数学分析与高等代数之

高等代数选讲

陈利国 编

中国矿业大学出版社

图书在版编目(C I P)数据

数学分析与高等代数选讲/王戈平,陈利国编．—徐州
中国矿业大学出版社，2002.8

ISBN 7-81070-559-8

Ⅰ.数... Ⅱ.①王...②陈... Ⅲ.①数学分析—高等学校—教学参考资料②高等代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 053618 号

书　　名 高等代数选讲

编　　者 陈利国

责任编辑 褚建萍

出版发行 中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008)

排　　版 中国矿业大学出版社排版中心

印　　刷 中国矿业大学印刷厂

经　　销 新华书店

开　　本 850×1168 1/32　**印张** 10.875　**字数** 271 千字

版次印次 2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷

印　　数 1～1050 册

总 定 价 32.00 元

前　言

高等代数是数学专业与应用数学专业最重要的基础课程之一.它的内容与方法对于后继课程的学习有很大的影响.由于它的重要性,历来都是数学专业硕士研究生入学考试的必考科目.为了帮助参加研究生考试的学生复习,多年前徐州师范大学数学系就在高年级开设了高等代数选讲这门课,受到了学生们的欢迎.教学实践表明,这门课的开设提高了学生的应试能力,更为重要的是使得选修这门课的学生加深了对高等代数的内容与方法的理解,提高了综合运用代数知识解决问题的能力与技巧.无论对于他们今后的深造或从事其他的工作都获益匪浅.

本书是在编者多年讲授这门课的基础上编写而成的.内容大体由两部分组成:其一是一些主要概念与结论的简要复习;其二则是例题选讲.在例题中有一部分是较为重要的基本题,借以复习高等代数的基本理论与基本方法;另一部分例题则有一定的难度,解答时往往需要一定的技巧.这些例题中大多数是以往的一些研究生入学试题.通过这部分例题的选讲,帮助学生开阔视野,丰富思路,提高证题的技巧.应该指出,高等代数中有许多重要的计算方法,与此有关的题目没有列入选讲的例题,而将它们留给学生自行复习.

本书章节的编排大致追随现今用得最多的教材——北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编《高等代数》一书的体系.但也有些调整,或相对集中(例如矩阵),或适当补充.虽然总体上是循序渐进的,却也常有前后知识综合运用的例子.总之,本书不同于全面叙述高等代数各种方法的书籍,也不同于集各种类型习题

的习题集.我们的目标是选择有典型意义的、方法上有一定代表性的、难度也适中的题目,通过它们,使学生在不长的时期内达到较好复习与提高的目的.

编写本书时参考了国内常见的一些高等代数教材及有关的辅导书籍,除主要的一些参考书外,恕不在此一一列出,这里向他们表示衷心的感谢;同时还要向徐州师范大学教务处与数学系表示谢意,没有他们的关心支持与教材基金的资助,本书是难以出版的.

限于编者水平,不当、疏漏与错误之处在所难免.请读者指正.

编者

2002 年 6 月

目　录

第1章 多 项 式

多项式是代数学中最基本的研究对象之一，掌握其理论与方法对进一步学习数学与加深对中学代数的理解有重要的意义.

1.1 整 除 性

主要概念与结论

一、整除的定义

定义 设 $f(x), g(x) \in P[x]$. 若存在 $h(x) \in P[x]$，使等式

$$f(x) = g(x)h(x)$$

成立，就称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记作 $g(x) \mid f(x)$. 否则就称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，记作 $g(x) \nmid f(x)$.

若 $g(x) \mid f(x)$，$g(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个因式，而 $f(x)$ 称为 $g(x)$ 的一个倍式.

二、整除的常用性质

(1) 若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x)$，则 $f(x) = cg(x)$，其中 c 为数域 P 中非零常数.

(2) (整除的传递性)若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid h(x)$，则

$$f(x) \mid h(x).$$

(3) 若 $f(x) \mid g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,s$，则

$$f(x) \,\Big|\, \sum_{i=1}^{s} u_i(x) g_i(x),$$

其中 $u_i(x) \in P[x]$，$i=1,2,\cdots,s$.

三、带余除法定理

$\forall\ f(x), g(x) \in P[x]$，其中 $g(x) \neq 0$，一定存在 $q(x), r(x) \in P[x]$，使

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

成立，其中 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$，或 $r(x) = 0$，并且这样的 $q(x)$，$r(x)$ 是惟一决定的.

四、整除性判别法

$\forall\ f(x), g(x) \in P[x]$，其中 $g(x) \neq 0$，则 $g(x) \mid f(x)$ 的充要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

五、关于整除性的证明

整除性的证明通常有以下几种方法(实际上，常常综合运用之)：

(1) 按定义；

(2) 利用整除性质与其他诸如互素多项式、不可约多项式等性质；

(3) 利用整除性判别法；

(4) 利用因式分解定理；

(5) 利用整除性与数域扩大无关；

(6) 利用根.

例题选讲

例 1 证明：$x^d - 1 \mid x^n - 1 \Leftrightarrow d \mid n$.

证明 ($\Leftarrow$)

若 $d \mid n$，则有自然数 k，使 $n = dk$ 成立. 于是

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= x^{dk} - 1 = (x^d)^k - 1 \\ &= (x^d - 1)[(x^d)^{k-1} + (x^d)^{k-2} + \cdots + x^d + 1]. \end{aligned}$$

按定义，有

$$x^d - 1 \mid x^n - 1.$$

(⇒) 用反证法.

若 $d\nmid n$,则有 $n=dk+r$, $0<r<d$. 于是

$$
\begin{aligned}
x^n-1 &= x^{dk+r}-1=x^{dk}x^r-x^r+x^r-1\\
&= x^r(x^{dk}-1)+x^r-1.
\end{aligned}
$$

因 $r<d$, $x^d-1\nmid x^r-1$. 由充分性,$x^d-1\mid x^{dk}-1$. 所以

$$x^d-1\nmid x^n-1. \qquad \square$$

注 1 将 x^n-1 拆成两部分之和,其中一部分能被 x^d-1 整除,另一部分不能被 x^d-1 整除,必得 $x^d-1\nmid x^n-1$. 这是证明不整除的方法之一.

注 2 值得注意本题的应用.

例 2 试证:$x^9+x^8+\cdots+x+1\mid x^{9999}+x^{8888}+\cdots+x^{1111}+1$.

证明 设

$$f(x)=x^{9999}+x^{8888}+\cdots+x^{1111}+1,$$

$$g(x)=x^9+x^8+\cdots+x+1.$$

由 $x^{10}-1=(x-1)g(x)$,知 $g(x)\mid x^{10}-1$. 因

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^{9999}-x^9)+(x^{8888}-x^8)+\cdots+(x^{1111}-x)+g(x)\\
&= x^9(x^{9990}-1)+x^8(x^{8880}-1)+\cdots+x(x^{1110}-1)+g(x),
\end{aligned}
$$

而由例 1,有

$$x^{10}-1\mid x^{iii0}-1, \qquad i=1,2,\cdots,9,$$

于是

$$g(x)\mid x^{iii0}-1,$$

从而

$$g(x)\mid x^i(x^{iii0}-1),$$

所以有

$$g(x)\mid f(x). \qquad \square$$

例 3 设 p 是素数. 证明 $\sum\limits_{k=0}^{p-1}x^k\,\Big|\,1+\sum\limits_{k=1}^{p-1}x^{C_p^k+k}$.

证明 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{p-1}x^k$, 则 $f(x)\mid x^p-1$. 因

$$1+\sum_{k=1}^{p-1}x^{C_p^k+k}=x(x^p-1)+x^2(x^{\frac{p(p-1)}{2!}}-1)+\cdots+$$
$$x^{p-1}(x^p-1)+f(x), \tag{1}$$

而 p 是素数,故 $p\mid C_p^k$, $0<k<p$,由例 1,

$$x^p-1\mid x^{C_p^k}-1, \qquad k=1,2,\cdots,p-1.$$

由(1)可知

$$f(x)\,\Big|\,1+\sum_{k=1}^{p-1}x^{C_p^k+k}. \qquad \Box$$

例 4 已知

$$(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0,$$
$$-(x^2+1)h(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0.$$

证明 x^2+1 能整除 $f(x),g(x)$.

证明 由已知得

$$\begin{cases}(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=-(x^2+1)h(x),\\(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=(x^2+1)h(x).\end{cases} \tag{1}$$

视(1)为关于 $f(x),g(x)$ 之方程组,解之得

$$f(x)=(x^2+1)h(x), \quad g(x)=-(x^2+1)h(x).$$

由整除定义,有

$$x^2+1\mid f(x), \quad x^2+1\mid g(x). \qquad \Box$$

例 5 设 k 是大于 1 的正整数. 证明:$x\mid f^k(x) \Rightarrow x\mid f(x)$.

证法一 作带余除法,设

$$f(x)=xq(x)+c,$$

其中 c 为常数. 于是

$$f^k(x)=(xq(x)+c)^k=xq_1(x)+c^k.$$

因 $x\mid f^k(x)$,由整除性判别法,得 $c^k=0$,从而 $c=0$. 故

$$x\mid f(x). \qquad \Box$$

证法二 因 x 是不可约多项式,按不可约多项式性质,由 $x\mid f^k(x)$ 得 $x\mid f(x)$. $\Box$

例 6 设 p 是素数. 证明：$\sum_{k=0}^{p-1}x^k \Big| 1+\sum_{k=1}^{p-1}x^{C_p^k+k}$.

证明 本题在例 3 中已给出了一个证明，这里利用根与其他性质再给出一个证明.

设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p-1}x^k.$$

于是在复数域上，有

$$f(x)=(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_{p-1}),$$

其中 ω_i 是不等于 1 的 p 次单位根，故 $\omega_i^p=1$, $i=1,2,\cdots,p-1$. 因 p 是素数，故有 $p|C_p^k$，从而 $(\omega_i)^{C_p^k}=1$.

设

$$g(x)=1+\sum_{k=1}^{p-1}x^{C_p^k+k}.$$

于是

$$g(\omega_i)=1+\sum_{k=1}^{p-1}(\omega_i)^{C_p^k}\cdot\omega_i^k=1+\sum_{k=1}^{p-1}\omega_i^k=f(\omega_i)=0.$$

所以

$$x-\omega_i|g(x),\qquad i=1,2,\cdots,p-1.$$

因 $x-\omega_1,x-\omega_2,\cdots,x-\omega_{p-1}$ 两两互素，由互素多项式性质，有

$$(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_{p-1})|g(x),$$

即

$$f(x)|g(x).$$

结论得证. □

例 7 若 $\sum_{i=0}^{n-1}x^i \Big| \sum_{i=0}^{n-2}x^if_{i+1}(x^n)$，证明：

$$x-1|f_i(x),\qquad i=1,2,\cdots,n-1.$$

证明 因整除关系不因数域扩大而改变，所以在复数域 **C** 上仍有

$$\sum_{i=0}^{n-1}x^i \Big| \sum_{i=0}^{n-2}x^if_{i+1}(x^n).$$

于是，

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i \text{ 的 } n-1 \text{ 个根都是} \sum_{i=0}^{n-2} x^i f_{i+1}(x^n) \text{ 的根.} \qquad (*)$$

$\sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i$ 的 $n-1$ 个根 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$是不等于 1 的 n 次单位根，故有

$$\varepsilon_i^n = 1, \qquad i = 1,2,\cdots,n-1.$$

由（ * ），$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$是 $\sum\limits_{i=0}^{n-2} x^i f_{i+1}(x^n)$ 的根，于是有等式

$$f_1(\varepsilon_1^n) + \varepsilon_1 f_2(\varepsilon_1^n) + \cdots + \varepsilon_1^{n-2} f_{n-1}(\varepsilon_1^n) = 0,$$
$$f_1(\varepsilon_2^n) + \varepsilon_2 f_2(\varepsilon_2^n) + \cdots + \varepsilon_2^{n-2} f_{n-1}(\varepsilon_2^n) = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_1(\varepsilon_{n-1}^n) + \varepsilon_{n-1} f_2(\varepsilon_{n-1}^n) + \cdots + \varepsilon_{n-1}^{n-2} f_{n-1}(\varepsilon_{n-1}^n) = 0.$$

即有

$$\begin{cases} f_1(1) + \varepsilon_1 f_2(1) + \cdots + \varepsilon_1^{n-2} f_{n-1}(1) = 0, \\ f_1(1) + \varepsilon_2 f_2(1) + \cdots + \varepsilon_2^{n-2} f_{n-1}(1) = 0, \\ \cdots\cdots \\ f_1(1) + \varepsilon_{n-1} f_2(1) + \cdots + \varepsilon_{n-1}^{n-2} f_{n-1}(1) = 0. \end{cases}$$

因

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-2} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1}^2 & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

故

$$f_1(1) = f_2(1) = \cdots = f_{n-1}(1) = 0.$$

所以

$$x - 1 \mid f_i(x), \qquad i = 1,2,\cdots,n-1. \qquad \square$$

注 本题乃北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编《高等代数》第一章习题 26 之推广.

例 8 证明：$g^2(x)\mid f^2(x)\Leftrightarrow g(x)\mid f(x)$.

证明 充分性显然. 下证必要性.

若 $g(x)$ 是常数或 $f(x)=0$ 时，必要性易知成立.

若 $\partial(g(x))\geqslant 1$ 且 $f(x)\neq 0$，将它们因式分解，且总可设

$$g(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x),$$

$$f(x)=bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_r^{l_r}(x),$$

其中 $p_i(x)$ 两两不等，且都是首项系数为 1 的不可约多项式，$k_i\geqslant 0$，$l_i\geqslant 0$. 由 $g^2(x)\mid f^2(x)$ 知

$$a^2p_1^{2k_1}(x)p_2^{2k_2}(x)\cdots p_r^{2k_r}(x)\mid b^2p_1^{2l_1}(x)p_2^{2l_2}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x).$$

于是

$$p_i^{2k_i}(x)\mid b^2p_1^{2l_1}(x)p_2^{2l_2}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x).$$

当 $k_i=0$ 时，有 $k_i\leqslant l_i$.

当 $k_i\neq 0$ 时，因 $(p_i^{2k_i}(x),p_j^{2l_j}(x))=1$，$j=1,2,\cdots,r$，但 $j\neq i$. 故有

$$p_i^{2k_i}(x)\mid p_i^{2l_i}(x),\qquad i=1,2,\cdots,r.$$

于是也有

$$k_i\leqslant l_i.$$

从而

$$g(x)\mid f(x).$$ □

例 9 设数域 P 上的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根，且 $f(x)$ 在 P 上不可约. 证明 $f(x)\mid g(x)$.

证明 因 $f(x)$ 在数域 P 上不可约，故有两种情形.

(1) 若 $\partial(f(x))=1$，这时 $f(x)$ 在 P 上有惟一的根 c. 于是 c 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共根，所以，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在数域 P 上有公因式 $x-c$，从而不互素. 由 $f(x)$ 在 P 上不可约，必得 $f(x)\mid g(x)$.

(2) 若 $\partial(f(x))>1$，这时 $f(x)$ 在 P 中无根. 于是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共根必在 P 的扩域 $\overline{P}$ 中，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\overline{P}$ 上不互

素，所以它们在 P 上也不互素. 由 $f(x)$ 在 P 上不可约，必有

$$f(x)\mid g(x). \qquad \square$$

例 10 设 V 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 V 中 m 个线性无关的向量. $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的多项式，而 $g(x)$ 是 $\mathbf{Q}$ 上的不可约多项式. 证明：如果对于 $g(x)$ 的某个根 a，等式 $\sum\limits_{i=1}^{m} f_i(a)\lambda_i = 0$ 成立，那么

$$g(x)\mid f_i(x),\ i = 1,2,\cdots,m.$$

证明 因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 线性无关，所以由等式

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(a)\lambda_i = 0$$

成立，得

$$f_i(a) = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,m.$$

又 $g(a)=0$，故 $g(x)$ 与 $f_i(x)$ 有公根，$i=1,2,\cdots,m$. 因 $g(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，由例 9，有

$$g(x)\mid f_i(x), \qquad i = 1,2,\cdots,m. \qquad \square$$

1.2 最大公因式

主要概念与结论

一、主要概念的定义

1. 最大公因式的定义

设 $f(x),g(x)\in P[x]$. $P[x]$中多项式 $d(x)$ 若满足：

(1) $d(x)\mid f(x)$ 且 $d(x)\mid g(x)$；(这时 $d(x)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式)

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式，就称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

注 1 两个零多项式的最大公因式是零多项式.

注 2 若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，则 $cd(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，其中 c 是数域 P 中的任一非零数.

注 3 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零，最大公因式是次数最高的公因式. 这时，用 $(f(x),g(x))$ 表示首项系数是 1 的最大公因式.

2. 互素的定义

$P[x]$ 中两个多项式 $f(x),g(x)$，若 $(f(x),g(x))=1$，就称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素（或互质）.

注 两个多项式互素也可等价定义成除了零次多项式外，不再有其他公因式.

3. 最小公倍式的定义

多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x),g(x)$ 的一个最小公倍式，若

(1) $f(x)\mid m(x)$ 且 $g(x)\mid m(x)$，（这时 $m(x)$ 称为 $f(x)$，$g(x)$ 的一个公倍式）

(2) $f(x),g(x)$ 的任一公倍式都是 $m(x)$ 的倍式.

注 首项系数是 1 的最小公倍式记作 $[f(x),g(x)]$.

二、最大公因式的性质

定理 1 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x),g(x)$，在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$，且必有 $u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x). \tag{1}$$

注 1 若 $f(x),g(x),d(x)\in P[x]$，$d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的组合，即等式(1)成立，则 $d(x)$ 未必是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式；若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，又满足等式(1)，则 $d(x)$ 必是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式.

注 2 定理中的 $u(x),v(x)$ 不惟一. 事实上，若 $uf+vg=d$，则有 $(u+gh)f+(v-hf)g=d$.

注 3 若 $f(x),g(x)$ 不全为零，则定理中所说的 $u(x),v(x)$ 是互素的，即 $(u(x),v(x))=1$.

注 4 若 $f(x),g(x)$ 不全为零，则 $f(x),g(x)$ 的最大公因式可用辗转相除法求出. 最大公因式不因数域 P 的扩大而改变.

三、互素多项式的性质

定理 2 设 $f(x),g(x)\in P[x]$. $f(x),g(x)$ 互素的充要条件是存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

定理 3 在 $P[x]$ 中

(1) 若 $f(x)\mid g(x)h(x)$，$(f(x),g(x))=1$，则 $f(x)\mid h(x)$.

(2) 若 $f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，且 $(f_1(x),f_2(x))=1$，则

$$f_1(x)f_2(x)\mid g(x).$$

(3) 若 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，则

$$(f(x),g(x)h(x))=1.$$

例题选讲

例 1 设 $f(x),g(x)$ 不全为零. 令

$$M=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in P[x]\}.$$

证明：$M\neq\varnothing$，且 M 中次数最低的多项式都是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式.

证明 显然 $f(x),g(x)\in M$，故 $M\neq\varnothing$. 设 $d^*(x)$ 是 M 中次数最低的任一多项式. 于是 $d^*(x)\neq 0$，且有 $u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$d^*(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

设 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式. 由 $f(x),g(x)$ 不全为零，故 $d(x)\neq 0$，且 $d(x)\in M$，$d(x)\mid d^*(x)$. 于是

$$\partial(d(x))\leqslant\partial(d^*(x)).$$

由 $d^*(x)$ 在 M 中次数最低的假定，有

$$\partial(d^*(x))\leqslant\partial(d(x)).$$

所以

$$\partial(d(x)) = \partial(d^*(x)),$$

从而

$$d^*(x) = cd(x), \qquad 0 \neq c \in P.$$

因此，$d^*(x)$是$f(x)$，$g(x)$的一个最大公因式. □

例 2 设$f(x)$，$g(x) \in P[x]$，a，b，c，$d \in P$，且$ad-bc \neq 0$. 证明：$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x))$.

证明 令

$$af(x) + bg(x) = f_1(x), \quad cf(x) + dg(x) = f_2(x). \quad (1)$$

因$ad-bc \neq 0$，由(1)可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{ad-bc}f_1(x) - \frac{b}{ad-bc}f_2(x), \\ g(x) &= -\frac{c}{ad-bc}f_1(x) + \frac{a}{ad-bc}f_2(x). \end{aligned} \quad (2)$$

令

$$(f(x),g(x)) = d(x), \qquad (f_1(x),f_2(x)) = d_1(x).$$

于是由(1)，有$d(x)\mid f_1(x)$且$d(x)\mid f_2(x)$，从而$d(x)\mid d_1(x)$；由(2)有$d_1(x)\mid f(x)$且$d_1(x)\mid g(x)$，从而$d_1(x)\mid d(x)$. $d(x)$与$d_1(x)$相互整除，而首项系数都是1，所以$d(x)=d_1(x)$，即

$$(af(x) + bg(x),cf(x) + dg(x)) = (f(x),g(x)). \qquad \square$$

注 由本例可得许多特款. 例如：

$a=1$，$b=0$，$c=1$，$d=\pm 1$，便有

$$(f(x),f(x) \pm g(x)) = (f(x),g(x)).$$

$a=1$，$b=1$，$c=1$，$d=-1$，便有

$$(f(x) + g(x),f(x) - g(x)) = (f(x),g(x)).$$

例 3 对任意多项式$f_i=f_i(x) \in P[x]$，$i=1,2,3$，证明在$P[x]$中必存在多项式$g_i=g_i(x)$，$h_i=h_i(x)$，$i=1,2,3$，使得

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = (f_1,f_2,f_3).$$