

高等學校教學用書

起重運輸機的電氣設備

上 冊

Ю. А. РЕЙНГОЛЫДТ 著
清華大學電工教研組譯

高等教育出版社

高等學校教學用書



起重運輸機的電氣設備

上 冊

IO. A.
清華大學

江苏工业学院图书馆
藏书章

高等教育出版社

本書係根據蘇聯內河運輸部出版社 (Издательство министерства речного флота СССР) 出版的列依高爾特 (Ю. А. Рейнгольдт) 所著“起重運輸機的電氣設備” (Электрическое оборудование подъемно-транспортных машин) 1946 年版譯出。原書經蘇聯內河運輸部教育司批准為內河運輸高等技術學校機械系教科書。

本書中譯本分上下兩冊出版：上冊內容為拖動力學、電動機和電機的控制與保護設備。拖動力學一章介紹了基本運動方程式及起動與掣動情形；電動機一章介紹了起重用各種電動機的性能和工作情況及功率的選擇等；電動機的控制和保護設備一章介紹了各種控制和保護設備，其中有各種接觸器、開關和繼電器等。下冊內容為各種起重機、提昇機、架空自動搬運車等的電氣設備元件及控制電路。

參加本書翻譯和校對工作的有清華大學電工學教研組宗孔德、楊福生、陸瑤海、康書香、周以直、童以強、周禮果、王繼中等同志。

起重運輸機的電氣設備

上 冊

書號103(課104)

列 依 高 爾 特 著

清 華 大 學 電 工 教 研 組 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北 京 琉 璃 廠 一 七 〇 號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新 華 書 店 上 海 發 行 所 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上 海 天 通 巷 路 一 七 〇 號

開本787×1092 1/25 印張7 10.5/12.5 字數 149,000

一九五四年十月上海第一版

印數 1—3,000

一九五四年十月上海第一次印刷

定價 羊 11,300

序

本書是為水路運輸工程學院機械系學生用的起重運輸機械電氣設備課程的教本而作。

由於上述該系學生只學過簡單的普通電工學，因此作者認為有必要將書中的敘述與結論儘量簡化，以求讀者易於完全接受。

課程分為兩部分——一般部分與專業部分。在一般部分中（第一、二、三章）介紹學習電力拖動時所必需的理論力學上的基本關係式，敘述電力拖動的原理，並且研究電動機的控制與保護設備。其餘各章是專業部分，研究拖動起重運輸機械所用電動機的電氣設備和控制線路。

實際工作經驗證明在電氣設備的領域內，機械工程師最感困難的是認識控制線路圖，因此在專業部分中我們將分析很多例題來對這些問題作特別詳盡的研究。

上 册 目 錄

序

第一章 拖動力學	1
§ 1. 基本運動方程式	1
§ 2. 功及功率	3
§ 3. 剩餘起動力矩與掣動力矩	5
第二章 電動機	16
概述	16
§ 4. 電動機的轉矩	17
§ 5. 電機的工作情況	18
§ 6. 電動機的損耗	22
§ 7. 電機的發熱	24
§ 8. 如何決定電動機的功率	32
§ 9. 電動機的構造	41
分激電動機	44
§ 10. 機械特性	44
§ 11. 轉速的調節	48
§ 12. 起動	54
§ 13. 掣動	57
§ 14. 反轉	65
串激電動機	66
§ 15. 機械特性	66
§ 16. 轉速的調節	69
§ 17. 起動	71
§ 18. 掣動與反轉	73
§ 19. 串激電動機在人爲連接情況下的工作	77
複激電動機	85
§ 20. 機械特性	85
§ 21. 轉速的調節	87
§ 22. 起動、掣動及反轉	87

感應電動機	88
§ 23. 轉矩	88
§ 24. 轉速的調節	92
§ 25. 起動	98
§ 26. 掣動與反轉	106
§ 27. 功率因數	111
總結	114
§ 28. 電動機的比較	114
第三章 電動機的控制與保護設備	117
非自動電器	118
§ 29. 刀型開關與雙投開關	118
§ 30. 用於鼠籠式感應電動機上的手動控制電器	119
§ 31. 控制器	121
接觸器	129
§ 32. 直流接觸器	130
§ 33. 交流接觸器	131
主控設備	134
§ 34. 主控控制器	134
§ 35. 限位轉換開關	136
控制繼電器	139
§ 36. 時限繼電器	139
§ 37. 電壓繼電器	142
§ 38. 電流繼電器	143
電動機的過載保護設備	144
§ 39. 保險絲具的保護設備	146
§ 40. 用電磁繼電器保護電動機	148
§ 41. 熱繼電器保護	151
§ 42. 自動開關	153
成套設備	156
§ 43. 起動變阻器與調節變阻器	156
§ 44. 電磁起動器	169
§ 45. 高壓電動機的控制設備	176
名詞對照表	183

起重運輸機的電氣設備

第一章 拖動力學

當電動機拖動任何一個機構時，它所作的功是用來克服這個機構的阻力的。電動機的工作情況和負載大小都由這個阻力的大小與性質決定。

本章研究一些確定電動機負載及其工作情況對時間的關係的基本量，和這些量之間的相互關係。這一類量有：力、旋轉力矩、功率、功、速度等。這些量和他們的相互關係在理論力學的相當章節中都已詳加論述，此處只簡述其中在選擇電力拖動時所必需的部份。

§ 1. 基本運動方程式

在理論力學課程中，大家早已熟知，任何物體都受力系統的作用，由於這種作用，物體可能處於靜止狀態，也可能處於運動狀態。

選擇電動機時，可能遇到機構作旋轉運動的情況，以可能遇到機構作直進運動的情況。因此我們在下面對這兩種運動形式都加以研究。

(a) 直進運動 當物體沿直線作前進運動時，作用在其上的各力之間總存在着平衡關係，因而可用下式表示：

$$F_m = F_s + m \frac{dv}{dt} \text{ 仟克,} \quad (1)$$

式中： F_m —拖動力，單位為仟克；

F_s —靜阻力，單位為仟克；

m —物體質量，單位為仟克·秒²·米⁻¹；

v —運動速度，單位為米·秒⁻¹；

t —時間,單位為秒;

$m \frac{dv}{dt} = F_d$ —動阻力,單位為仟克。

由此式可知:如拖動力大於靜阻力,則動阻力為正($\frac{dv}{dt} > 0$),也就是產生加速運動。此時拖動力超過靜阻力的剩餘量稱為剩餘力 $F_B = F_m - F_s$ 。物體因剩餘力作功而加速。運動系統動能的蓄積就是剩餘力作功的結果。如果在一段運動途徑 S 內,物體速度由 0 增至 v ,則動能儲存量由下式決定:

$$A_d = \int_0^S \left(m \frac{dv}{dt} \right) dS = m \int_0^S \frac{dS}{dt} dv = m \int_0^v v dv = \frac{mv^2}{2} \text{ 仟克米。}$$

只要運動速度不斷增加,運動物體或運動物體系統的動能蓄積就要繼續,直到 $\frac{dv}{dt}$ 等於 0 時才會終止。物體加速時,其動能蓄積必將隨之而增加。

如果 $F_m = F_s$, 即,如拖動力等於靜阻力,則 $\frac{dv}{dt} = 0$, 也就是產生等速運動。

如果 $F_m < F_s$, 則 $\frac{dv}{dt} < 0$, 這就是減速運動,只要系統儲存動能尚未耗盡,或 F_m 不再增加,減速運動就將繼續進行。

當 $F_m = 0$ 時,由於動能儲存而產生的運動(一般稱之為:“因慣性而運動”),經常發生於拖動機構停車的時候。

(6) 旋轉運動 選擇電動機時,遇到的常常不是直進運動而是旋轉運動。在這種運動中,旋轉力矩與阻力矩經常平衡。

正像直進運動一樣,在旋轉運動中電動機產生的拖動轉矩(或扭矩)用來克服機構所產生的阻力矩——包括靜阻力矩與動阻力矩,其間關係如下式所示:

$$M_m = M_s + J \frac{d\omega}{dt} \text{ 仟克米,} \quad (2)$$

式中: M_m —轉矩;

M_s —靜阻力矩;

$J \frac{d\omega}{dt} = M_d$ —動阻力矩;

J —旋轉物體對旋轉軸的轉動慣量。單位為仟克·米·秒²;

$\frac{d\omega}{dt}$ —角加速度,單位為弧度·秒⁻²。

與直進運動[如(a)中所述]類似,當 $M_m > M_s$ 時,角加速度為正。轉矩超過靜阻力矩的剩餘量(稱為剩餘力矩) $M_B = M_m - M_s$ 用來克服動阻力矩 M_d 。旋轉物體動能蓄積就是剩餘力矩作用的結果。如果旋轉了 α 角度後角速度自 0 增至 ω ,則動能儲存可表為:

$$A_d = \int_0^\alpha \left(J \frac{d\omega}{dt} \right) d\alpha = J \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{dt} d\omega = J \int_0^\omega \omega d\omega = J \cdot \frac{\omega^2}{2} \text{ 仟克米。}$$

當物體進入等速旋轉後,動能儲存過程便告終止。

必須記住,如果電動機起動時產生的轉矩只等於其軸上的靜阻力矩,則拖動系統不能啓動,因為沒有剩餘力矩就不可能使系統產生加速度。只有在下述情況下方為例外:動能蓄積可藉助於位能儲存減少而產生,如重物的下降便是一個例子。

當 $M_m = M_s$ 時,運動將以等速進行,因為加速度 $\frac{d\omega}{dt} = 0$ 。

如果 $M_m < M_s$,則角加速度為負,就產生減速旋轉運動。其結果,或是系統運動停止(如果 M_m 與 M_s 都不變),或是系統以較低轉速旋轉(如果速度降低後, M_m 隨而增加)。

§ 2. 功及功率

在等速直線運動中,功等於拖動力和所行路徑的乘積,以下式表之:

$$A = F_m S \text{ 仟克米,}$$

式中 S —路徑,單位是米,

而
$$P = \frac{A}{t} = F_m \frac{S}{t} = F_m v \text{ 仟克米} \cdot \text{秒}^{-1},$$

式中 v —速度,單位是米 $\cdot$ 秒 $^{-1}$ 。

因為實際工作中,功率以仟瓦為單位,而一仟瓦等於 102 仟克米 $\cdot$ 秒 $^{-1}$;所以功率

$$P = \frac{F_m v}{102} \text{ 仟瓦。} \quad (3)$$

同樣,功的單位——一般不用仟克米,而用仟瓦小時,其值由下式決定:

$$A = \frac{F v}{102} t' \text{ 仟瓦} \cdot \text{小時},$$

式中 t' —時間,單位為小時。

在等速旋轉運動中 $\left(\frac{d\omega}{dt}=0\right)$,在路徑 $S=\alpha'r$ 上所作功將為:

$$A = F_m S = F_m r \alpha' = M_m \alpha' \text{ 仟克米} \ominus,$$

式中: r —旋轉半徑,單位為米,

α' —旋轉角度,單位為弧度。

與直進運動類似,旋轉運動的功率:

$$P' = \frac{A}{t} = M_m \frac{\alpha'}{t} = M_m \omega \text{ 仟克米} \cdot \text{秒}^{-1},$$

由此,功率

$$P = \frac{M_m \omega}{102} = \frac{M_m \cdot 2\pi n}{102 \cdot 60} = \frac{M_m n}{975} \text{ 仟瓦}, \quad (4)$$

式中 n —每分轉數。

在計算電動機軸上所需要產生的轉矩時,時常必須考慮轉速與電動機轉速不一致的各機構元件所顯示的阻力矩。在這種情況下,為了求得總阻力矩必須先將這些阻力矩換算至電動機軸上,然後再求其總和。這種換算的根據是:電動機產生的功率應與機構消耗的功率相

⊖ 原書為 KPM^{-1} , 恐係排印錯誤——譯者註。

等。

如果 M_1 —機構軸上所需力矩， n_1 —機構軸每分轉速， n —電動機軸每分轉速，則電動機軸上的轉矩 M 可由下述等式決定：

$$\frac{Mn}{975} = \frac{M_1 n_1}{975 \eta},$$

由此

$$M = \frac{M_1}{\frac{n}{n_1} \eta} = \frac{M_1}{i \eta}, \quad (5)$$

式中： η —傳動效率，

i —傳動比，即主動軸轉數與從動軸轉數之比。

如果假定加速度在起動時期 t_B 內是不變的（這是實際工作中常有的情況），則本章中所談的關係就可以用圖解法表示，圖 1 表示 $\frac{d\omega}{dt}$ ， ω ， M_m 及 P 各量對時間的關係。

§ 3. 剩餘起動力矩與掣動力矩

如上所述，要使旋轉質量得到需要的速度，電動機就必須產生剩餘力矩 $M_B = J \frac{d\omega}{dt}$ 。由於機構的各個部分不但質量不同，而且旋轉角速度也不一樣，因此電動機所必須產生的剩餘力矩應該等於使機構各元件得到加

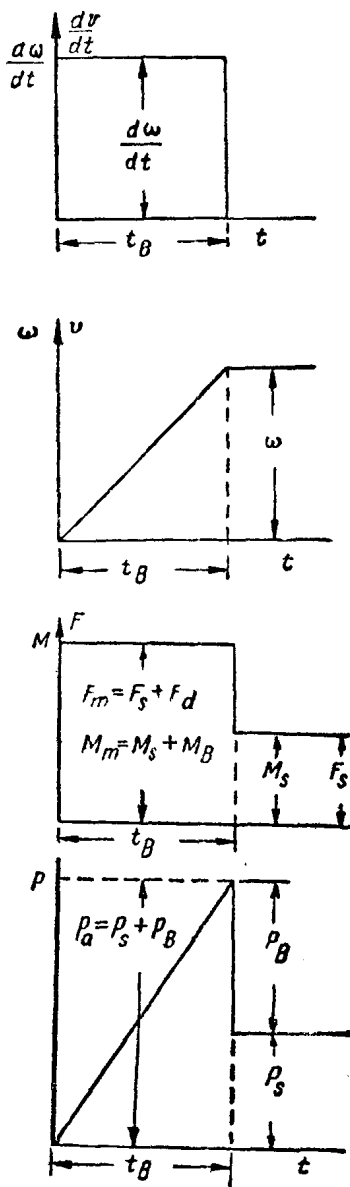


圖 1

速度所必需的諸剩餘力矩歸化至電動機軸上的總和，即：

$$M_B = M_{B_0} + M_{B_1} \frac{1}{i_1 \eta_1} + \cdots + M_{B_n} \frac{1}{i_n \eta_n}, \quad (6)$$

式中： M_B —電動機軸上的總剩餘力矩；

M_{B_0} —使電動機轉子及所有與電動機轉子轉速相同的各部分得到加速度所需要的剩餘力矩；

M_{B_1} —以角速度 ω_1 旋轉的機構元件所需的剩餘力矩；

i_1 —以 ω_1 角速旋轉部分的傳動比 $\left(i = \frac{\omega_0}{\omega_1}, \omega_0 \text{ 爲電動機的旋轉角速度}\right)$ ；

η_1 —自電動機至以 ω_1 角速度旋轉部分的傳動效率；

M_{B_n} —使以 ω_n 角速度旋轉的部分得到加速度所需剩餘力矩；

i_n —元件 n 的傳動比 $\left(i_n = \frac{\omega_0}{\omega_n}\right)$ ；

η_n —自電動機至元件 n 的傳動效率。

根據剩餘力矩 $M_B = J \frac{d\omega}{dt}$ 的關係，則用從前所採用的符號， M_B 可

寫成：

$$M_B = J \frac{d\omega}{dt} = J_0 \frac{d\omega_0}{dt} + J_1 \frac{d\omega_1}{dt} \cdot \frac{1}{\eta_1 i_1} + \cdots + J_n \frac{d\omega_n}{dt} \cdot \frac{1}{\eta_n i_n},$$

式中 $J_0 \cdots J_n$ —傳動系統中各相當元件的旋轉慣量。

在實際計算拖動時，常認加速度爲常數（如果 M_m 與 M_s 不變的話），其值等於速度與起動時間 t_B 之比。因此，上式可以化爲下面的形式：

$$M_B = J_0 \frac{\omega_0}{t_B} + J_1 \frac{\omega_1}{t_B} \frac{1}{\eta_1 i_1} + \cdots + J_n \frac{\omega_n}{t_B} \frac{1}{\eta_n i_n},$$

由此 $M_B = \frac{1}{t_B} \left(J_0 \omega_0 + J_1 \omega_1 \frac{1}{i_1 \eta_1} + \cdots + J_n \omega_n \frac{1}{i_n \eta_n} \right)$ 。

將角速度 ω_0 從等式右邊括出，並令 $\frac{\omega_0}{\omega_1} = i_1 \cdots$ 等，則最後可得：

$$M_B = \frac{\omega_0}{t_B} \left(J_0 + J_1 \frac{1}{i_1^2 \eta_1} + \cdots + J_n \frac{1}{i_n^2 \eta_n} \right). \quad (7)$$

$\frac{J}{i^2} = J_0$ 稱為“等值旋轉慣量”或“歸化至電動機軸的旋轉慣量”。

事實上，從等式

$$\frac{J_0 \omega^2}{2} = \frac{J_1 \omega_1^2}{2}$$

可以得出
$$J_0 = J_1 \frac{\omega_1^2}{\omega^2} = J_1 \frac{1}{i^2},$$

就是說，以角速度 ω 旋轉，而旋轉慣量為 J_0 的物體，和以角速度 ω_1 旋轉，而旋轉慣量為 J_1 的物體，兩者動能的儲藏量相等。

上面推導出的 M_B 表示式只考慮到使機構旋轉部分加速所需的剩餘力矩。

在被拖動的機構中，時常不止有旋轉運動部分，而且有直進運動部分。要使後者加速，電動機也需要產生一定數量的剩餘力矩。這些剩餘力矩作用的結果，使得在加速終了時，運動質量的動能等於 $\frac{mv^2}{2}$ 仟克米。

要計算這種情況下所需要的剩餘力矩，最好先從動能儲存相等的條件出發，把直進運動變為旋轉運動。

如果使質量 m 加速至速度 v 所必需耗費的能量為 $\frac{mv^2}{2}$ ，則由公式

$$\frac{J_0 \omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

可以求得：

$$J_0 = m \frac{v^2}{\omega^2},$$

也就是說，從動力學觀點上看，以角速度 ω （主動軸速度，即電動機速度）旋轉的旋轉質量，相當於以速度 v 做直進運動的質量 m 。由此，使直進運動質量得到加速度所需要的電動機剩餘力矩為：

$$M'_B = J \cdot \frac{\omega}{t_B \eta_m} = m \frac{v^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega}{t_B \eta_m} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{\omega t_B \eta_m} = \frac{G v^2 \cdot 60}{9.81 \cdot 2\pi n t_B \eta_m} = 0.975 \cdot \frac{G v^2}{n t_B \eta_m}, \quad (8)$$

式中：\$G\$—直進運動物體的重量，單位為仟克；

\$\eta_m\$—從電動機軸到直進運動物體的總傳動效率；

\$n\$—主動軸（例如電動機軸）的轉數。

在實際拖動計算中，通常不用旋轉慣量，而用所謂“飛輪質量”\$GD^2\$。飛輪質量等於物體重量與環動直徑平方的乘積。其單位為仟克·米²。旋轉慣量與飛輪質量間的關係是：

$$J = \frac{GD^2}{4g},$$

因為 \$J = m\rho^2\$，\$\rho\$ 為環動半徑，而 \$m = \frac{G}{g}\$。

把公式(7)與(8)中的 \$J\$ 易以 \$\frac{GD^2}{4g}\$，\$\omega\$ 易以 \$\frac{2\pi n}{60}\$ 就能得到剩餘力矩的通用表示式：

$$M_B = \frac{1}{t_B} \left[\frac{n}{375} \left(GD_0^2 + \frac{GD_1^2}{i_1^2 \eta_1} + \dots + \frac{GD_n^2}{i_n^2 \eta_n} \right) + 0.975 \frac{G v^2}{n \eta_m} \right]. \quad (9)$$

當電動機以穩定速度工作時，如前所述，所生力矩等於靜阻力矩 \$M_s\$。

在起動期間，電動機所生旋轉力矩稱為起動力矩 \$M_a\$，起動力矩應大於靜阻力矩，兩者之差等於剩餘力矩。即：

$$M_a = M_s + M_B \text{ 仟克米。} \quad (10)$$

電力拖動系統中的電動機還常常用來掣動，以便使運動中的機構迅速停頓。

電動機必需產生的掣動力矩 \$M_r\$，可以與剩餘力矩類比，而完整地表示如下（將傳動比，傳動損失考慮在內）：

$$M_v = \frac{1}{t_v} \left[\frac{n}{375} \left(GD_0^2 + \frac{GD_1^2}{i_1^2} \eta_1 + \cdots + \frac{GD_n^2}{i_n^2} \eta_n \right) + 0.975 \frac{Gv^2}{n} \eta_m \right] - M_s. \quad (11)$$

在此式中， η_1, η_n, η_m 都已被移至分子上，這是因為在掣動情況下，機構的摩擦損失減少了需要的掣動力矩。

拖動系統起動時，速度繼續上升的期間稱為起動時間 t_B ，起動時間可由起動力矩的公式計算出來：

$$M_a = M_m = M_s + J \frac{d\omega}{dt},$$

由此

$$dt = J \frac{d\omega}{M_m - M_s}.$$

因此，速度由 0 增加到 ω 所需起動時間 t_B 為：

$$t_B = \int_0^\omega \frac{J d\omega}{M_m - M_s}.$$

如果 M_m 或 M_s 是速度的複雜函數，即 $M_m = \varphi_1(\omega)$ 及 $M_s = \varphi_2(\omega)$ 不能用簡單而準確的解析方式表示時（例如：鼠籠式感應電動機），就必須採用圖解積分法來求 t_B 。下述的比例法是這種情況下最合用的方法。

假如我們要計算定積分：

$$A = \int_m^n \frac{dx}{f(x)}$$

的數值，式中 $f(x)$ 的直角坐標圖形是已知的。

先研究積分式
$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{f(x)} dx$$

的情況，並將等式兩方都對 x 微分

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)}.$$

將微分換為微量增元，就可以得到近似公式：

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{f(x)}. \quad (a)$$

我們將以公式(a)為比例式(這也正是本法得名的原因),並利用它作出曲線 $F(x)$ 的近似圖形。

設若圖形 $f(x)$ 已知,並繪於圖 2 的第一象限中。將 $f(x)$ 的實際曲線代以階梯線。讓我們現在來計算在間隔 $(0, \Delta_1 x)$ 內的情況。在這一段時間內可認為 $f(x)$ 不變,而等於某一介於 $f(0)$ 與 $f(\Delta_1 x)$ 之間的數值 $f(\Delta'_1 x)$ 。

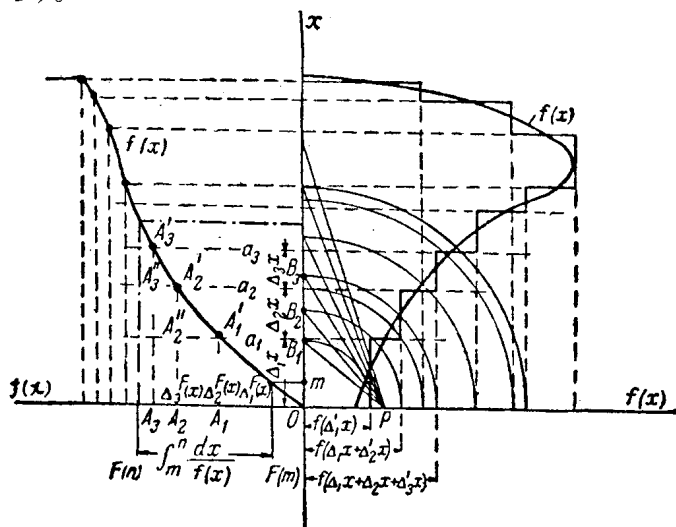


圖 2

比例式(a)可以更細緻地寫成:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{f(x + \Delta'_1 x)},$$

其中 $0 < \Delta'_1 x < \Delta x$ 。把間隔 $(0, \Delta_1 x)$ 代入上式,得:

$$\frac{F(0 + \Delta_1 x) - F(0)}{\Delta_1 x} = \frac{1}{f(0 + \Delta'_1 x)}.$$

令 $F(0) = 0$ (將來會證明這個假設是符合我們的問題的條件的)則得:

$$\frac{F(\Delta_1 x)}{\Delta_1 x} = \frac{1}{f(\Delta'_1 x)}. \quad (b)$$

以這個比例爲根據就可以進一步進行作圖。自 O 點沿 $f(x)$ 軸取 OP 等於單位長度(單位的比例尺將述於後), 即可得到 P 點, 沿 x 軸取 OB_1 等於 $f(\Delta_1 x)$, 並聯 PB_1 直線。再過 O 點在第二象限內作直線與 PB_1 平行。此線與通過 B_1 的水平線 a_1 交於 A'_1 點。

將 A'_1 點投影於 $F(x)$ 軸上, 得 A_1 點。 OA_1 即代表 $F(\Delta_1 x)$, 因爲由相似三角形 OB_1P 與 $A_1A'_1O$ 得:

$$\frac{OP}{OB_1} = \frac{OA_1}{A_1A'_1}$$

或

$$\frac{1}{f(\Delta_1 x)} = \frac{OA_1}{\Delta_1 x},$$

與(b)式對比, 顯見 OA_1 代表 $F(\Delta_1 x)$ 或 $\Delta_1 F(x)$ 。

因此, 直線段 OA'_1 近似的表示了 $F(x)$ 曲線的第一段。

同理, 在第二段內:

$$\frac{F(\Delta_1 x + \Delta_2 x) - F(\Delta_1 x)}{\Delta_2 x} = \frac{1}{f(\Delta_1 x + \Delta_2 x)}.$$

此式可以用下述方法作圖: 在 x 軸上取 $OB_2 = f(\Delta_1 x + \Delta_2 x)$, 聯 P 和 B_2 。自 A'_1 點作直線與 PB_2 平行, 並與水平線 a_2 交於 A'_2 點。將 A'_2 投影於 $F(x)$ 軸上得 A_2 點。

由相似三角形 OB_2P 及 $A''_2A'_2A'_1$ 得:

$$\frac{OP}{OB_2} = \frac{A''_2A'_1}{A'_2A'_2}$$

或

$$\frac{1}{f(\Delta_1 x + \Delta_2 x)} = \frac{A''_2A'_1}{\Delta_2 x},$$

即 $A''_2A'_1$ 代表

$$F(\Delta_1 x + \Delta_2 x) - F(\Delta_1 x)$$

或

$$\Delta_2 F(x).$$

因此, 線段 $A'_1A'_2$ 近似地表示 $F(x)$ 曲線的第二段。其餘各段可類似求得。

取 $F(n) - F(m)$ 的差值就可得出所求的積分(參考圖 2):