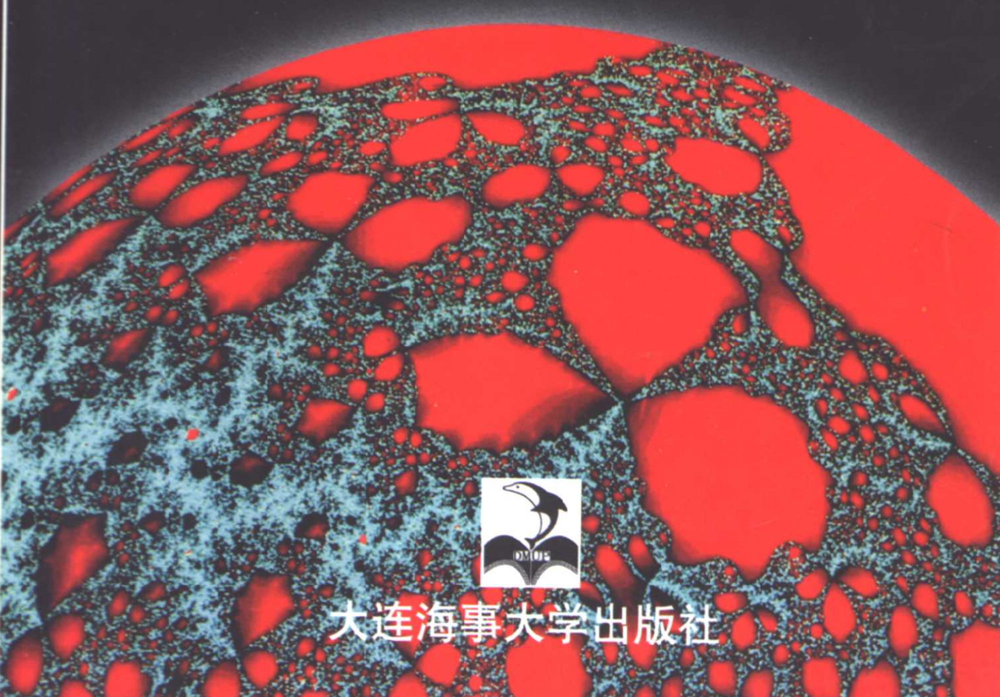
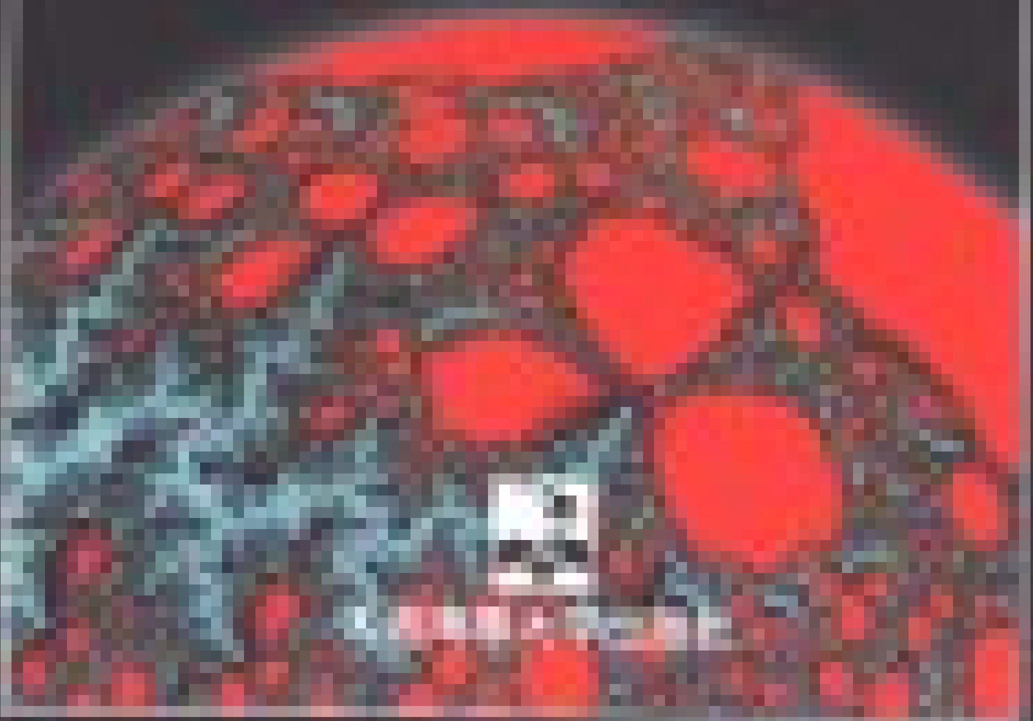
实用分形图形学

刘 丹 编著



大连海事大学出版社

实用分形图形学



实用分形图形学

刘　丹　编著

大连海事大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用分形图形学/刘丹编著 .—大连:大连海事大学出版社,2000.12

ISBN 7-5632-1451-8

Ⅰ.实… Ⅱ.刘… Ⅲ.分形学 Ⅳ.O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 82659 号

大连海事大学出版社出版

(大连市凌水桥 邮政编码 116026 电话 4728394 传真 4727996)

(http://www.dmupress.com E-mail:cbs@dmupress.com)

大连海事大学印刷厂印装 大连海事大学出版社发行

2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月第 1 次印刷

开本:850 mm×1168 mm 1/32 印张:6.875

字数:172 千 印数:001~500 册

责任编辑:林晓阳 史洪源 封面设计:王 艳

定价:15.00 元

内 容 提 要

本书从非线性数学与信息科学相结合的角度系统地介绍了确定性分形理论，并在此基础上进一步分析了随机分形理论，介绍并探讨了分形几何在计算机图形学及图像处理中的应用。全书主要包括以下内容：分形与分形维数，分形维数的计算方法，迭代函数系统与动力系统，分形数值方法，复动力系统，随机分形，分形与图形、图像等。

本书力求向读者展示分形领域的最新研究成果及其应用，具有较高的实用价值。本书可作为大学师生以及科技工作者系统学习分形理论的教材和参考书。

前　言

自 1975 年以来,随着美国著名科学家 B. B. Mandelbrot 的几本分形专著的先后出版,分形几何学作为一门独立的学科正式诞生了。分形几何学不仅被看成是数学史上的一次重大变革,而且与耗散理论和混沌理论一起被称为 20 世纪 70 年代中期科学上的三大重要发现。近 30 年来,分形理论和应用的研究受到日益广泛的重视,国内外相继出版了一些有关分形科学的专著和译著。作为一种描述自然界的几何语言,分形与计算机科学相结合是极其自然和具有很大发展前途的。作者希望在这个领域从事研究和学习的本科生、研究生及科技人员都能从本书中获得帮助,同时进一步扩大分形理论的影响,从而使越来越多的人了解分形,研究分形,发展分形理论。

全书共分八章:

第一章是本书的基础理论部分,作者将本书涉及到的数学知识都集中在这里,便于读者进一步深入阅读。

第二章介绍了分形的概念和分形维数的著名定义,言简意赅,脉络清楚。

第三章讲述了分维的计算方法,除了变尺度方法、Sandbox 方法、密度相关函数方法等基本方法外,还详细介绍了分形曲线、曲面和时间序列的分维的计算方法。

第四章和第五章阐述了迭代函数系统、分形空间和分形插值函数以及生成植物图像和分形曲线的统一理论基础——L 系统。

第六章讲的是 Julia 集和 Mandelbrot 集的图形化等,最后还介绍了分形研究领域方兴未艾的实方程的 Newton 方法。

第七章和第八章分别讲述了随机分形和分形与图形、图像处理，其中许多结论是作者的研究成果。

本书的特点是：

1.与国内外同类书相比，本书将写作重点放在分形理论及其本身的图形化上，注重启迪思维。

2.本书理论分析和论证严谨，尽量减少纯数学的推演，可以作为有兴趣的读者在这一领域和相关领域从事研究的起点。

3.本书参考了国内外最新科研成果和优秀专著，自成体系，容易阅读。

本书的编著和出版，得到了大连海事大学研究生部的资助，以及金一丞教授、贾传荧教授、刘巍教授支持、推荐和关心，作者谨向他们表示衷心的感谢。

本书是作者在为大连海事大学研究生开设的选修课讲稿的基础上整理而成的。由于作者水平有限，本书难免有一些差错和不妥之处，敬请读者批评指正。

刘　丹

2000年12月于大连

目　录

第一章　数学基础(预备知识)

第一节　集合论基础

集合是指具有某种共同特性的元素的全体(常用大写字母表示)。经常出现的集合用特殊的符号来表示:空集,即不包括任何元素的集合,记为 $\varnothing$,$\mathbf{R}$ 表示实数集,$\mathbf{R}^2$ 表示二维实平面,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间;$\mathbf{Z}$ 表示整数集;$\mathbf{Q}$ 表示有理数集。用上标“+”表示集合中的正元素:$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集,$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集,$\mathbf{C}(a+bi, a,b\in\mathbf{R})$表示复数集,$\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$表示超复平面。用形式$\{x$:条件$\}$表示满足“条件”的 x 构成的集合,如中心在点 x、半径为 r 的闭球定义为:$B_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n:|y-x|\leqslant r\}$,类似地,对应的开球定义为 $B_r^o(x)=\{y\in\mathbf{R}^n:|y-x|<r\}$。易见闭球包含作为边界的球面,而开球则不包含球面,如 $\mathbf{R}^2$ 中的一个球为一个圆盘,而 $\mathbf{R}$ 中的一个球则为一个区间。$\mathbf{R}^n$ 中的一个中心在 x、边长为 $2r$ 的超立方体为

$$V=\{y\in\mathbf{R}^n:|y_i-x_i|\leqslant r, i=1,2,\cdots,n\}$$

式中:$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,$\mathbf{R}^n$ 上的距离或度量为通常的欧几里德距离,即 $d_E(x,y)=|y-x|=\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$。$\mathbf{R}$ 中的超立方体为一个区间,$\mathbf{R}^2$ 中的超立方体为一个正方形区域。

如果 x 是集合 A 的元素,则称 x 属于 A,记 $x\in A$。

如果 x 不是集合 A 的元素，则称 x 不属于 A，记 $x \notin A$。

如果 B 是由 A 的部分元素组成的集合，则称 B 为 A 的一个子集，记 $B \subset A$。规定 $\varnothing$ 是任何一个集合的子集。给定两个集合 A, B，如果 $A \subset B$ 并且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记 $A = B$。

在实直线 $\mathbf{R}$ 中，常见的子集为区间，有以下形式：如果 $\alpha < \beta$，记开区间为 $(\alpha, \beta) = \{x : \alpha < x < \beta\}$，半开半闭区间为 $(\alpha, \beta] = \{x : \alpha < x \leqslant \beta\}$，半闭半开区间为 $[\alpha, \beta) = \{x : \alpha \leqslant x < \beta\}$，$\alpha, \beta$ 可为实数(当取 $+\infty$ 时，$\leqslant$ 理解为 $<$)。

给定一个基本集 X，X 的全体子集组成的集合为 2^X，称 2^X 为 X 的子集族。在 2^X 中定义运算如下：设 A, B 为基本集 X 的任意两个子集，定义：

并集 $A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$；

交集 $A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$；

差集 $A - (\setminus) B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$；

乘积集 $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$，如 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$；

对称差集 $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$。

特别地，若 $A \cap B = \varnothing$，则 A 与 B 的并集称为 A 与 B 的和集，记 $A \cup B = A + B$；

称差集 $X \setminus A$ 为 A 的余集，记为

$$A^c = X \setminus A$$

一般地，给定一个指标集 I 及 X 的一个子集类 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$。

定义

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{存在某个 } \alpha \in I, \text{使 } x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{对所有 } \alpha \in I, \text{使 } x \in A_\alpha\}$$

并、交、余运算性质：

(1) 幂等性：$A \cup A = A$，$A \cap A = A$。

(2) 空集为加法零元：$A \cup \varnothing = A$。

(3) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$。

(4) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

(5) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$。

(6) 单调律：如 $A\subset B$，则对 $\forall C, A\cup C\subset B\cup C, A\cap C\subset B\cap C$。

(7) $A\subset B$，则 $A-B=\varnothing$。

(8) 余分配律：$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$。

(9) $(C-A)-B=C-(A\cup B)$。

(10) 德·摩根律：设 S 为任意一集，$\{A_n, n\in N\}$ 为 S 的一个集族，则 $S-\bigcup\limits_{n\in N}A_n=\bigcap\limits_{n\in N}(S-A_n), S-\bigcap\limits_{n\in N}A_n=\bigcup\limits_{n\in N}(S-A_n)$。

证明：记 $S-\bigcup\limits_{n\in N}A_n=P$，$\bigcap\limits_{n\in N}(S-A_n)$ 为 Q，只证 $P=Q$。设 $x\in P$，由定义 $x\in S$，且 $x\notin\bigcup\limits_{n\in N}A_n$，对每一个 $n\in N$，$x\notin A_n$，故 $x\in S-A_n$，即 $x\in Q$，故 $P\subset Q$；反之，$x\in Q$，对 $\forall n$，有 $x\in S-A_n$，即 $x\in S$，且 $x\notin A_n$，所以，$x\notin\bigcup\limits_{n\in N}A_n$，$x\in S-\bigcup\limits_{n\in N}A_n=P$，$Q\subset P$，$P=Q$。

设 $x_0\in X$，r 为一个正数，一个中心在 x_0、半径为 r 的开球定义为

$$B_r(x_0)=\{x: x\in X, d(x,x_0)<r\}$$

开球 $B_r(x_0)$ 也称为 x_0 的一个邻域。

在实直线 **R** 上，开球 $B_r(x_0)$ 是一个区间 (x_0-r, x_0+r)。设 $\{x_n, n=1,2,\cdots\}$ 为 (X,d) 的一个点序列，$x\in X$，若对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得对所有 $n>N$，有 $x_n\in B_\varepsilon(x)$，即 $d(x_n,x)<\varepsilon$，则称序列 $\{x_n, n=1,2,\cdots\}$ 收敛于 x，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，或 $x_n\to x(n\to\infty)$，此时称 $\{x_n, n=1,2,\cdots\}$ 为收敛点列，x 为序列 $\{x_n, n=1,2,\cdots\}$ 的极限。

可以证明:收敛点列的极限是惟一的。

度量 $d(x,y)$ 是变量 x,y 的连续函数,即:若 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$,则 $d(x_n,y_n) \to d(x_0,y_0)$。

事实上,由三角不等式可知:

$$d(x_n,y_n) \leqslant d(x_n,x_0)+d(x_0,y_0)+d(y_0,y_n)$$

$$d(x_0,y_0) \leqslant d(x_0,x_n)+d(x_n,y_n)+d(y_n,y_0)$$

所以

$$|d(x_n,y_n)-d(x_0,y_0)| \leqslant d(x_n,x_0)+d(y_n,y_0), n \to \infty$$

设 A 为度量空间 (X,d) 的一个点集,$x_0 \in A$,若存在 $\varepsilon>0$,使得开球 $B_\varepsilon(x_0) \subset A$,则称 x_0 为 A 的一个内点,记 $\mathrm{Int}A$ 为 A 的所有内点的集合,则称 $\mathrm{Int}A$ 为 A 的内部。例如:在 $\mathbf{R}$ 上取 $[a,b]$,则 $\mathrm{Int}A=(a,b)$。

定义 1-1:点集 A 称为开集,若 A 中的每一个点都是 A 的内点,即 $\mathrm{Int}A=A$,规定空集为开集。

令 υ 为度量空间 (X,d) 所有开集的全体,则 υ 可以构成 X 上的一个拓扑,即 υ 满足拓扑公理:

(1)$\varnothing, X \in \upsilon$;

(2)若 $A_n \in \upsilon, n \in Z^+$,则 $\bigcup\limits_{n \in Z^+} A_n \in \upsilon$;

(3)若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \upsilon$,则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \upsilon$。

度量空间 (X,d) 为拓扑空间,其中拓扑结构 υ 是由度量 d 生成的,实直线 $\mathbf{R}$ 上的非空开集 A 可以表示成有限个或可数个互不相交开区间的并。这些互不相交的开区间称为开集 A 的构成区间。以后将要看到,实直线 $\mathbf{R}$ 上的开集为 Borel 集。

设 A 为度量空间 (X,d) 的一个点集,$x_0 \in X$,若对 $\forall \varepsilon>0$ 有 $A \cap (B_\varepsilon(x_0)-\{x_0\}) \neq \varnothing$,则称 x_0 为点集 A 的极限点。记 A' 为 A 的全体极限点所组成的点集,称 A' 为 A 的导集,记 $\overline{A}=$

$A\cup A'$，称 $\overline{A}$ 为 A 的闭包，A 的边界为 $\partial A=\overline{A}\setminus \mathrm{Int}(A)$。

定义 A 为闭集，若 $A'\subset A$。直观地，若一个集合包含它的边界便为闭的。

定义 A 为自密集，若 $A\subset A'$。

定义 A 为完全集，若 $A=A'$。

定义 A 为孤立点集，若 $A\cap A'=\varnothing$。

例 1-1：在 $\mathbf{R}$ 中，取 $A=(a,b)$，则 $A'=[a,b]=(A')'$，开区间为自密集，闭区间为闭集，是完全集。特别地，$\mathbf{R}$ 也是完全集。

闭集具有下列性质：

(1) A 是闭集$\Leftrightarrow A^c=X-A$ 是开集；

(2) A 是闭集$\Leftrightarrow \overline{A}=A$；

(3) A 是闭集$\Leftrightarrow A$ 中任何一个收敛点列必收敛于 A 中一点；

(4) 任意点集 A 的导集 A' 与闭包 $\overline{A}$ 是闭集；

(5) 闭集减去开集的差集是闭集。

例 1-2：以闭区间$[0,1]$的实线段开始，去掉中间$\frac{1}{3}$区间长度的部分$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，留下闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$，对每一个闭区间再重复上述过程，即总是去掉留下的部分的中间$\frac{1}{3}$部分，重复该过程以至无穷，留下的点将如图 1-1 所示，最终的离散点集就是一个典型的三分 Cantor 集。三分 Cantor 集为完全集。

令 $O=\bigcup\limits_{n,k} I_k^{(n)}$，则 O 为开集，所以 $F=[0,1]-O$ 为闭集。F 的余集 $F^c=\mathbf{R}-F$ 是全体开区间 $I_k^{(n)}$，$k=1,2,\cdots,2^{(n-1)}$，$n=1,2,\cdots$，以及$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$。它们任何两个之间没有公共端点，所以，F 是完全集。

设 A，B 为度量空间(X,d)的两个点集，若 $B\subset\overline{A}$，则称 A 在 B 中稠密，即对于集 B 的每一点都有集 A 中的点与其任意接近。

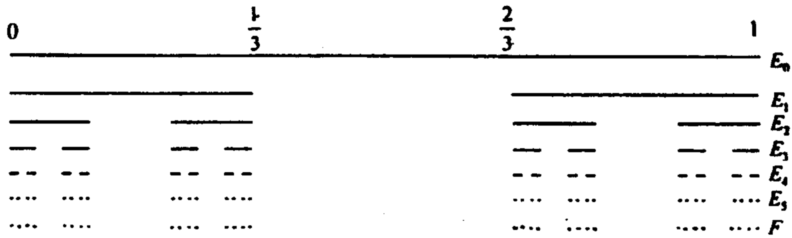


图 1-1　Cantor 集

特别地,如 $\overline{A}=X$,则称 A 为 X 的稠密集。

利用闭包的性质可以得出,A 为稠密集$\Leftrightarrow$对 $\forall x\in X$,都存在 A 中的点列$\{x_n\}$,使得 $x_n\to x(n\to\infty)$。

例 1-3:在 $\mathbf{R}$ 中,全体有理数集 $\mathbf{Q}$ 为 $\mathbf{R}$ 的稠密集。

稠密集的概念在非线性理论中有这样的应用:当考虑点集 F 是不是具有某些性质时,可以先对 F 中的稠密子集加以考虑,然后利用极限过程推出关于 F 的相应结论。

与稠密集相对的概念是疏朗集或称稀疏集。设 $S\subset X$,若 S 在每个非空的开集中都不稠密,则称 S 为疏朗集,疏朗集 S 是在 X 中无处稠密集。显然,单元集是$(\mathbf{R}^n,d_E)$中的疏朗集。可以证明,如果闭集不含有任何开区间,则它是一个疏朗集。利用这个结论可得三分 Cantor 集为疏朗集。

设(X,d)是度量空间,$\{x_n\}$为 X 的点集,称$\{x_n\}$为 Cauchy 序列,如果对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists$ 正整数 N,使得当 $n,m>N$ 时,$d(x_n,x_m)<\varepsilon$。

在度量空间中,收敛点列必是 Cauchy 序列;反之不然,例如,在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中,定义度量 $d(r_1,r_2)=|r_1-r_2|$,则$(\mathbf{Q},d)$是度量空间,它是实直线$(\mathbf{R},d)$的一个子空间。序列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$是 $\mathbf{Q}$ 的一个 Cauchy 序列,但是在 $\mathbf{Q}$ 中不收敛,因为它的极限 e 不是有理数。

若 X 的每一个 Cauchy 序列都是 X 的收敛点列，则称度量空间(X,d)为完备空间。

具有欧氏距离的度量空间是完备空间。特别地，实直线 $\mathbf{R}$ 是完备空间，在 $\mathbf{R}$ 中有一个重要性质：

区间套定理：设 $S_n=[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$ 满足$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$，如果度量 $|b_n-a_n|\to 0(n\to\infty)$，则存在惟一点 x，使得 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$。

在完备空间(X,d)中成立闭球套定理：

设 $S_n=B(x_n,\varepsilon_n)$，$n=1,2,\cdots$是一个闭球序列，满足 $S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots$，如果 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$，则必有惟一点 $x\in\bigcap\limits_{n=1} S_n$。

设 A 是度量空间(X,d)的一个点集，若 A 中的任何点列都有在 X 中的收敛的子序列，则称 A 为致密集。

在实直线上成立 Wierstrass 定理：

任意一个有界点列必有收敛子列，即实直线上任意一个有界集必是致密集。

一般地，在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的有界性和致密性是一致的。为了得出这一结论，需要完全有界集的概念。

称点集 A 为完全有界集，若对任意正数 ε，总有有限的 $\varepsilon-$网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，使以 x_k 为中心的开球 $O(x_k,\varepsilon)$的全体覆盖 A：

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}O(x_k,\varepsilon)$$

完全有界集是有界集。

事实上，取 $\varepsilon=1$，设$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为 A 的 $1-$网，则

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}O(x_k,1)$$

从而，对每个 $x\in A$，必有 x_k，使得 $d(x,x_k)<1$，进而

$$d(x,x_1)\leqslant 1+\max_{1\leqslant k\leqslant n}d(x_1,x_k)$$

所以 A 为有界集。

Hausdorff 证明了下面的结论：

(1) 度量空间(X,d)中的致密集必是完全有界集；

(2) 在完备度量空间中，完全有界集是致密集。

度量空间中的致密闭集也称紧集，特别地，致密度量空间称为紧空间。

点集 A 为紧集$\Leftrightarrow A$ 中任意一个点列必有收敛的子点列收敛于 A 中一点。

在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，A 是紧集$\Leftrightarrow A$ 是有界闭集。

设 A 是度量空间(X,d)的一个点集。f 为 X 的一族开集，如果 $A\subset\bigcup\limits_{f\in F}f$，则称 f 为 A 的一个开覆盖。

紧集的特性：A 是紧集$\Leftrightarrow A$ 的任意开覆盖都有有限个子覆盖。

在数学上，紧性是一个非常有用的性质，它能使满足一定条件的无穷多集合归并为有限多个。

任意紧集类的交集为紧的，可以证明，若 $A_1\supset A_2\supset\cdots$ 为一个不增的紧序列，则交集 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为非空的。同时，如果对于某个开集 V，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 包含于 V 中，则存在某个 k，使有限交集$\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i$ 也包含于 V 中。

$\mathbf{R}^n$ 的子集A 称为连通的，如果不存在两个开集 U 与 V，使得 $U\cup V$ 包含A，而 $A\cap U$ 与 $A\cap V$ 非空且不相交，则认为它是连通的。直观地，即集 A 只由一“整块”组成，包含点 x 的最大连通集称为点x 的连通部分，集 A 称为全不连通的，假如它的每一点的连通部分仅含这一点。对于集 A 中的任意两点 x 与 y，如果存在不相交的开集 U 与 V，使得 $x\in U$，$y\in V$，且 $A\subset U\cup V$，则集 A 当然是全不连通的。