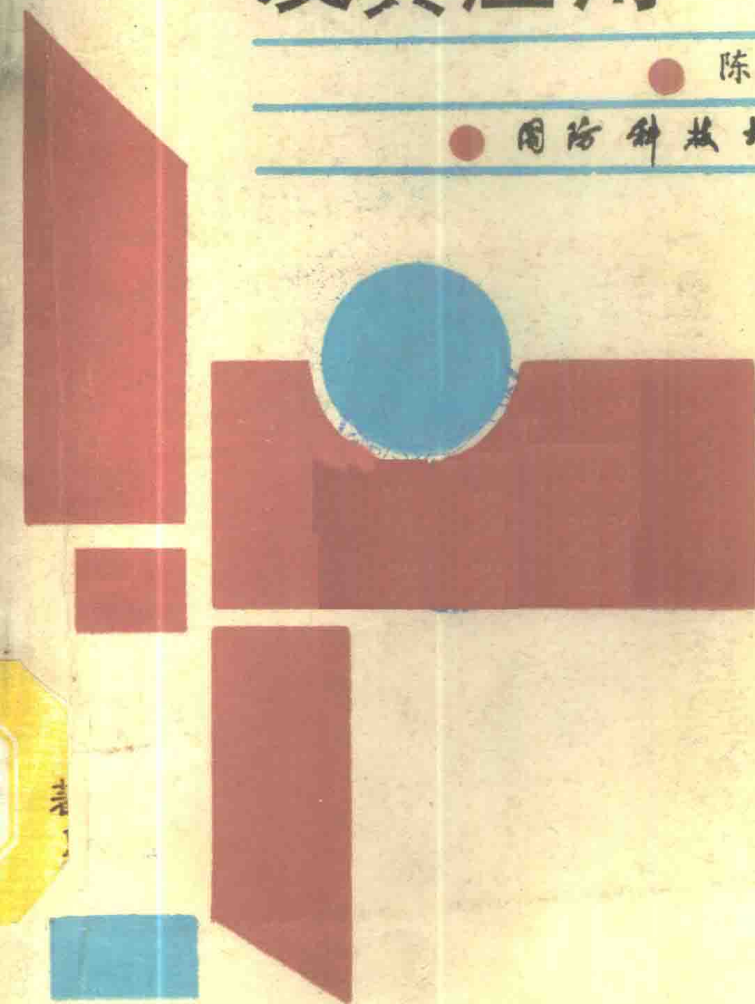


组合最优化技术 及其应用

● 陈庆华等 编著

● 国防科技大学出版社



内 容 简 介

本书系统阐述了组合最优化技术的主要内容及其主要应用问题。全书共分十三章，第一章讲述组合最优化的概念，第二章至第九章分别讲述线性图模型、最优路线问题、最优树算法、对策与决策、最佳分配问题、网络计划技术、网络流问题以及与图论有关的优化问题，第十章至第十二章分别讲述了线性规划、整数规划与动态规划，第十三章介绍模糊组合最优化的初步知识。

本书可作为系统工程、管理科学、运筹学、计算机科学等相关专业研究生、本科生的教学参考书，也可作为工程技术人员、行政管理人员的自学读物。

组合最优化技术及其应用

*

陈庆华 翟晓燕 编著
徐培德 许若宁

*

责任编辑 何 晋

*

国防科技大学出版社 出版发行

湖南省新华书店经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本：787×1092 1/32 印张：10 18/32 字数：246千字

1989年8月第1版第1次印刷 印数：2 000册

ISBN 7-81024-078-1
TP·15 定价：3.85元

序

组合最优化技术是运筹学的一个重要分支。它侧重于应用,是系统工程的一种重要方法。本书重点介绍组合最优化中已在实践中取得成效的实用技术及方法,内容包括线性图理论、最优路线问题、决策与决策树方法、分配问题、网络计划技术、网络流问题、线性规划、整数规划、动态规划以及模糊组合最优化等。书中不仅有内容与方法的介绍,也给出了许多利用组合最优化技术解决问题的实例,如产品推销、风险投资、资源分配、最佳库存效益、中国邮递员问题、选址问题等,从中可以看到组合最优化技术在多方面的应用成果。

网络与图的概念是组合最优化的内容之一,利用网络与图的性质来表述和解决问题是本书的重要特色。本书很大一部分介绍了与此有关的内容:线性图模型与网络模型、各种网络系统、网络计划技术、网络流问题、树与决策等。了解这些问题,可以使读者基本上掌握利用网络与图来解决问题的方法。线性规划、整数规划与动态规划,是应用极为广泛的数学方法,本书也作了较完整的介绍。本书还对模糊组合最优化问题作了初步介绍,旨在让读者了解如何用模糊数学方法处理组合最优化问题的。

本书特点是从实际问题入手,引入组合最优化模型,通过实例来介绍各种算法,并且结合实际需要来介绍这个领域中各种有用的成果,使读者能较快地掌握基本概念、基本理论和解决实际问题的方法。

本书可作为系统工程、管理科学、运筹学、计算机科学等相近专业研究生、本科生的教学参考书，也可作为工程技术人员、行政管理人员的自学读物。

全书共十三章，约18万字，书中大部分内容曾多次在国防科技大学系统工程与运筹学专业教学中使用，部分内容还曾在工程技术人员、行政管理人员的进修班中使用。本书是在陈庆华编著的《组合最优化讲义》基础上，经过多年教学实践加以补充整理而成。

刘 德 铭

目 录

第一章 组合最优化概论

§1.1 组合最优化问题及其技术	1
§1.2 组合最优化模型	6
§1.3 组合最优化技术的应用优势及发展前景	10

第二章 系统的线性图模型与网络模型

§2.1 系统中的线性图与网络结构	14
§2.2 建立系统的线性图模型与网络模型	15
2.2.1 公路网络模型与路程优化问题	15
2.2.2 生产进度计划模型及计划管理优化问题	16
2.2.3 投资决策模型与决策树	17
2.2.4 运输（或通风）网络中流量模型与最大流问题	18
§2.3 线性图与网络的基本概念	20
§2.4 线性图与网络的矩阵代数模型	26
2.4.1 图和有向图的关联矩阵	26
2.4.2 图和有向图的邻接矩阵	27
2.4.3 网络的边（弧）长矩阵	28

第三章 网络系统中的路线优化及方法

§3.1 网络系统中的路线优化问题	30
§3.2 最短路问题及应用实例	31
3.2.1 管道铺设路线费用最少的问题	31
3.2.2 货物运输时间最短的路线问题	32
3.2.3 最大可靠路问题	32
3.2.4 设备更新问题	33
§3.3 求解最短路的方法	35
3.3.1 Dijkstra 算法	35
3.3.2 逐次逼近法	46

§3.4 最短路应用问题的变种	50
3.4.1 运输网络中最大容量路	50
3.4.2 通讯网络中最大期望容量路	51
3.4.3 最佳库存效益问题	51
§3.5 各市场间运输路线优化表	
——网络中所有点对之间最短路问题	53

第四章 系统中的优美树

§4.1 修建运输、通讯系统的最佳连通网络——最小 支撑树问题	60
§4.2 最小支撑树算法	62
4.2.1 Greedy算法	62
4.2.2 Dijkstra 方法 (1959年)	67
4.2.3 破圈法	69
4.2.4 边长矩阵法	71
§4.3 最优信息树及算法	74

第五章 决策与决策方法

§5.1 决策问题与基本原理	78
§5.2 概率的基本概念	80
§5.3 决策树模型	81
§5.4 决策树方法应用实例	83
5.4.1 产品推销范围的决策	83
5.4.2 引进新技术的决策	85
5.4.3 风险投资决策	87
§5.5 非确定型决策	90
5.5.1 乐观法	91
5.5.2 悲观法	92
5.5.3 调整系数法	93
5.5.4 等可能性法	95
5.5.5 “后悔值”法	95

§8.3 最小费用流问题 ^[注]	172
-----------------------------------	-----

第九章 网络与图的应用问题

§9.1 中国邮路问题	180
9.1.1 欧拉图	181
9.1.2 最优邮路	183
§9.2 机关设计问题	187
9.2.1 机关设计问题	187
9.2.2 机关设计与平面图	190
9.2.3 三角多边形法	191
§9.3 汽车共用问题	198
9.3.1 引言	198
9.3.2 对应的图论问题	199
9.3.3 最近点的过程	201
9.3.4 三角形方法	203
9.3.5 树分解法	205
§9.4 选址问题	207
9.4.1 中心问题	208
9.4.2 中位点问题	209

第十章 线性规划

§10.1 线性规划	211
10.1.1 线性规划问题与模型	211
10.1.2 线性规划的图解法	216
10.1.3 线性规划的可行解	218
§10.2 单纯形法	220
§10.3 对偶规划	241
§10.4 对偶单纯形法	245
§10.5 线性规划的应用举例	248
10.5.1 工作分配问题	249
10.5.2 选择投资方案	249

10.5.3 管理问题	251
-------------------	-----

10.5.4 火力分配问题	252
---------------------	-----

第十一章 整数规划

§11.1 整数规划问题	254
--------------------	-----

11.1.1 背包问题	254
-------------------	-----

11.1.2 选址问题	255
-------------------	-----

11.1.3 投资预算问题	256
---------------------	-----

11.1.4 载货问题	256
-------------------	-----

§11.2 割平面法	257
------------------	-----

§11.3 分枝定界法	261
-------------------	-----

§11.4 0-1规划的解法	265
----------------------	-----

第十二章 动态规划

§12.1 多阶段决策问题	269
---------------------	-----

§12.2 一个简单的例子	270
---------------------	-----

12.2.1 例子	270
-----------------	-----

12.2.2 动态规划的基本概念	272
------------------------	-----

§12.3 动态规划的基本原理和基本方程	274
----------------------------	-----

§12.4 动态规划的应用举例	276
-----------------------	-----

12.4.1 生产与库存问题	276
----------------------	-----

12.4.2 资源分配问题	280
---------------------	-----

第十三章 模糊组合最优化

§13.1 模糊组合最优化简介	285
-----------------------	-----

§13.2 基本知识	286
------------------	-----

13.2.1 模糊子集的概念及其运算	286
--------------------------	-----

13.2.2 模糊关系及其合成	291
-----------------------	-----

§13.3 问题举例	296
------------------	-----

13.3.1 模糊线性规划问题	296
-----------------------	-----

13.3.2 模糊决策问题	311
---------------------	-----

13.3.3 图论概念的扩充及在聚类分析中的应用	317
--------------------------------	-----

第一章 组合最优化概论

§ 1.1 组合最优化问题及其技术

近年来，新技术革命的浪潮正猛烈地冲击着当今世界的各个领域。迅速掌握和应用新技术，对于优化劳动组合，提高社会劳动生产率，增强竞争能力，变革劳动生产方式，加速社会发展进程，将产生极大的影响。当前，社会、经济和科技日新月异异地发展，社会生产急剧扩大，各种企业、组织在规模上和复杂性上都迅速增长和变化，不借助于新技术的帮助，人们已无法妥善处理因素繁多、关系错综交织而且日益复杂的事务；从而使应运而得到快速发展的组合最优化技术越来越显示出它的重要作用。组合最优化技术作为新兴的侧重于应用的运筹技术之一，也是系统工程的一种重要方法。随着电子计算机的巨大发展，组合最优化技术得到了日益广泛的应用。特别是它在生产、经济管理中的应用（如在区域规划，企业的生产安排，资源分配，交通计划，空间计划，投资决策等方面的应用）和已获得的巨大经济效益，得到了人们越来越高度的重视，并且正在迅速地取代传统落后的管理方法，而成为管理的重要工具之一。现在，组合最优化技术的应用已渗透于企业、商业、政府的管理，工程系统设计，工程技术，军事作战，科学试验，财政经济甚至生物学、化学、语言学以及社会科学之中。其应用的数量与种类与日俱增。毋庸置疑，这必将推动组合最优化技术在理论上、方法上和应用上的更大飞跃。

什么是组合最优化技术？首先我们应该了解什么是组合最优化问题。我们知道，组合最优化是运筹学的一个重要组成部

分，而运筹学是通过利用计划方法和多学科专家组成的综合队伍，把复杂的功能关系表示成数学模型，其目的是通过定量分析为决策和揭露新问题提供数量根据，它的特点之一是试图对考虑的问题求出最佳或最优解。这些问题又可根据其变量的取值范围而分为两大类。一是具有连续变量的最优化问题，另外是具有离散变量的最优化问题。用一句较简单而不够严格的话来描述，后者和那些从有限个解中寻找最优解的问题就是组合最优化问题。具有连续变量与具有离散变量最优化问题是两大类具有不同特点的问题，因此解决这两类问题的方法也往往完全不同。一些国际上有关的权威人士曾预言，在不久的将来（而且就在现在）对于离散变量问题的研究，将成为我们了解世界越来越重要的工具。相反地，连续变量问题的研究就只起到次要的作用了。

为了使读者更进一步直观地了解组合最优化问题，同时也为了使读者领略一下组合最优化问题的优美和有趣之处，下面介绍几个非常简单的例子，从中我们也可以看出组合最优化问题的提出最初与趣味数学有着密切的联系。

婚姻问题（或称为匹配问题）

在一个遥远的地方，一个酋长的三个漂亮女儿 A 、 B 、 C 正准备出嫁，而且也有三个求婚者 D 、 E 、 F 。按当地的习俗，求婚者必须向酋长交纳一定数量的牛作为财礼。如果我们用点表示女孩和求婚者，用连线表示两点之间可能的连接（在这里就是结婚），并把求婚者对于酋长的每个女儿愿意提供的牛数记录在连线上，其情况如图 1.1。

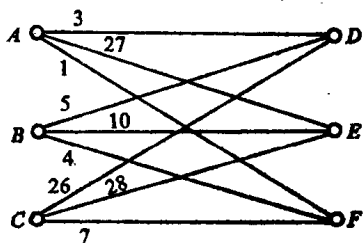


图 1.1

假设酋长只以获得尽可能多的牛为目的，那么现在酋长的问题就是找出一种匹配方案，使这种匹配是一组边所构成的集合。其中没有两条边有公共点（一夫一妻制），并且使得这样找出的三条边的边赋值（即牛的头数）之和为最大。也就是说，酋长把他的三个女儿分别嫁给三个求婚者，怎样匹配才能使得到的牛的总数最多。这或许就是所谓古老的组合最优化问题。

现在对求这类问题（匹配问题）的最优解已有了很方便的计算方法（见第六章§3），然而古代的酋长当然是不懂的。他的方案很短见，也很贪财，即：把财礼最多的先嫁出，也就是 C 与 E ($C \sim E = 28$ 头牛)，第二个最好的婚配是 A 与 E ($A \sim E = 27$ 头牛)，但不能实现（因为已定下一夫一妻制）。于是在可能允许的婚配中再寻找最好的，就是 B 与 D ($B \sim D = 5$ 头牛)，最后当然是 A 与 F ($A \sim F = 1$ 头牛)。这样酋长共得到 $28 + 5 + 1 = 34$ 条牛。如果他懂得组合最优化方法，他就会得到最优解为 $27 + 26 + 4 = 57$ 头牛 ($A \sim E = 27$ 头牛， $B \sim F = 4$ 头牛， $C \sim D = 26$ 头牛)。

通过上面的例子，我们对组合最优化问题有了具体、直观的印象，同时也看到了组合最优化方法应用的优越性，对于这样简单的问题，懂得组合最优化方法和不懂组合最优化方法所求得的结果已有这样大的差别；可以想象，在现代大规模的生产和管理中，在进行优化劳动组合时，应用组合最优化技术所节省的人力、物力、财力将是非常可观的。

如果我们把上面的婚配问题的提法改变一下，把机器看作图1.1中的求婚者，把任务看作酋长的女儿，连线表示该任务可以用几种不同的机器去完成，连线上数值表示完成该任务需要的对应机器所付的费用(或时间)。如果限定每一台机器只能安排一个任务，我们很自然地希望设法把每一件任务安排在某一

台合适的机器上,使得总的费用(或总的完成时间)为最小,这也就是生产安排问题,或最优化的机器分配问题。

实际上,匹配问题可以解释为许多实际应用问题,如资源分配问题,配料问题,贸易点分布问题,分房问题等等,这些问题在本书的第六章中还将进一步介绍。从这一具体例子中,我们容易发现:从结构上来看,匹配问题实质上就是要使所考虑的系统每两个待匹配的事物尽可能完美地组合成一对。因此把这种优美的组合问题归属于组合最优化问题之中是非常贴切、自然的。许多组合最优化问题在结构上不仅具有这样的“优美性”,而且还具有“趣味性”和“形象性”,如最优信息树问题。我们知道,在计算机中信息常常是用0或1两个元素组成的编码来处理的。这些信息,我们又可以用信息树来表示。例如有一套编码为 $\{000, 001, 010, 011, 10, 11\}$,我们可以用从一点向左下一行为0、右下一行为1这样的图表示,如图1.2所示。

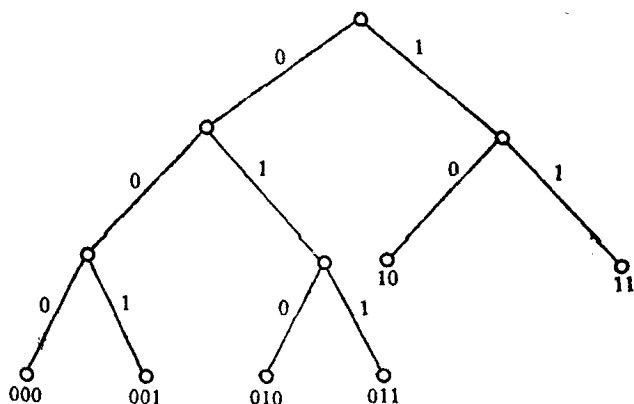


图 1.2

有趣的是,这样的图结构恰巧就象一棵倒立着的自然界中的树,

所以我们又称这样的图为“信息树”（或称为二元树）。图1.2中的最上面一行的点称为信息树的“根”，而称只与一条连线（线段）相连的点为信息树的“叶子”。用信息树非常容易识别这些用编码表示的信息。我们仍用上面的例子来讨论。

例如接收信息01110010000001110，从树根开始下行走到叶子就算是一个码找出来了。然后再从树根开始另一个码的搜索。不难分辨出它们是011，10，010，000，001，11，10。

为了使表达一组信息的码的长度尽可能短，我们可以用较短的码表示常用的符号，而不常用的符号对应的码可以稍长一些。例如在某一英文字典中，二十六个字母出现的几率是不一样的，设计最佳编码的标准就是使下面的码的长度的数学期望取最小值

$$L = \sum_{i=1}^{26} p_i l_i$$

其中 l_i 是第 i 个字母的码的长度，而 p_i 是第 i 个字母出现的几率。一组编码对应一棵信息树，它的叶子 v_i 分别对应着权（即几率） p_i ，叶子 v_i 到树根的长度（即连接叶子 v_i 与树根的线路上线段的条数）分别对应着码的长度 l_i 。设计最佳编码的问题实际上就是找一棵信息树，使得

$$L = \sum_{(i)} p_i l_i$$

取最小值。其中 $\sum_{(i)}$ 是对所有的叶子求和。这样的信息树称为最优信息树。在上面的例子中，一棵最优信息树对应着计算机中搜寻该字典中某一单词的程序，这种信息树及最优信息树的设计方法，广泛应用于计算机信息处理设计中。在本书的第四章§3中，我们还将详细介绍最优信息树的算法。

通过上述分析易知，最优信息树的问题，实际上是在一定要

求下，将 0、1 组合成的编码设计为“最佳的形式”，这当然也是组合最优化的问题。还有大量的生产实践、日常生活等方面的问题，如交通或通讯网络的设计、工作的组织关系优化问题，系统的工作可靠性问题，资金流通周转问题，生产（工程）进度计划优化问题，资源调度及优化问题，费用优化问题，风险性决策问题等等，不胜枚举。这些问题都可以归结为组合最优化的应用问题；而求解这些问题的特定的数学方法、算法又可以称为组合最优化的技术。在以后的章节里，我们将进一步具体地讨论和介绍这些应用问题及求解方法。

在研究组合最优化的应用问题并求其解的过程中，首先我们往往要建立相应的实际模型。通过建模将实际问题归纳、明确和抽象，用形象的方法，准确的数学语言和符号来描述所考虑的问题，从而使之能够灵活地运用组合最优化技术和计算机，以期迅速地、有效地解决实际问题。在下一节中，我们将详细地介绍组合最优化模型以及建立组合最优化模型的主要步骤。

§ 1.2 组合最优化模型

在解决组合最优化的实际问题时，通常需要建立相应的组合最优化应用模型。大多数组合最优化应用模型具有良好的结构（变量、约束条件、目标、关系等比较明确），而且形象直观。在模型中，系统复杂的结构和各种状态的组合往往可以用简单明确的图形或数学表达式清楚地描述出来。通过建立模型，我们还可以揭示系统中哪些是重要的或有关的变量，描述出变量与其它对解决问题来说是重要的因素间的关系和相互影响，反映出实际事物中研究对象的特征。

什么是模型？通常一个模型被定义为一件实际事物或情况的代表或抽象。它根据因果关系显示出行动和反映的关系以及

内部关系，而且可以表现得比现实本身更简单，更便于操作，且容易理解。通过模型的试算，我们可以做现实中很难或不能做的试验，研究变量之间的关系，而且可以很快看出那些在现实中要很长时间才能看出的变量变化的情况，从而更迅速地抓住其本质特征。

不同的实际问题要求建立不同形式的模型，组合最优化模型一般分为两类：

(1) 模拟模型或图解模型

(如 § 1 中的婚姻问题与图 1.1)

(2) 数学模型

(如： $\min f(x)$)

满足： $g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$

$h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p.$

其中 f , g_i 和 h_j 是 x 的线性函数， x 是未知的变量或向量）。在以后的几章中，我们将详细介绍这两类模型。

一般来说，模型的建立并非易事。由于在实际情况中，我们考虑的问题可能包含着相互矛盾的各种需要和利益、众多的因素和错综复杂的关系；因此在设计模型之前，首先我们必须从客观现实情况中存在的需要和问题出发，围绕所提出的问题，对其有关的各方面因素（如某产品的利润、成本、销路、质量、可靠性、性能、使用寿命、简易性、安全性、美观及社会可接受的程度等），相互之间的利益和关系，问题或系统的限制、制约条件，目的以及各因素与目标之间的关系等等进行详细全面的调查了解。其次，在此基础上须明确下述问题：要达到什么目标？要克服什么困难？可利用的资源条件是什么？存在什么样的约束条件以及用什么准则来判断，可能得到的解答是否正确等；这时，问题的实质也就得到了确定。通过对问题的分

析和认识,将问题归结为某种类型的组合最优化问题(如匹配问题)。然后确定问题主要关心的参数,如目标、变量、约束、假设事件和其它对建立模型被认为是重要的因素,并收集与综合处理与之有关的资料和数据,同时还要尽可能地收集由于模型参数变化引起的模型性能变化的信息,以分析确定每一因素对模型性能的影响。最后,我们需要确定问题解的表示,可控因素或决策变量是什么?如销售价格,产品的成本情况,产品的生产数量等。不可控因素或环境变量是什么?如竞争价格,顾客的需要,顾客的分布等。考虑的因素与目标的关系,即这些关系能否以数学形式表示出来。并在此基础上根据我们已列出的参数来构造此实际问题的组合最优化应用模型。简而言之,建模的主要步骤为:

- (1) 明确需要和目标;
- (2) 对系统进行详细的调查和了解,去粗取精,去伪存真,分清所考虑因素的层次,确定需要考虑的变量;
- (3) 分析各因素、各变量之间的关系;
- (4) 明确系统的约束条件;
- (5) 用数学手段表明所有关系及事项;
- (6) 检查目标是否是研究的问题。

我们可以把以上建模步骤用一个流程框图表示出来,见图

1.3.

在组合最优化应用中,最基本和最常用的方法是通过建立其模型来求解。这是因为计算机是组合最优化发展的基本因素,对大多数实际问题来说,如果没有计算机来产生最终结果,组合最优化技术是无法实现的。而随着模型的建立,将使所描述的问题具体化,定型化,定量化,使其能通过编制程序而在计算机上进行调试和运算。现在,大多数组合最优化应用模