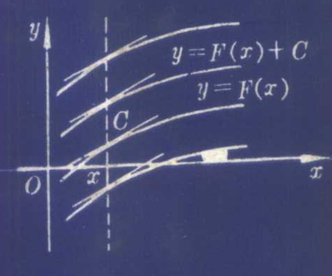


职工高等工业专科学校教材

高等数学

★〔下册〕

吴兰芳 主编

高等教育出版社

职工高等工业专科学校教材

高等数学

下册

吴兰芳 主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据原教育部1983年审订的"职工高等工业专科学校《高等数学教学大纲》(草案)"编写的.

全书分上、下两册出版. 上册内容包括函数与极限，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程. 下册内容包括矢量代数与空间解析几何，多元函数的微分学，多元函数的积分学，无穷级数. 每节末均配置适当的习题，书末附有习题答案.

职工高等工业专科学校教材

高 等 数 学

下 册

吴兰芳 主编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 9.5 字数 217 000

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数 0 001—7 130

ISBN7-04-000235-3/O·274

书号 13010·01489 定价1.75元

目　录

第七章　矢量代数与空间解析几何

空间解析几何主要是用代数方法来研究空间形式和数量关系的．矢量是研究空间解析几何的重要工具，它在数学、物理、力学及其他科学中都有广泛的应用．本章首先介绍矢量的概念及其代数运算，然后讨论空间解析几何中的平面和直线，空间曲面和空间曲线等有关问题．

§7.1　矢量及其运算

1. 矢量的概念

在研究物理、力学等问题时，会遇到两种不同类型的量．一种是用数表示的量，叫做**数量**或**标量**．如质量、密度、温度、时间、面积、体积等．另一种是用数和方向表示的量，叫做**矢量**或**向量**．如力、位移、速度、加速度等．

矢量可用一条有向线段来表示．线段的长度表示矢量的大小，线段的方向表示矢量的方向，并用箭头表示．起点为 M_1，终点为 M_2 的矢量，记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$．矢量也可用黑体字母表示，比如 $\boldsymbol{a}$，如图 7-1．

图　7-1

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小叫做矢量的**模**，记为 $|\boldsymbol{a}|$．

模等于 1 的矢量，叫做**单位矢量**．

模等于零的矢量，叫做**零矢量**，记为 $\boldsymbol{0}$．规定零矢量的方向是任意的．

如果两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同（两矢量平行或共线且有相同的指向），就说这两个矢量**相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．矢量相等的两个条件缺一不可，否则这两个矢量就不相等．矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$

不相等时，记为 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$.

根据两矢量相等的定义，一个矢量平行移动后，仍与原来的矢量相等. 因此，矢量的起点可以放在空间的任何一点. 这种不考虑起点位置的矢量叫做**自由矢量**. 本章主要研究自由矢量，今后，自由矢量简称为矢量.

如果矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，但方向相反，则矢量 $\boldsymbol{a}$ 叫做矢量 $\boldsymbol{b}$ 的**负矢量**，记为 $-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$. 同样 $\boldsymbol{b}$ 也是 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量，即 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.

2. 矢量的加、减法

(1) 矢量的加法

根据力学的力的合成法则，定义两矢量的加法如下：

设有两矢量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，则以这两矢量为邻边的平行四边形的对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$(图 7-2)叫做矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和，记为

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}.$$

这样定义两矢量之和的方法叫做**平行四边形法则**.

如果矢量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 共线，那么定义它们的和为如下的一个矢量. 当两矢量的指向相同时，它们之和的方向与原来两矢量的指向相同，而模等于原来两矢量的模之和；当两矢量的指向相反时，它们之和的方向与模较大的矢量的方向相同，而模等于原来两矢量的模之差.

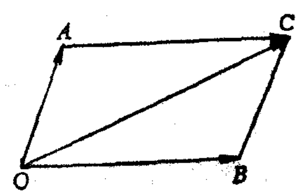


图 7-2

根据两矢量相等的定义及平行四边形的性质，由图 7-2 可知，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$. 如果把第二个矢量 $\overrightarrow{OB}$ 的起点平移到第一个矢量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A，那么以第一个矢量的起点 O 为起点，以第二个矢量的终

点 C 为终点的矢量 $\overrightarrow{OC}$ 就是矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和. 这种求两矢量的和的方法叫做**三角形法则**.

(2) 矢量加法的运算律

1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

矢量加法满足交换律容易从两矢量加法定义得到证明. 现证明结合律.

由矢量加法的三角形法则, 先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 再与 $\boldsymbol{c}$ 相加便得到它们的和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$(图 7-3). 由图可知, 将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加, 也得到同一结果. 因此结合律成立.

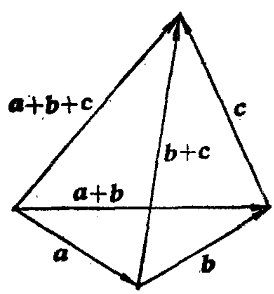


图 7-3

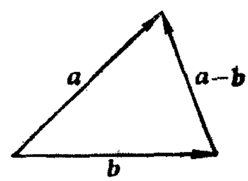


图 7-4

(3) 矢量的减法

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 之差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 定义为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, 即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

根据定义, 求矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差就是求矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负矢量 $-\boldsymbol{b}$ 的和. 因此, 将 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平移, 使它们的起点重合在一起, 这样由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点所成的矢量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 7-4).

3. 矢量的数乘

设 λ 是一常数, λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$(简称矢量的数乘)规定如下:

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向且模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$ 的矢量；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零矢量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 反向且模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$ 的矢量.

特别，当 $\boldsymbol{a}$ 乘以 -1 时，矢量 $(-1)\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，但方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 所以，$(-1)\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量，即

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

由矢量的数乘规定不难得到下述性质. 两个非零矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件(简称充要条件)为 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$(数 $\lambda\neq0$)，或者存在不全为零的数 λ_1,λ_2，使得 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=0$.

对于非零矢量 $\boldsymbol{a}$，特别有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, \tag{7-1}$$

即

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \tag{7-2}$$

其中 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位矢量.

矢量数乘的运算律

1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

由矢量的数乘规定知道，矢量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$、$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$、$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是同向的平行矢量. 又因为

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以
$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

类似地可证明下面的分配律.

2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

例 1 已知平行四边形 $ABCD$，记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，对角线 AC 与 BD 的交点为 M (图 7-5). 试用矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示矢量 $\overrightarrow{MA}$、

$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$.

解 因为平行四边形的对角线相互平分，所以由平行四边形法则知，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$. 于是

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因为 $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{MC}$,

所以 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

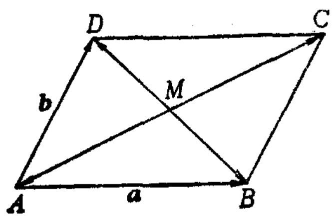


图 7-5

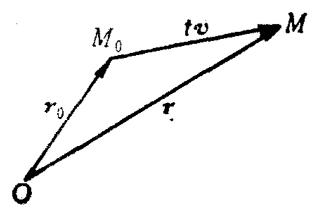


图 7-6

由三角形法则得

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\ \overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

例 2 设空间一质点从 $t=0$ 开始由点 M_0 处以速度 $\boldsymbol{v}$ 作直线运动，试求质点在任一时刻的位置 M 与时间 t 的关系式.

解 在空间中任取异于点 M_0 的一点 O，并记 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$(图 7-6).

显然，$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{v}$. 由三角形法则知道

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}.$$

这就是所求的关系式.

例 3 证明不共线的三非零矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成三角形的充要条件是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

证明 必要性 设矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成$\triangle ABC$(图 7-7). 由三角形法则知道

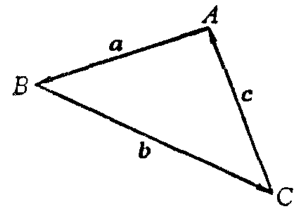


图 7-7

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}.$$

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

充分性 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 连接 C, A 得矢量 $\overrightarrow{CA}$. 由于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线,所以矢量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CA}$ 构成$\triangle ABC$. 因此

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0},$$

所以 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}.$$

又已知 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

将上面两式相减, 得 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$. 从而此不共线的三非零矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 构成三角形.

习 题 7.1

1. 矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 分别满足什么条件,才能使下列各式成立?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; (4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$; (6) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(7) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

2. 化简 $(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,其中 x, y 为数量.

3. 已知 $\boldsymbol{x}-\dfrac{1}{2}\left[\boldsymbol{x}-\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right]=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$,试求矢量 $\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为已知矢量.

4. 已知平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 的中点分别为 K 和 L, 且

$\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{l}$，试求 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.

5. 设M为有向线段 AB 上任意一点，若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}(\lambda\neq-1)$，则对任一点 O，有

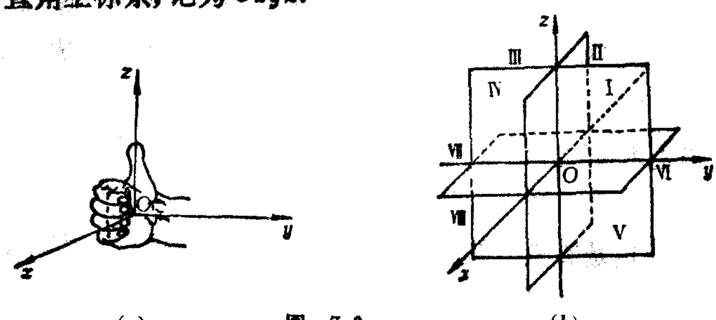
$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.$$

6. 把三角形的三条中线看作自由矢量，证明它们构成一个三角形.

§7.2 矢量的坐标表示法

1. 空间直角坐标系

过空间一定点 O，作三条具有相同长度单位且互相垂直的数轴，分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**，O 叫做**坐标原点**. 通常把 x 轴和 y 轴放在水平面上，z 轴是铅垂的. 它们的正方向符合右手法则，即当右手握拳时，如果四个手指的方向表示从 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转到 y 轴的正向，那么大姆指的指向就是 z 轴的正向（图 7-8(a)）. 这样的三条坐标轴构成一个**空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$.



(a) 图 7-8 (b)

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样的平面共有三个，即 xOy 平面，yOz 平面和 zOx 平面，统称为**坐标平面**. 三个坐标平面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**. 图 7-8(b) 中标出了 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 八个卦限.

取定了空间直角坐标系以后，就可以建立空间的点与有序数组之间的一一对应关系.

(1) 空间点的坐标

设 M 为空间的一个点，过点 M 作三个平面 π_1，π_2 和 π_3 分别垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴. 它们与 x 轴，y 轴和 z 轴的交点分别为 P, Q 和 R(图7-9). 如果把这三个点在 x 轴，y 轴和 z 轴上的坐标分别记为 x, y 和 z，那么空间的一点 M 就唯一地确定一个有序数组 (x, y, z). 反过来，如果把一个有序数组 (x, y, z) 看作是 x 轴，y 轴和 z 轴上的点 P、Q 和 R 的坐标，过点 P, Q 和 R 分别作 x 轴，y 轴和 z 轴的垂直平面 π_1，π_2 和 π_3，那么这三个垂直平面相交于唯一的一个点 M，即有序数组 (x, y, z) 确定空间唯一的一点 M. 综上所述，有序数组 (x, y, z) 与空间的一个点 M 存在一一对应关系. 这样的有序数组 (x, y, z) 叫做点 M 的**坐标**，并分别把 x, y 和 z 叫做点 M 的**横坐标**，**纵坐标**和**竖坐标**. 坐标为 (x, y, z) 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

(2) 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两已知点. 过点 M_1，M_2 各作三个平面分别垂直于 x, y 和 z 轴，这六个平面构成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 7-10 所示.

由于 $\triangle M_1NM_2$ 是直角三角形，$\angle M_1NM_2$ 是直角，所以

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2.$$

又 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形，且 $|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2$，故又有

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

而
$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$
$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$
$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|.$$

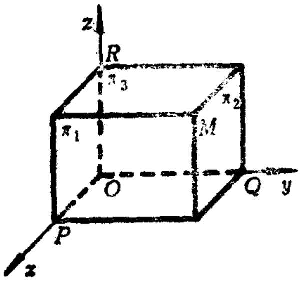


图 7-9

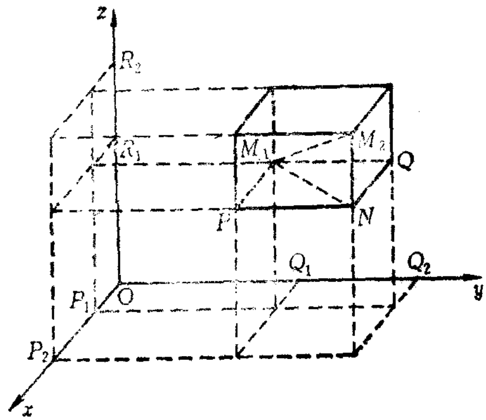


图 7-10

于是得 M_1 与 M_2 两点间距离的坐标表示式

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7-3}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $(0,0,0)$ 间的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{7-4}$$

例 1 求证以 $M_1(2,4,3)$，$M_2(4,1,9)$，$M_3(10,-1,6)$ 三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明 根据两点间的距离公式(7-3)，有

$$|M_1M_2|^2=(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2=49,$$

$$|M_2M_3|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49,$$

$$|M_3M_1|^2=(2-10)^2+(4-(-1))^2+(3-6)^2=98.$$

由于 $|M_1M_2|=|M_2M_3|$ 和 $|M_1M_2|^2+|M_2M_3|^2=|M_3M_1|^2$，所以 $\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰直角三角形.

例 2 求点 $M(-4,3,5)$ 到 y 轴的距离.

解 过点 M 作平面垂直于 y 轴，设交点为 M_1，则点 M 到 y 轴的距离就是点 M 与 M_1 间的距离. 又因为点 M_1 是点 M 在 y 轴上的垂足，所以点 M_1 的坐标为 $M_1(0,3,0)$. 于是

$$|MM_1|=\sqrt{(0+4)^2+(3-3)^2+(0-5)^2}=\sqrt{41}.$$

2. 矢量的坐标表示法

(1) 矢量在轴上的投影

首先我们定义两矢量间的夹角. 把矢量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的起点都放在点$S$处(图 7-11), 把它们所成的角 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 叫做**矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**, 记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

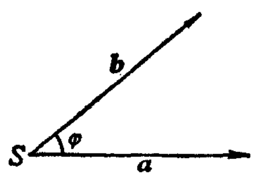


图 7-11

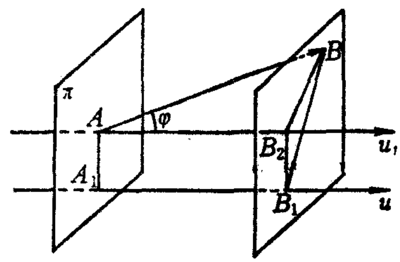


图 7-12

其次, 定义矢量在轴上的投影. 设已知空间一点A及一轴u, 过点A作与轴u垂直的平面π, 把平面π与轴u的交点A_1叫做**点A在轴u上的投影**(图 7-12). 又设$\overrightarrow{AB}$是已知矢量, 它的起点A和终点B在轴u上的投影分别为A_1和B_1, 则轴u上的有向线段$\overline{A_1B_1}$的数值A_1B_1叫做**矢量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影**, 记为$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$. 这样就有$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A_1B_1$. 这里把轴$u$叫做**投影轴**.

关于矢量的投影有以下两个性质.

定理 1 矢量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影等于矢量的模乘以轴与矢量的夹角φ的余弦, 即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi. \tag{7-5}$$

证明 如图 7-12, 过矢量$\overrightarrow{AB}$的起点A引轴u_1, 使它与轴u平行且有相同的指向. 这时轴u与矢量$\overrightarrow{AB}$的夹角φ等于轴u_1与矢

量 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角，且有

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_{u_1}\overrightarrow{AB}.$$

但$\mathrm{Prj}_{u_1}\overrightarrow{AB}=AB_2=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$，所以

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

由矢量在轴上投影的定义与式(7-5)可得

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}\begin{cases}>0, & 0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2},\\ =0, & \varphi=\dfrac{\pi}{2},\\ <0, & \dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi.\end{cases}$$

另外，如果$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，那么由矢量相等的定义及两矢量夹角的定义有 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{CD}$，即相等矢量在同一轴上的投影相等.

定理 2 有限个矢量的和在轴上的投影等于各个矢量在该轴上的投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n. \tag{7-6}$$

这个定理可根据矢量在轴上投影的定义来证明，这里就从略了.

例 3 设 P_1，P_2 是某一矢量的起点和终点在轴 u 上的投影，且它们在轴 u 上的坐标分别为 u_1 和 $u_2(u_1\neq u_2)$，$\boldsymbol{u}^0$ 为 u 轴上的单位矢量. 试验证

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(u_2-u_1)\boldsymbol{u}^0. \tag{7-7}$$

证明 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 u 轴同向或反向两种情况验证.

当 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\boldsymbol{u}^0$ 同向时，则 $u_2-u_1>0$，故 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与$(u_2-u_1)\,\boldsymbol{u}^0$