

大學叢書

理論力學綱要

孟 特 爾 著
嚴濟慈 李曉舫 譯

商務印書館發行

大學叢書

理論力學綱要

著 爾 特 孟
譯 慈 濟 嚴
舫 曉 李

中華教育文化基金會董事會
編譯委員會編輯

商務印書館發行

序 言

算學之系統首爲計算之科學，植基於數之概念，而其他之概念屬之。其次加入空間之概念，而有幾何學。集點成線，集線成面，至於點線之運動與時間之關係，則未嘗討論。若更加入時間之概念，便得一較繁之科學，即所謂動學是。故動學乃討論運動之幾何學的性質與時間之關係，至於運動之物理的原因，亦未嘗論也。若並此而論之，即力學之事也。物理現象之根本原因不可知，科學家據果測因，謂使運動發生之原因曰力。故力學之目的在解釋下列之二問題：

- 1° 以某力加於物體上而求其運動，
- 2° 已知物體之運動，而求施於其上之力。

本書據此程序，分爲四篇，即動學，點之動力學，靜力學與固體動力學，更於起始附以有向量之研究，以爲本書之導論焉。

凡 例

1° 本書根據巴黎大學教授孟特爾先生(M. Paul Montel)
理論力學綱要講義(Eléments de Mécanique)編譯而成

2° 本書可供大學數理二系,與工學院學生已習初等微
積分學者之用;或以之自修,或採作教本,皆甚適宜。

3° 本書譯名關於算學者採通用之名詞,關於物理學者
照物理學名詞,期收名詞統一之效。書末更附有法,英,中名詞
索引,俾便檢查。

4° 本書僅爲初學而作,與本書程度相銜接者尙有一卷,
名高等理論力學,以供學者進級研究之用。

5° 編者謹請讀者將本書之缺欠或錯誤之處見示,俾於
再版時更正,幸甚。

目 錄

導言 有向量與有向量之系

1. 有向量	1
2. 有向量之分析的表示法——分有向量	2
3. 幾何和與差	3
4. 有向積	5
5. 無向積	10
6. 有向量對於一點之矩	12
7. 有向量對於一軸之矩	16
8. 有向量之系——總和與合矩	17

第一篇 動學

第一章 通論

9. 動學之目的與其分類	21
〔附〕運動之相將性	22

第二章 點之動學——速度

10. 軌道——運動之方程式	23
11. 速度之向量——速度之代數值	24
12. 平面運動——極坐標	28
13. 面積速度	33

14. 半極坐標或柱坐標	35
15. 空間之極坐標	36
16. 結論	38

第三章 速度圖與加速度

17. 加速度有向量之定義	40
18. 切線加速度與法線加速度	44
19. 平面運動——加速度在極坐標上之分量	46
20. 向心加速度之運動——面積定律	47
21. 柱坐標之加速度的分量	49
22. 運動之舉例	50
I. 圓運動	50
II. 簡諧運動	51
III. 螺旋運動	52

第四章 固體之運動

23. 移動	57
24. 轉動	58
25. 螺旋動	60
26. 固體之基本的運動	61
27. 關於不變線段上諸點之速度的定理	62
28. [附]應用 I 一平面在他一平面上之運動	63
應用 II 固體繞一定點之運動	65

第五章 比較系統之改換

29. 絕對相對與牽連三種軌道.....	66
30. 定理：絕對速度乃相對速度與牽連速度之幾何和.....	67
31. 比較系統之多次改換	69
32. 加速度之組合.....	70
33. 牽連運動乃一移動之情形.....	71
〔附〕普遍情形下之加速度的組合.....	72
34. 運動組合之舉例.....	74
35. 圓片在平面上之運動	79
習題.....	82

第二篇 點之動力學

第一章 通論

36. 固定軸.....	87
37. 動力學之分類.....	87
38. 慣性原理	87
39. 力與質量	88
40. 力之組合的原理.....	88
41. 繫於地球上之軸.....	89
42. 物體之重量	91
43. 力學之基本單位.....	92

第二章 力學之方程式

44. 點之運動方程式.....	94
------------------	----

45. 已知運動時求力	96
46. 運動之本身的方程式	96
47. 力場與力線	97

第三章 功與活力

48. 原功與其性質	101
49. 原功之分析式	102
50. 總功	104
51. 功之單位	108
52. 力函數與位能	109
53. 均勢面	112
54. 定理: 在自一力函數導出之力場上各點, 力與過此 點之均勢面正交	112
55. 定理: 若 $\vec{F}_1$ 之力場從力函數 U_1 所導出, 又 $\vec{F}_2$ 之力 場從力函數 U_2 所導出, 則 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ 之力場從力 函數 $U_1 + U_2$ 所導出	116
56. 活力	117
57. 動能, 位能與總能	119
58. 運動方程式之第一積分	119

第四章 一自由點運動之舉例

59. 恆力場內之運動	124
60. 與距離正比之向心引力	130
61. 阻尼擺動——非週期動	134

62. 爲週期力所擾之擺動.....	138
63. 同步性	142
64. 與距離平方反比之向心力	143

第五章 不自由之質點的平衡與運動

65. 不自由之質點	152
66. 支點之反動力——作用與反作用之原理	152
67. 靜摩擦定律.....	154
68. 動摩擦定律.....	157
69. 重點在斜面上之運動.....	158
70. 重點不受摩擦力在垂直圓周上的運動——擺	161
71. 擺線擺	167
練習題	170

第三篇 靜力學

第一章 平衡之必須的條件

72. 靜力學之目的	179
73. 外力與內力.....	180
74. 平衡之必須條件	180
75. 質點系之劃分	182

第二章 固體之平衡

76. 力系之簡化.....	183
77. 直接相反之力 原理.....	183

78. 基本約法	184
79. 化至三力之約法	184
80. 化至二力之約法	185
81. 定理: 在基本約法下總和與合矩不改變	186
82. 自由固體之平衡 原理	188
83. 三力之系的平衡	190

第三章 施於固體上之相等的力系

84. 相等之系	193
85. 等於一單力之系	194
86. 等於一基本力偶之系	197
87. 化一系至一力與一力偶之約法	198
88. 應用	198

第四章 平行力與重心

89. 平行力系之約法	200
90. 平行力之心	202
91. 對於一平面之矩	206
92. 重心	206
93. 面與線之重心	208
94. 重心之坐標的算法	208
95. 有對稱形之物體	210

第五章 不自由的固體之平衡

96. 有連繫之固體	218
------------	-----

97. 有一定點之固體	219
98. 有一定軸之固體	221
99. 置於一定平面上之固體	224
100. 虛功原理	228
練習題	230

第四篇 系之動力學

第一章 普通方程式

101. 動量	235
102. 動量之射影的定理——重心之運動	238
103. 動量之矩的定理	240
104. 普通方程式之幾何學的解釋	243
105. 活力定理	244

第二章 固體繞軸之運動

106. 動量與活力	247
107. 轉動慣量	247
108. 固體繞定軸之運動	252
109. 複擺	255

第三章 碰撞與打擊

110. 衝量	259
111. 碰撞與打擊	260
112. 對於一質系之碰撞	261

113. 速度改變之決定	264
練習題	267

附 錄

力學之單位

114. 單位之改換——因次式	271
115. 公式之均勻性	273
116. 米噸秒制	274
總練習題	276

名詞索引

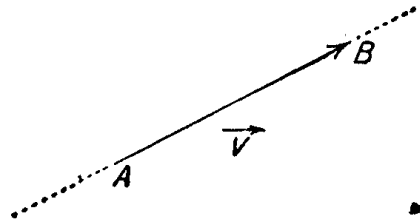
理論力學綱要

導 言

有向量與有向量之系

1. 有向量 於直線上取一段,兩端爲 A, B 二點所限,并在此線上選一進行之方向,自 A 至 B, A 爲原點(origine) B 爲終點(extrémité),此線段稱曰有向量(vecteur)。(圖 1)

故定有向量之元有四:1° 原點 A; 2° 方位(direction)即負此有向量之直線的方位; 3° 方向(sens)即此直線上一動點由 A 至 B 移動之方向; 4° 量即 AB 之距離。



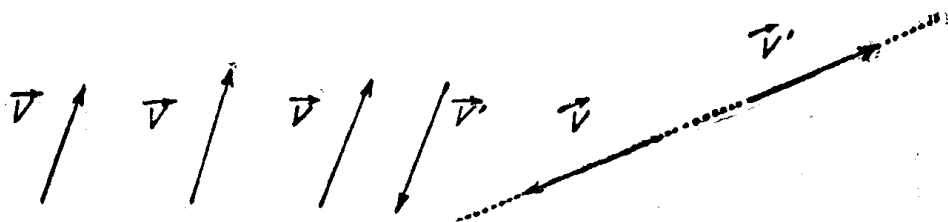
(圖 1)

吾人以 $\vec{V}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ 表有向量,至其量則以 V 或 AB 表之。又 $k\vec{V}$ (k 爲一正數或負數)表示與 $\vec{V}$ 同方位之有向量,而其量爲 $|k|V$ 。若 k 爲正,則方向與 $\vec{V}$ 之方向相同,而其量等於 kV 。若 k 爲負,則其方向與 $\vec{V}$ 之方向相反,而其量爲 $-kV$ 。例如對於 A 點與 AB 對稱之有向量以 $-\vec{V}$ 表之。

若二有向量之差異僅屬原點一項，可以平移 (translation)，而使兩者完全重合，則此二有向量稱為相等 (équipolents)。

若二有向量之差異僅屬原點與方向，則二有向量 $\vec{V}$ 與 $\vec{V}'$ (圖 2) 稱曰相反 (opposés) 在此情形 $\vec{V}'$ 等於 $-\vec{V}$ ， $\vec{V}$ 等於 $-\vec{V}'$ 。

若二有向量相反而同在一直線上，則此二有向量稱為直接相反 (directement opposés)。(圖 2)



(圖 2)

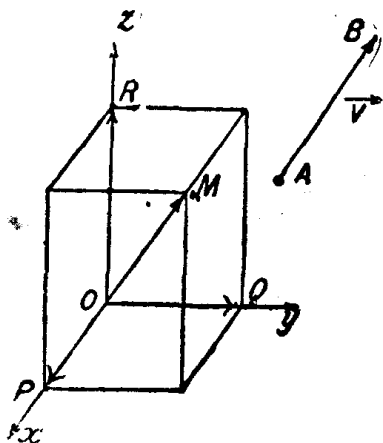
2. 有向量之分析的表示法——分有向量 (composantes)

設 $Oxyz$ 為三坐標軸。有向量 $\vec{V}$ 在 Ox, Oy, Oz 之射影以 X, Y, Z 表之。此三數對於所有之相等的有向量 $\vec{V}$ 皆同。從原點 O 引一有向量 $\vec{OM}$ (圖 3) 與 $\vec{V}$ 相等。作一直六面體，其各棱與坐標軸平行，而 $\vec{OM}$ 為其一對角線。於是有

$$\vec{OP} = X \quad \vec{OQ} = Y \quad \vec{OR} = Z.$$

X, Y, Z 三數乃 M 點之坐標。

本書中，除特別聲明外，皆以坐標



(圖 3)

軸爲正交的,六面體爲正六面體,其底爲矩形,故有

$$\overline{OM}^2 = V^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

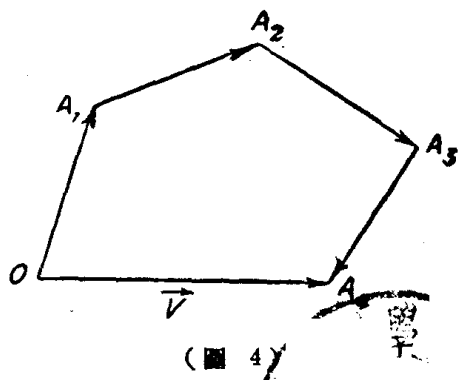
若已知一有向量 $\overrightarrow{AB}$ 之原點 A , 及其在三坐標軸上之射影 (projections), 或分有向量 (composantes) X, Y, Z 時, 則此有向量完全規定。但 A 點可以其三坐標 x, y, z 定之, 故有向量 $\overrightarrow{AB}$ 爲

$$x, y, z; X, Y, Z,$$

六數所規定。

3. 幾何和與差 設有數個有向量 $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4$; (圖

4) 由空間任一點 O 作 $\overrightarrow{OA_1}$ 等於 $\vec{V}_1$, 又 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 等於 $\vec{V}_2$, $\overrightarrow{A_2A_3}$ 等於 $\vec{V}_3$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ 等於 $\vec{V}_4$ 。有向量 $\overrightarrow{OA_4}$ 稱爲 $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4$ 四有向量之幾何和 (somme géométrique)。凡有向量 $\vec{V}$ 等於 $\overrightarrow{OA_4}$ 者皆爲此四有向量之和。



常記爲:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4.$$

設另由他一點 O' 出發, 以同上之法作圖, 最後得一有向量 $\vec{V}'$ 與 $\vec{V}$ 相等, 因第二圖可由第一圖依 OO' 平移而得之也。

設 $\vec{V}$ 之分有向量爲 X, Y, Z , $\vec{V}_1$ 之分有向量爲 X_1, Y_1, Z_1 , $\vec{V}_2$ 之分有向量爲 X_2, Y_2, Z_2 等。使周界 $OA_1A_2A_3A_4$ 封閉之邊

OA_4 投射於三坐標軸上,則有:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = \sum X_i,$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = \sum Y_i,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = \sum Z_i,$$

$\sum X_i$ 符號乃諸數之和之簡寫。

〔定理 I〕 更換諸有向量相加之次序,其幾何和不變。

蓋更換有向量之次序,即更換組成 X, Y, Z , 三和內諸項之次序,此等和數不因此更換而異,故 $\vec{V}$ 不變。

〔定理 II〕 以數有向量之幾何和代此數有向量,而與他有向量相加,則總幾何和不變。

例如以 $\vec{V}_2$ 及 $\vec{V}_4$ 之幾何和代表 $\vec{V}_2$ 與 $\vec{V}_4$, 此幾何和之分有向量為 $(X_2 + X_4), (Y_2 + Y_4), (Z_2 + Z_4)$, 是在組成 X, Y, Z 諸項內以二項之和代二項,總和仍不變,故 $\vec{V}$ 亦不變。

總之幾何和仍遵守算術和或代數和之二定理(交換定理與組合定理)。

注意 I 由圖 2 可見 $\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR}$ 三有向量之幾何和為本面體之對角線 $\vec{OM}$, 故可寫為:

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}$$

或

$$\vec{V} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}$$

反之若已知一有向量 $\vec{OM}$, 由本面體之作法,得分解其為隨 Ox, Oy, Oz , 三方向之三有向量之和。

注意 II 有向量 $\vec{OB}$ 乃 $\vec{OA}$ 及 $\vec{AB}$ 之幾何和, 故 $\vec{AB}$ 之末

端 B 之坐標爲

$$x+X, y+Y, z+Z$$

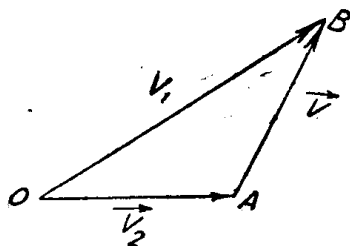
(圖 5)

設二有向量 $\vec{V}_1$ 及 $\vec{V}_2$ 其差 (difference) 爲 $\vec{V}$, 則依定義 $\vec{V}$ 與 $\vec{V}_2$ 之幾何和爲 $\vec{V}_1$. 以式表之:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{V},$$

即

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2.$$



(圖 5)

據圖 5 可見此有向量 $\vec{V}$ 係以第一有向量 $\vec{V}_1$ 之終點爲終點, 第二有向量 $\vec{V}_2$ 之終點爲原點。

設一有向量其原點爲 A (x, y, z), 終點爲 B (x', y', z'), 則此有向量 $\overrightarrow{AB}$ 爲 $\overrightarrow{OB}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 二有向量之差, (O 乃坐標軸之原點) 故 $\overrightarrow{AB}$ 之分有向量爲:

$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z.$$

4. 有向積 (produit vectoriel) 設有二有向量 $\vec{V}_1$ 及 $\vec{V}_2$, $\vec{V}_1$ 被 $\vec{V}_2$ 所乘之有向積爲一有向量 $\vec{V}$, 其定義如下。

由任一點 O' 作 $\overrightarrow{O'A_1}$ 等於 $\vec{V}_1$, $\overrightarrow{O'A_2}$ 等於 $\vec{V}_2$, (圖 6) 所求之積 $\vec{V}$ 之量爲一數, 等於以 $O'A_1$ 與 $O'A_2$ 爲二邊所作之平行四邊形之面積; 其位置係垂直於 $A_1 O' A_2$ 平面; 至其方向之規定如下: 對於足立在 O' , 頭在 A 點之觀察者 $\overrightarrow{O'A_1}$ 掃過平行四邊形而至 $\overrightarrow{O'A_2}$ 之一轉動, 應與下列之轉動同向, 即對同一觀察者, 足立在 O, 頭在 z, Ox 轉過小於 180° 之角而至 Oy。