尤丕基　金士伟●编著

管理科学的现代方法

GUANLIKEXUE
DE XIANDAI FANGFA

立信会计出版社

管理科学的现代方法

尤丕基　金士伟●编著

立信会计出版社

管理科学的现代方法

尤丕基　金士伟　编

立信会计出版社出版发行

（上海中山西路 2230 号）

邮政编码　200233

新华书店经销

立信会计常熟市印刷联营厂印刷

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 7.125　插页 2　字数 174,000

1997 年 4 月第 1 版　1997 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—5,000

ISBN7-5429-0468-X/F·0438

定价：10.60 元

编写说明

本教材为经济管理类专业编写。主要介绍现代管理科学的技术与方法。

对在经济管理中广泛应用的管理科学的现代方法，在校学生往往没有足够的课时再学，能否用较少的课时（54～72 课时），把经济管理中应用广泛的管理科学现代方法的主要分支，向学生作一个介绍，本教材在这方面作了一些探索，是否有可取之处，望同行们能不吝赐教。

本书的第 1、2、5 章由尤丕基编写，第 3、4 章由金士伟编写。

在本书的编写过程中，受到立信会计高等专科学校教务处和校领导的大力支持，编者在此表示衷心的感谢。

编　　者

目　　录

1 概 率 论

1.1 概率论的基本概念

1.1.1 随机事件及其运算

在自然界与社会活动中存在着两种不同的现象。一类是确定性现象，另一类是随机现象。

若某一现象，在一定的条件下，必定会发生或者不会发生，则称之为确定性现象。例如在全为正品的产品中，抽到的必定是正品。

另一类现象，在一定的条件下，可能会发生也可能不会发生，则称它为随机现象。例如掷一枚骰子向上一面的点数大于3，又如任取一枚灯泡，燃亮的寿命超过一千小时等等。

概率论是研究随机现象的统计数量规律的一门学科。

为便于用数学工具进行研究，首先引入以下一系列的概念。

1.1.1.1 随机试验

在一定条件下，对随机现象进行的观察称为进行随机试验。随机试验具有以下三个特征：

(1) 在试验之前所有可能出现的结果都是可以预知的。

(2) 在某一次试验中出现的那一个结果是偶然的。

(3) 在相同的条件下，试验可以重复进行。

1.1.1.2 样本点、样本空间和随机事件

如果确定了一个随机试验，则把它可能出现的一个基本结果称为一个样本点，记作 ω。而它全部可能出现的样本点，即全体样

本点的集合称为样本空间，记作：$\Omega=\{\omega\}$。部分样本点构成的集合，即 Ω 的一个子集，称为随机事件（简称事件）。用大写的英文字母 A、B、C、…来表示事件。

【例 1.1】 随机试验掷一枚骰子。

基本结果是正面向上的点数：1、2、3、4、5、6。

则 $\Omega=\{1、2、3、4、5、6\}$。

出现点数不小于 4 的事件记作事件 A，则 $A=\{4、5、6\}$。

出现点数为偶数的事件记作 B，则 $B=\{2、4、6\}$。

显然 $\Omega\supset A$、$\Omega\supset B$。

这里特别要指出的是：事件发生仅仅要求该事件集合中某一样本点发生（而不是所有样本点都要发生）。

【例 1.2】 随机事件点亮一枚灯泡。

基本结果是指测试其寿命：从 0 起到正无穷大。

则 $\Omega=\{t|t\geqslant 0\}$。

寿命在 1000 小时以上为事件 A，则 $A=\{t|t>1000\}$。

【例 1.3】 随机试验从两个正品、一个次品的三件产品中任意抽取两件产品如果用 1、2 代表正品，3 代表次品。

则基本结果为 $\omega_1=(1、2)$，$\omega_2=(1、3)$，$\omega_3=(2、3)$（不计抽取两件次序）。

$\Omega=\{\omega_1、\omega_2、\omega_3\}$。

则取到都是正品为事件 A，则 $A=\{\omega_1\}$。

取到一个正品、一个次品为事件 B，则 $B=\{\omega_2、\omega_3\}$。

取到至少有一个正品为事件 $\Omega=\{\omega_1、\omega_2、\omega_3\}$。这个事件是必然事件，仍用 Ω 表示。（这里 Ω 不表示样本空间）。

取到两个次品的事件为不可能事件，记作：Φ（空集）。

必然事件 Ω 与不可能事件 Φ 是事件中两个极端的情况。因此，确定事件可以看作是随机事件的特殊情况。

1.1.1.3　随机事件的运算

下面用随机事件之间的运算来表示一些复杂的事件。

事件 A 与事件 B 都发生的事件称作 A 与 B 的积事件，记作：AB。

A 与 B 不能同时发生的事件称 A 与 B 为不相容事件，或 A 与 B 互斥。记作：$AB=\Phi$。

事件 A 与事件 B 至少有一发生的事件称作 A 与 B 的和事件，记作：$A\cup B$。

当 $AB=\Phi$ 时，$A\cup B$ 又记作：$A+B$。

又若 $A+B=\Omega$。称 A 与 B 互为逆事件。记作 $B=\overline{A}$，或 $A=\overline{B}$。$\overline{A}$ 表示 A 不发生的事件。

若三个事件 A_1、A_2、A_3，一般不是两两互斥的(见图 1.1)，则三事件都不发生的事件为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，三个事件中 A_1 发生而另两个不发生的事件为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，三个事件恰有一个发生的事件为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，三个事件恰有两个发生的事件为 $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$，三个事件都发生的事件为 $A_1A_2A_3$。三个事件至少有一发生的事件为 $A_1\cup A_2\cup A_3$，可以从两个方面来看，一方面它可以看作恰有一个发生与恰好两个发生与恰好三个发生的和事件。即：

$$A_1\cup A_2\cup A_3=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3。$$

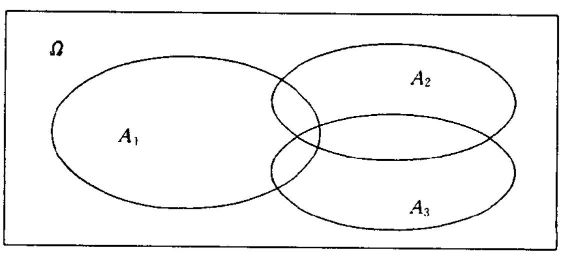

图 1.1

另一方面也可以看作是三个都不发生的逆事件。即：

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}。$$

后一等式从集合论中的对偶律很易得出。若一个事件组：A_1，A_2，…，A_n，满足：$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$（也记作$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$）。则称$A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 构成一个完备系。

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一个完备系，又满足 $A_iA_j = \Phi (i \neq j)$，即两两互斥，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 对 Ω 构成了一个划分。A 与 $\overline{A}$ 对 Ω 即构成了一个划分。而三个事件把 Ω 划分为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$、$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$、$\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$、$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$、$A_1A_2\overline{A}_3$、$A_1\overline{A}_2A_3$、$\overline{A}_1A_2A_3$、$A_1A_2A_3$ 对样本空间 Ω 也构成了一个划分。

1.1.2 随机事件的概率

随机事件在一次试验中发生与否是偶然的，但是在大量的重复试验中，它发生的规律表现出明显的统计规律性，称为频率的稳定性。

频率是指在 n 次重复的随机试验中，若事件 A 出现次数为 r_A 次。（显然 $r_A \leqslant n$），则称 $\omega_n(A) = \dfrac{r_A}{n}$为事件 A 在 n 次试验中发生的频率。频率不仅与事件 A 有关，也与试验次数 n 有关。

例如一枚质量分布均匀的钱币，投一次，正面或反面向上都是偶然的。但是若大量重复试验，随着 n 的增大，$\omega_n(A)$必定越来越接近于 0.5。

历史上一些统计学家曾做过这样的试验。如 K. 皮尔逊投币 24000 次，正面向上统计得到 12012 次，$\omega_{24000}(A) = 0.5005$。

概率的统计定义：当随机试验次数越来越大的时候，频率 $\omega_n(A)$越来越接近于某一客观存在的实数值（这个值与 n 无关，作为事件 A 的本质属性。），把它称为事件 A 的概率，记作：$p(A)$。

$p(A)$的含义是表示事件 A 在一次试验中出现可能性的

大小。

由上述定义易知：

(1) $0\leqslant p(A)\leqslant 1$，因为 $0\leqslant \omega_n(A)\leqslant 1$。

(2) $p(\Omega)=1$， $p(\Phi)=0$， 显然，

(3) $p(A+B)=p(A)+p(B)$。

因为 $AB=\Phi$，所以 $\omega_n(A+B)=\omega_n(A)+\omega_n(B)$。

(4) $p(A)=1-p(A)$，因为 $p(A)+p(A)=p(\Omega)=1$。

(5) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(AB)$，因为 $A\cup B=A+B-AB$。

其中：(5)又称为概率的加法定理，(3)、(4)是它的特殊情况。

1.1.3 古典概率与抽样模型

当一个随机试验满足：

(1) 只有有限个样本点。

(2) 每个样本点出现的可能性相同。

我们称这样的随机试验为古典的随机试验。

例如：投骰子，出现 1 到 6 点的概率相同，因此投骰子是古典型的随机试验。又如，任取一枚灯泡，测试其燃亮的寿命，它可能出现的结果是从 0 开始的非负实数，样本点的个数不是有限的，并且每个样本点出现也不是等可能的，因此不是古典型的。

在古典型的随机试验中，若样本空间有 n 个样本点，事件 A 包含了其中 r 个样本点，则古典概率的计算公式为：

$p(A)=\dfrac{r}{n}$（因为 A 是 r 个概率为$\dfrac{1}{n}$的样本点之和，这些样本点是两两互斥的）。

古典概率计算的困难在于常常要用到排列与组合的知识对样本点计数。

下面重点考察古典概率中的抽样模型。看下述一个典型的例子。

【例 1.4】 7 个产品。其中有 5 个正品 2 个次品，从中任意抽取 3 个，问其中恰有 2 个正品、1 个次品的概率是多少？

我们将抽取分成两类情况：

（1）抽出一个后不放回再抽下一个。

（2）抽出一个后放回再抽。

解：（1）不放回地抽。

设恰好抽到 2 个正品、1 个次品的事件为 A。

这时设想把 7 个产品编号为：1、2、3、4、5、6、7。其中 1 至 5 号为正品，6、7 号为次品。由于事件 A 仅考虑抽取产品的花色，而不计抽到正品或次品的次序。因此我们在构造样本空间时只要考虑组合数。

Ω 中的样本点个数 $n_\Omega=C_7^3$ 个、A 中包含的样本点个数 $n_A=C_5^2\cdot C_2^1$ 个，因此

$$p(A)=\frac{C_5^2\cdot C_2^1}{C_7^3}。$$

若构造样本空间时，考虑排列数。也可以得到与上述相同的结论。这时 Ω 中样本点个数 $n_\Omega=P_7^3$，而 A 中包含的样本点个数 $n_A=C_3^1\cdot P_5^2\cdot P_2^1$。因为 P_5^2；P_2^1 是表示先抽到 2 个正品，后抽到 1 个次品的样本点个数，但按题意，我们仅仅要求抽取 3 个中有 2 个正品，1 个次品就可以了。因此可以是（正正次）也可以是（正次正）或（次正正），这种情况与好比有三个位置，取 2 个填正，余下 1 个填次的组合数相同。而

$$C_3^1=\frac{3!}{2!\cdot 1!},$$

因此，

$$p(A)=\frac{3!\cdot P_5^2\cdot P_2^1}{2!\cdot 1!\cdot P_7^3}=\frac{C_5^2\cdot C_2^1}{C_7^3}。$$

（2）放回地抽取。

由于对样本空间中样本点计数时，1 至 7 号产品允许重复，而我们只考虑其排列数（允许重复的组合计数不予介绍），这时，$n_\Omega=7^3$。A 中包含样本点的个数，$n_A=C_3^1\cdot 5^2\cdot 2^1$，因为 $5^2\cdot 2^1$ 是先抽到 2 个正品后抽到 1 个次品的样本点的个数，但按题意，仅要求抽取 3 个中有 2 个正品 1 个次品就符合要求，因此还要乘以系数

$$C_3^1=\frac{3!}{2!\ \cdot 1!},\quad \text{所以 } p(A)=\frac{C_3^1\cdot 5^2\cdot 2^1}{7^3}。$$

1.1.4 条件概率、事件的独立性、乘法公式

在实际问题中，除了要知道事件 A 的概率 $p(A)$ 外，有时还需要知道在事件 B 发生条件下，事件 A 的概率，记作：$p(A|B)$。

先用频率来分析一下，怎样来定义 $p(A|B)$。

设 A、B 是某一随机试验中的两个事件，在 n 次试验中，事件 B、AB 各发生了 r_B，r_{AB}，次。这时事件 B 已发生条件下的试验发生 rB 次，其中事件 A 发生了 r_{AB}次。所以，

$$\text{事件 } B \text{ 发生条件下 } A \text{ 发生的频率}=\frac{r_{AB}}{r_B}=\frac{\frac{r_{AB}}{n}}{\frac{r_B}{n}}=\frac{AB\text{ 发生的频率}}{B\text{ 发生的频率}}。$$

因此，我们定义：设 A、B 是两个事件，$p(B)>0$，称

$$p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(B)}$$

为事件 B 发生条件下，事件 A 的条件概率。

【例 1.5】 7 个产品，其中 5 个正品 2 个次品，从中不放回地抽取，求：

(1) 第一次抽到正品的概率。

(2) 第二次抽到正品的概率。

(3) 二次都抽到正品的概率。

(4) 第一次抽到正品条件下第二次抽到正品的概率。

解：(1) 设第一次抽到正品的事件为 A_1。则

$$p(A_1)=\frac{5}{7}。$$

(2) 设第二次抽到正品的事件为 A_2。

A_2 为第一次产品第二次正品。$n_\Omega=P_7^2$，$n_{A_2}=P_5^1\cdot P_6^1$ 相当于两个空格，先在后一格里放 1 至 5 号中一个，再在 1 至 7 号中余下 6 个数码中放入前一格。所以，

$$p(A_2)=\frac{P_5^1\cdot P_6^1}{P_7^2}=\frac{5}{7}。$$

也就是说明。在其他次数抽到正品还是次品未知的条件下，第一次还是第二次抽到正品的概率是相同的。

(3) 两次都抽到正品的事件为 A_1A_2。则

$$p(A_1A_2)=\frac{P_5^2}{P_7^2}=\frac{5\times4}{7\times6}。$$

(4) 第一次抽到正品条件下，第二次抽到正品的概率。

$$p(A_2|A_1)=\frac{p(A_1A_2)}{p(A_1)}=\frac{\dfrac{5\times4}{7\times6}}{\dfrac{5}{7}}=\frac{4}{6}。$$

也可以从变化了的样本空间中直接求 $p(A_2|A_1)$，因为抽去一个正品以后，变化了的样本空间中的只有 6 个产品了，其中 4 个正品 2 个次品。所以，

$$p(A_2|A_1)=\frac{4}{6}。$$

注意，一般求条件概率都从变化了的样本空间中直接求，而不用公式 $p(A|B)=p(AB)/pB$ 去计算。

下面介绍概率论中一个很重要的概念，即事件的独立性。

定义：若事件 B 发生，对事件 A 发生的概率没有影响，即：$p(A|B)=p(A)$。称事件 A 对事件 B 独立。

在上例中如改为放回地抽样，A_1 与 A_2 独立，因为第一次抽出的又放回了，则第二次抽样仍面临 5 个正品、2 个次品。因此

$$p(A_2|A_1)=\frac{5}{7}=p(A_2)。$$

判别两个事件独立，一般不依靠公式而是依靠经验。

例如：两人打靶，各人中靶与否是相互独立的。在工厂里两台机床开与停也是相互独立的。在抽样时，放回地抽取各次抽取发生的事件也是相互独立的。

当在一大批产品中抽取很少的数量的产品，即使抽取不放回，各次抽样之间也近似看作是独立的。

总之，世界上每时每刻都发生着各种随机事件，它们之间绝大多数相互都是独立的。

下面介绍与条件概念有密切关系的概率的乘法公式。

由 $p(A|B)=\dfrac{p(AB)}{p(B)}$ 立即可以得到乘法公式：

$$p(AB)=p(A|B)\cdot p(B)\qquad 当\ p(B)>0,$$

或 $$p(BA)=p(B|A)\cdot p(A)\qquad 当\ p(A)>0。$$

当 A 与 B 独立时，B 与 A 也独立，因为

$$p(A|B)=p(A),\ p(B|A)=p(B),$$

所以， $$p(A|B)=p(A)\cdot p(B)。$$

【例 1.6】 在 5 个正品 2 个次品的 7 个产品中抽取 2 个，都是正品的概率。

解：设抽到第一个正品事件为 A_1，抽到第二个正品的事件为 A_2。当抽取不放回时，两次抽取不独立。则

$$p(A_1A_2)=p(A_1)\cdot p(A_2|A_1)=\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}。$$

当抽取后放回再抽，则两次抽取是独立的。

$$p(A_1A_2)=p(A_1)\cdot p(A_2)=\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}。$$

【例 1.7】 甲乙两人对同一目标射击，甲击中目标的概率是 0.9，乙击中目标的概率是 0.7，甲乙两人各射击一次，求两人都击

中目标的概率及目标至少被一人击中的概率。

解：设甲击中目标事件为 A，乙击中目标事件为 B。两事件互相独立。则甲乙都击中目标的事件为 AB，目标至少被一人击中事件为 $A\cup B$。

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B)=0.9\times 0.7=0.63;$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(AB)=0.9+0.7-0.63=0.97。$$

或
$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\ \overline{B})=1-(1-0.9)\times(1-0.7)=0.97。$$

A 与 B 独立，但 A 与 B 并不互斥，应注意这两个重要概念的区别。

【例1.8】 对同一目标进行三次射击，第一、二、三次射击命中的概率分别为0.4、0.5、0.7，求三次射击中恰有一次命中的概率和目标被击中的概率。

解："恰有一次击中"是指第一次命中（用 A_1表示）而另两次落空，或第二次命中（用 A_2表示）而另两次落空，或第三次命中（用 A_3表示）而另两次落空。

即 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$由于三次射击互相独立，而第 i 次击中另两次落空的事件之间又是互斥的($i=1,2,3$)。所以，

$$\begin{aligned}&p(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=p(A_1)\cdot p(\overline{A}_2)\cdot p(\overline{A}_3)+p(\overline{A}_1)\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A}_3)\\&\quad+p(\overline{A}_1)\cdot p(\overline{A}_2)\cdot p(A_3)\\&=0.4\times(1-0.5)\times(1-0.7)+(1-0.4)\times 0.5\times(1-0.7)\\&\quad+(1-0.4)\times(1-0.5)\times 0.7=0.36。\end{aligned}$$

"目标被击中"是指"恰有一次击中"与"恰有两次击中"与"三次都击中"之和，可以表达为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$，也可以表达为三次都没有击中的逆事件，即：$\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3=A_1\cup A_2\cup A_3$，显然用后一表达计算较简

单。所以，

$$
\begin{aligned}
p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= p(\Omega) - p(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \\
&= 1 - p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot p(\overline{A}_3) \\
&= 1 - (1-0.4) \times (1-0.5) \times (1-0.7) \\
&= 0.91。
\end{aligned}
$$

【例1.9】 市场上某种产品由甲、乙两厂生产，甲厂产品占市场产品的$\frac{2}{3}$，乙厂产品占市场的$\frac{1}{3}$，已知甲厂的次品率为0.1，乙厂的次品率是0.2，今从市场上任取一产品求取得次品的概率。

解：设 A_1表示抽到甲厂产品的事件，A_2表示抽到乙厂产品的事件。则 $A_1 + A_2 = \Omega$，Ω 为全部市场产品，即 A_1、A_2对 Ω 构成一个划分。又设 B 为抽到次品的事件。则

$$p(A_1) = \frac{2}{3},\ p(A_2) = \frac{1}{3},\ p(B|A_1) = 0.1,\ p(B|A_2) = 0.2;$$

$$B = B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2,$$

$$
\begin{aligned}
p(B) &= p(BA_1) + p(BA_2) \\
&= p(A_1) \cdot p(B|A_1) + p(A_2) \cdot p(B|A_2) \\
&= \frac{2}{3} \times 0.1 + \frac{1}{3} \times 0.2 = \frac{2}{15}。
\end{aligned}
$$

上例中求 $p(B)$的方法，可以解决一些较难的概率问题，称为全概率公式。

全概率公式：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 对某一样本空间 Ω 构成一个划分，$p(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，并且 B 是样本空间 Ω 之下一个事件，

则，

$$
\begin{aligned}
p(B) &= p(A_1) \cdot p(B|A_1) + \cdots + p(A_n) \cdot p(B|A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(B|A_i)。
\end{aligned}
$$

【例1.10】 在上例中，求若从市场上抽到次品，求该次品是甲厂生产的概率。