
3.4	方差分析	219
3.4.1	单因素方差分析	219
3.4.2	双因素方差分析	223
	习题	226
3.5	回归分析	227
3.5.1	一元线性回归	227
3.5.2	多元线性回归	236
3.5.3	多元非线性回归	240
3.5.4	回归方程应用于预测与控制	241
	习题	242
4	复变函数	245
4.1	复数与复变函数	246
4.1.1	复数及其运算	246
4.1.2	区域 曲线	249
4.1.3	复变函数的概念	250
4.1.4	复变函数论的应用概述	251
	习题	252
4.2	解析函数	253
4.2.1	解析函数的概念及导数	253
4.2.2	复变函数解析的充要条件	254
4.2.3	调和函数与解析函数的关系	254
	习题	256
4.3	级数及复变量初等函数	257
4.3.1	复函数项级数	257
4.3.2	幂级数	258
4.3.3	复变量初等函数的 e^z 、 $\sin z$ 、 $\cos z$	259
4.3.4	复变量初等函数的对数函数、有理函数	260
	习题	262
4.4	复变函数的积分	263

4.4.1	复变函数积分的概念	263
4.4.2	柯西积分定理	264
4.4.3	柯西积分公式及推论	265
4.4.4	泰勒级数及解析开拓	267
	习题	269
4.5	留数	271
4.5.1	奇点及洛朗级数	271
4.5.2	留数及留数定理	272
4.5.3	留数在定积分计算上和应用	274
	习题	276
5	数学物理方程	278
5.1	数学物理方程的导出和定解问题	279
5.1.1	三类典型方程的建立	279
5.1.2	定解问题	284
5.1.3	无界弦振动的达朗贝尔解法	287
	习题	289
5.2	分离变量法	291
5.2.1	有界弦的自由横振动方程	291
5.2.2	有限长杆的热传导方程	294
5.2.3	园域内的二维拉普拉斯方程	297
5.2.4	非齐次方程或非齐次边界条件问题的解法	301
	习题	306
5.3	贝塞尔函数和勒让德多项式	309
5.3.1	贝塞尔函数及其性质	309
5.3.2	勒让德多项式及其性质	317
	习题	323
5.4	积分变换法	325
5.4.1	傅里叶积分和傅里叶变换	325
5.4.2	傅里叶变换的性质	328
5.4.3	拉普拉斯变换	331
5.4.4	拉普拉斯变换的性质	334
	习题	337
5.5	数值方法	339
5.5.1	有限差分的概念	339
5.5.2	三类典型方程的有限差分解法	344
	习题	356

附表	358
表 1 正态分布的密度函数表	358
表 2 正态分布表	360
表 3a 正态概率积分表	362
表 3b K_α 值表	364
表 4 $P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 函数值表	365
表 5 t 分布表	367
表 6a F 分布表($\alpha=0.25$)	369
表 6b F 分布表($\alpha=0.05$)	370
表 6c F 分布表($\alpha=0.01$)	371
表 7 χ^2 分布表	372
表 8 相关系数检验表	373
习题答案	374
参考书目	390

1

线性代数

线性代数是在 19 世纪后期发展起来的一个数学分支,它的理论和方法在科学技术各个领域有广泛的应用。在现实世界中,变量与变量之间的依赖关系是多种多样的,有的是线性关系,更多的是各种非线性关系。线性关系是最基本的关系,它结构简单,易于处理。而非线性关系则要复杂得多,直接处理比较困难。因此,为了解决实际问题,常设法将非线性关系简化为线性关系来处理。在工程问题中,研究非线性关系时,一个极为重要的方法就是线性化,把问题化为求解线性方程组之类的运算。线性代数正是解决这类问题的有力工具。随着电子计算机的产生与飞速发展,原来难以计算的高阶线性方程组的解可以很快算出来,从而促进了线性代数方法的广泛应用和发展。

本篇将分五章阐述线性代数的主要理论与方法。

§ 1.1 行列式

行列式是线性代数的基本概念,它是研究线性方程组解法和讨论矩阵性质的重要工具,本章从二阶和三阶行列式出发引出 n 阶行列式的定义、性质和计算方法,并介绍利用行列式求解线性方程组的克莱姆法则。

§ 1.1.1 二阶与三阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的问题中引入的。在初等代数中,我们已熟知用消元法解二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,可得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

可见(1.1.2)式中 x_1 与 x_2 的分母相同,而且只与方程组中 x_1, x_2 的系数有关。因此若引进一个符号来表示这个分母,则解的结果将简洁易记。

于是有

定义 1 代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示,称为二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.1.3)$$

在一个行列式中,横排的叫做行,纵排的叫做列。一个二阶行列式中有 4 个元素排成 2 行 2 列,元素 a_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) 处于行列式中第 i 行第 j 列位置。代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的展开式,其计算结果是一个数,称为行列式的值。

注意到(1.1.3)式中行列式的 4 个元素的位置排列正好保持了它们在方程组(1.1.1)中作为未知量 x_1, x_2 的系数的顺序,我们称这个行列式是方程组(1.1.1)的系数行列式。这样,按照二阶行列式的定义,方程组(1.1.1)的解就立即可写成如下简单、便于记忆的形式:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D} \end{cases} \quad (1.1.4)$$

例 1.1.1 求解方程组 $\begin{cases} 4x - 5y - 13 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

解: 先将方程组写成如下一般形式

$$\begin{cases} 4x - 5y = 13 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

计算 $D = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 1 \times (-5) = 17 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 13 \times 3 - (-1) \times (-5) = 34$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times (-1) - 1 \times 13 = -17$$

可得 $x = \frac{D_1}{D} = \frac{34}{17} = 2$ $y = \frac{D_2}{D} = \frac{-17}{17} = -1$

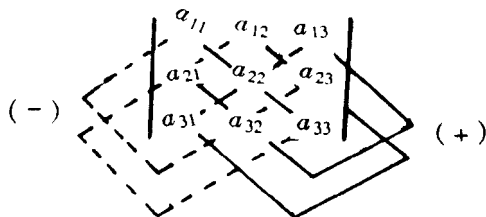
类似地, 我们有

定义 2 符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示三阶行列式

且有
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(1.1.5)

由定义知, 一个三阶行列式含有 3 行 3 列共 9 个元素, 它的展开式是 $3! = 6$ 项的代数和, 每一项是取自不同行不同列的 3 个元素之积, 且它们的符号遵守“对角线法则”:



用实线连接的 3 元素之积带正号, 用虚线连接的 3 元素之积带负号。

例 1.1.2 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 \times 3 + 2 \times 1 \times 1 + 1 \times 2 \times 2 \\ - 3 \times 2 \times 1 - 2 \times 2 \times 3 - 1 \times 3 \times 1 \\ = 27 + 2 + 4 - 6 - 12 - 3 \\ = 12$

按照 3 阶行列式定义, 我们不难验证, 一个三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

当其系数行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{时}$$

$$\text{它的解也可以写成如下简单的形式} \begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \\ x_3 = \frac{D_3}{D} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

$$\text{其中 } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1.13 求解方程组

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 6 \\ x + 2y + z = \end{cases}$$

解: 由于

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -27$$

$$\text{所以 } x = \frac{D_1}{D} = \frac{-18}{-9} = 2$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{-9} = -1$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{-9} = 3$$

§ 1.1.2 n 阶行列式

1. n 阶行列式的定义

现在来考虑如何将行列式的概念推广到 n 阶的场合。首先要指出的是,当 $n \geq 4$ 时,行列式的计算不能用二、三阶时的“对角线法则”给出,因此,不能仿照“定义 1、2”来定义一般的 n 阶行列式。于是考虑用另一种方法定义。

先考察三阶行列式与二阶行列式之间的关系。

根据定义,一个三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1.1.7)$$

即三阶行列式是它的第一行的三个元素分别与一个二阶行列式相乘积的代数和。而与元素 $a_{1j} (j=1,2,3)$ 相乘的二阶行列式恰好是把原行列式中 a_{1j} 所在的第 1 行与第 j 列划去后余下的 4 个元素组成的行列式。我们把它称为 a_{1j} 的余子式,记作 M_{1j} 。而这个代数和(1.1.7)中各项的符号是 $(-1)^{1+j}$ 。若令 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

我们称 A_{1j} 为 a_{1j} 的代数余子式。

如果定义一阶行列式为

$|a| = a$, (注意,不要把这里的符号“ $|$ ”看成绝对值),则二阶行列式与一阶行列式之间也有如上所述的关系,即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

于是,很自然可以按照上述规律定义四阶行列式如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

反复运用这个规律,即可由 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式。这种定义方法叫做递归定义法。

定义 3 设 $n-1$ 阶行列式已定义,则 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j} \quad (1.1.8)$$

这里 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$,同前所述, M_{1j} 是 a_{1j} 的余子式,它是把原行列式中 a_{1j} 所在的第 1 行和第 j 列划去后余下的 $n-1$ 阶行列式。 A_{1j} 是 a_{1j} 的代数余子式。式(1.1.8)也称 n 阶行列式按第一行展开的展开式。

$$\begin{aligned} \text{例 1.1.4} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ & + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 16 - 8 = 0 \end{aligned}$$

例 1.1.5 计算下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解:由定义按第一行展开,可得

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

2. n 阶行列式的性质与计算

上节虽对 n 阶行列式给出了定义,但实际上并未完全解决 n 阶行列式的计算问题。因为根据递归定义, n 阶行列式的计算归结为计算 n 个 $n-1$ 阶行列式,从而也归结为计算 $n(n-1)$ 个 $n-2$ 阶行列式,……这样,最后归结为计算 $n!$ 项之和,而每一项是 n 个元素之积。这对于高阶行列式即使使用电子计算机,处理起来也很难。因此需要研究如何设法简化高阶行列式的计算。

由例 1.1.4,例 1.1.5 自然产生如下想法:

(1)第 1 行的零元素越多,则计算越简单,能否作一种变换,使第一行增加尽量多的零元素而行列式的值不变?

(2)如果其它行(列)有较多的零元素,能否按其它行(列)展开这个行列式?

(3)下三角行列式的计算结果特别简单,能否作一种变换,将行列式化为下三角行列式

而其值不变?

为此,须研究 n 阶行列式的性质。

为了便于讨论,我们引进转置行列式的概念。交换行列式 D 的行与列所得到的行列式,称为 D 的转置行列式,记作 D^T 。

$$\text{设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 则 } D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

下面我们不加证明地给出行列式的如下重要性质,这些性质对二、三阶行列式十分容易由定义验证,对 n 阶行列式需用数学归纳法证明,这里从略。

性质 1 行列式转置后的值不变

$$\text{即 } D = D^T$$

性质 2 交换行列式两行(列),行列式的值变号。

性质 3 行列式中如有两行(列)的元素相同,则行列式的值为零。

此性质可由性质 2 直接推出。

性质 4 若行列式中某行(列)的元素有公因子 k ,则 k 可提到行列式符号外面。也就是说,把行列式某行(列)所有元素乘以某数 k ,等于用 k 乘该行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 行列式中如有一行(列)的元素全为零,则行列式的值为零。

此性质可由性质 4 直接推出。

性质 6 行列式中如有两行(列)的对应元素成比例,则行列式的值为零。

此性质可由性质 4 与性质 3 推出。

性质 7 如果行列式的某一行(列)的元素是二项式,则这个行列式等于两个行列式之和,这两个行列式分别用二项式中一项作为相应行(列)的元素,其余各行(列)都与原行列式相同。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 8 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以 k 再加入到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变。

此性质可由性质 7 和性质 3 联合推出。

为今后表述方便,我们约定,用 kR_i 表示用数 k 乘第 i 行的各元素;用 $R_i + kR_j$ 表示第 i 行的每一个元素加上第 j 行相对应元素的 k 倍,且把 $R_i + (-k)R_j$ 写成 $R_i - kR_j$;用 R_{ij} 表示把第 i 行与第 j 行对调。类似地,对列作出关于 $kC_i, C_i + kC_j, C_i - kC_j, C_{ij}$ 的涵义约定。

行列式的上述性质,特别是性质 8(也称**等值变换性质**)对简化行列式的计算有很大作用。例如,例 1.1.4 的计算可简化如下:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_2-2C_1 \\ C_3+C_1}]{C_4-2C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

变成只需计算一个三阶行列式了。(注:一次作数个变换时,按由上而下的顺序进行)。

也可以反复利用性质 8,将例 1.1.4 的行列式化为一个等值的下三角行列式计算其值:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3+C_1 \\ C_4-2C_1}]{C_2-2C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_4-2C_2 \\ C_3+5C_2}]{C_{23}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 21 & -7 \\ 3 & 4 & 15 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_4+3C_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

实际上,根据性质 6,由最后第二式已可断定行列式的值为零。(因第 3 列与第 4 列对应元素成比例)

例 1.1.6 计算 n 阶范德蒙 (Vander monde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } V_n &= \frac{R_n - a_1 R_{n-1}}{R_{n-1} - a_1 R_{n-2}} \cdots \frac{R_2 - a_1 R_1}{R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) V_{n-1} \end{aligned}$$

上式右边的 V_{n-1} 是一个 $n-1$ 阶的范德蒙行列式, 重复上述计算, 可得

$$\begin{aligned} V_n &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdots (a_n - a_2) \cdots V_{n-2} \\ &= \cdots \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdots (a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-2}) \cdots V_2 \\ &= (a_2 - a_1) \cdots (a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_{n-2}) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

这儿 i, j 从 1 一直变到 n , 但必须保持 $i < j$ 的关系。

利用行列式的性质, 还容易推出行列式依任意一行或任意一列展开的法则, 即我们有

定理 1 行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行或任意一列的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

$$\begin{aligned} \text{或 } D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

证明: 只要证明了公式 (1.1.9), 列公式 (1.1.10) 即可由性质 1 得到。

因为 $i=1$ 时, (1.1.9) 式即 n 阶行列式的定义, 因此只需证明 $i>1$ 的情形。

把 D 中的第 i 行依次与它的上一行交换位置直至调到第 1 行, 而其余各行位置不变, 这样, 由性质 2 可得

$$D = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再按定义展开等式右端的行列式, 即有

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{1+j} M_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \end{aligned}$$

此定理也称**行列式展开定理**。利用这个定理及行列式性质 8, 便可大大简化行列式的计算。我们可以先挑出行列式中零元素最多的行(列), 再利用性质 8 进一步增加该行(列)