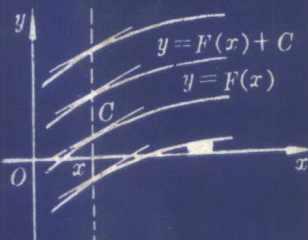


828578

31

2644 I
T.2



职工高等工业专科学校教材

高等数学

★〔下册〕

吴兰芳 主编

高等教育出版社

职工高等工业专科学校教材

高等数学

下册

吴兰芳 主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据原教育部 1983 年审订的“职工高等工业专科学校《高等数学》教学大纲》(草案)”编写的。

全书分上、下两册出版。上册内容包括函数与极限, 导数与微分, 中值定理与导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用, 微分方程。下册内容包括矢量代数与空间解析几何, 多元函数的微分学, 多元函数的积分学, 无穷级数。每节末均配置适当的习题, 书末附有习题答案。

职工高等工业专科学校教材

高 等 数 学

下 册

吴兰芳 主编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 9.5 字数 217 000

1987 年 10 月第 1 版 1987 年 10 月第 1 次印刷

印数 0 001—7 130

ISBN7-01-000235-3/O·274

书号 13010·01489 定价 1.75 元

目 录

第七章 矢量代数与空间解析几何	1
§ 7.1 矢量及其运算	1
1. 矢量的概念(1) 2. 矢量的加、减法(2) 3. 矢量的数乘(3)	
习题 7.1(6)	
§ 7.2 矢量的坐标表示法	7
1. 空间直角坐标系(7) 2. 矢量的坐标表示法(10) 3. 矢量的模、方向余弦与方向数(15) 习题 7.2(19)	
§ 7.3 数量积·矢量积·混合积	21
1. 两矢量的数量积(21) 2. 两矢量的矢量积(25) *3. 矢量的混合积(30) 习题 7.3(32)	
§ 7.4 平面与空间直线	34
1. 曲面的方程(34) 2. 平面的方程(34) 3. 空间直线的方程(41)	
习题 7.4(47)	
§ 7.5 曲面与空间曲线	50
1. 旋转曲面(50) 2. 柱面(54) 3. 空间曲线(56)	
习题 7.5(63)	
§ 7.6 二次曲面	64
1. 椭球面及抛物面(64) *2. 空间区域的图形(68) 习题 7.6(70)	
小结(70)	
第八章 多元函数的微分学	76
§ 8.1 二元函数概念	76
1. 二元函数的定义(76) 2. 二元函数的极限(77) 3. 二元函数的连续性(79) 习题 8.1(81)	
§ 8.2 偏导数	83
1. 偏导数概念(83) 2. 高阶偏导数(88) 习题 8.2(90)	
§ 8.3 全微分	92
1. 全微分概念(92) 2. 全微分的几何意义(95) 3. 全微分的应用(96) 习题 8.3(98)	

§ 8.4 多元复合函数的微分法	98
1. 复合函数的微分法(98) 2. 一阶全微分的形式不变性(104) 3. 隐函数的微分法(105) 习题 8.4(108)	
§ 8.5 偏导数的几何应用	110
1. 空间曲线的切线与法平面(110) 2. 曲面的切平面与法线(113) 习题 8.5(116)	
§ 8.6 多元函数的极值	116
1. 极值(116) 2. 最大值与最小值(120) *3. 条件极值·拉格朗日乘数法(123) 习题 8.6(128) 小结(129)	
第九章 多元函数的积分学	133
§ 9.1 二重积分概念	133
1. 二重积分的定义(133) 2. 二重积分的性质(136) 习题 9.1(139)	
§ 9.2 二重积分的计算	141
1. 直角坐标系中的算法(141) 2. 极坐标系中的算法(147) 习题 9.2(151)	
§ 9.3 二重积分的应用	153
1. 曲面面积(153) 2. 重心(155) 3. 转动惯量(158) 习题 9.3(160)	
*§ 9.4 三重积分	161
1. 三重积分的定义(161) 2. 三重积分的计算(163) 习题 9.4(174)	
§ 9.5 曲线积分	175
1. 对弧长的曲线积分(175) 2. 对坐标的曲线积分(180) 3. 两类曲线积分的关系(185) 习题 9.5(186)	
§ 9.6 格林公式·曲线积分与路径无关条件	187
1. 格林公式(187) 2. 曲线积分与路径无关条件(191) 习题 9.6(195)	
§ 9.7 曲面积分	197
1. 曲面积分概念(197) 2. 曲面积分计算举例(201) 3. 两类曲面积分的关系(206) 习题 9.7(206) 小结(208)	
第十章 无穷级数	212

§ 10.1 常数项级数	212
1. 无穷级数概念(212) 2. 无穷级数的基本性质(214)	
习题 10.1(217)	
§ 10.2 常数项级数审敛法	218
1. 正项级数的审敛法(218) 2. 任意项级数(222)	
习题 10.2(226)	
* § 10.3 广义积分审敛法	227
1. 积分区间为无穷的广义积分审敛法(227)	
2. 被积函数具有无穷间断点的广义积分的审敛法(230)	
习题 10.3(231)	
§ 10.4 幂级数	232
1. 幂级数的收敛半径(233) 2. 幂级数的性质(236)	
习题 10.4(238)	
§ 10.5 泰勒(Taylor)级数	239
§ 10.6 函数的幂级数展开式	242
1. 直接展开法(242) 2. 间接展开法(244) 3. 应用举例(247)	
习题 10.5—10.6(252)	
^A § 10.7 傅立叶(Fourier)级数	253
1. 三角函数系的正交性(253) 2. 傅立叶级数(254) 3. 正弦级数和余弦级数(262) 4. 傅立叶级数的复数形式(269)	
习题 10.7(270) 小结(271)	
习题答案	276

第七章 矢量代数与空间解析几何

空间解析几何主要是用代数方法来研究空间形式和数量关系的。矢量是研究空间解析几何的重要工具，它在数学、物理、力学及其他科学中都有广泛的应用。本章首先介绍矢量的概念及其代数运算，然后讨论空间解析几何中的平面和直线，空间曲面和空间曲线等有关问题。

§ 7.1 矢量及其运算

1. 矢量的概念

在研究物理、力学等问题时，会遇到两种不同类型的量。一种是用数表示的量，叫做数量或标量。如质量、密度、温度、时间、面积、体积等。另一种是用数和方向表示的量，叫做矢量或向量。如力、位移、速度、加速度等。

矢量可用一条有向线段来表示。线段的长度表示矢量的大小，线段的方向表示矢量的方向，并用箭头表示。起点为 M_1 ，终点为 M_2 的矢量，记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 。矢量也可用黑体字母表示，比如 $\mathbf{a}$ ，如图 7-1。

矢量 $\mathbf{a}$ 的大小叫做矢量的模，记为 $|\mathbf{a}|$ 。

模等于 1 的矢量，叫做单位矢量。

模等于零的矢量，叫做零矢量，记为 $\mathbf{0}$ 。规定零矢量的方向是任意的。

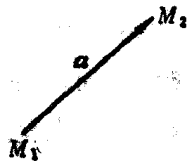


图 7-1

如果两个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的模相等，方向相同（两矢量平行或共线且有相同的指向），就说这两个矢量相等，记为 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。矢量相等的两个条件缺一不可，否则这两个矢量就不相等。矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$

不相等时,记为 $a \neq b$.

根据两矢量相等的定义,一个矢量平行移动后,仍与原来的矢量相等.因此,矢量的起点可以放在空间的任何一点.这种不考虑起点位置的矢量叫做自由矢量.本章主要研究自由矢量,今后,自由矢量简称为矢量.

如果矢量 a 和 b 的模相等,但方向相反,则矢量 a 叫做矢量 b 的负矢量,记为 $-b$,即 $a = -b$.同样 b 也是 a 的负矢量,即 $b = -a$.

2. 矢量的加、减法

(1) 矢量的加法

根据力学的力的合成法则,定义两矢量的加法如下:

设有两矢量 $\vec{OA}$ 和 $\vec{OB}$,则以这两矢量为邻边的平行四边形的对角线矢量 $\vec{OC}$ (图 7-2) 叫做矢量 $\vec{OA}$ 与 $\vec{OB}$ 的和,记为

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}.$$

这样定义两矢量之和的方法叫做平行四边形法则.

如果矢量 $\vec{OA}$ 和 $\vec{OB}$ 共线,那么定义它们的和为如下的一个矢量.当两矢量的指向相同时,它们之和的方向与原来两矢量的指向相同,而模等于原来两矢量的模之和;当两矢量的指向相反时,它们之和的方向与模较大的矢量的方向相同,而模等于原来两矢量的模之差.

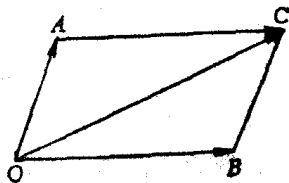


图 7-2

根据两矢量相等的定义及平行四边形的性质,由图 7-2 可知,

$\vec{OB} = \vec{AC}$. 如果把第二个矢量 $\vec{OB}$ 的起点平移到第一个矢量 $\vec{OA}$ 的终点 A ,那么以第一个矢量的起点 O 为起点,以第二个矢量的终

点 C 为终点的矢量 $\overrightarrow{OC}$ 就是矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和. 这种求两矢量的和的方法叫做三角形法则.

(2) 矢量加法的运算律

1) 交换律 $a + b = b + a$;

2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$.

矢量加法满足交换律容易从两矢量加法定义得到证明. 现证明结合律.

由矢量加法的三角形法则, 先作 $a + b$, 再与 c 相加便得到它们的和 $(a + b) + c$ (图 7-3). 由图可知, 将 a 与 $b + c$ 相加, 也得到同一结果. 因此结合律成立.

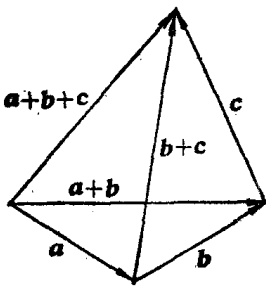


图 7-3

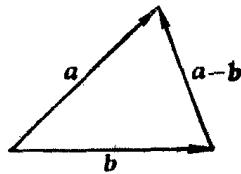


图 7-4

(3) 矢量的减法

矢量 a 与矢量 b 之差 $a - b$ 定义为 $a + (-b)$, 即

$$a - b = a + (-b).$$

根据定义, 求矢量 a 与 b 的差就是求矢量 a 与 b 的负矢量 $-b$ 的和. 因此, 将 a, b 平移, 使它们的起点重合在一起, 这样由 b 的终点到 a 的终点所成的矢量就是 $a - b$ (图 7-4).

3. 矢量的数乘

设 λ 是一常数, λ 与矢量 a 的乘积 λa (简称矢量的数乘) 规定如下:

当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 是与 $\mathbf{a}$ 同向且模为 $|\lambda \mathbf{a}| = \lambda |\mathbf{a}|$ 的矢量;

当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 是零矢量, 即 $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$;

当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 是一个与 $\mathbf{a}$ 反向且模为 $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$ 的矢量.

特别, 当 $\mathbf{a}$ 乘以 -1 时, 矢量 $(-1)\mathbf{a}$ 的模与 $\mathbf{a}$ 的模相等, 但方向与 $\mathbf{a}$ 相反. 所以, $(-1)\mathbf{a}$ 就是 $\mathbf{a}$ 的负矢量, 即

$$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

由矢量的数乘规定不难得到下述性质. 两个非零矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 平行的充分必要条件 (简称充要条件) 为 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ (数 $\lambda \neq 0$), 或者存在不全为零的数 λ_1, λ_2 , 使得 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

对于非零矢量 $\mathbf{a}$, 特别有

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}^0, \quad (7-1)$$

即

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \quad (7-2)$$

其中 $\mathbf{a}^0$ 表示与 $\mathbf{a}$ 同向的单位矢量.

矢量数乘的运算律

1) 结合律 $\lambda(\mu \mathbf{a}) = \mu(\lambda \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}$.

由矢量的数乘规定知道, 矢量 $\lambda(\mu \mathbf{a})$ 、 $\mu(\lambda \mathbf{a})$ 、 $(\lambda \mu) \mathbf{a}$ 都是同向的平行矢量. 又因为

$$|\lambda(\mu \mathbf{a})| = |\mu(\lambda \mathbf{a})| = |(\lambda \mu) \mathbf{a}| = |\lambda \mu| |\mathbf{a}|,$$

所以 $\lambda(\mu \mathbf{a}) = \mu(\lambda \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}$.

类似地可证明下面的分配律.

2) 分配律 $(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$;

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}.$$

例 1 已知平行四边形 $ABCD$, 记 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, 对角线 AC 与 BD 的交点为 M (图 7-5). 试用矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 表示矢量 $\overrightarrow{MA}$.

$\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$.

解 因为平行四边形的对角线相互平分, 所以由平行四边形法则知, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}$. 于是

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

又因为 $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MC}$,

所以 $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

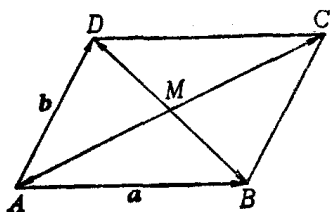


图 7-5

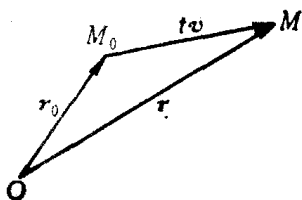


图 7-6

由三角形法则得

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

例2 设空间一质点从 $t=0$ 开始由点 M_0 处以速度 $\mathbf{v}$ 作直线运动, 试求质点在任一时刻的位置 M 与时间 t 的关系式.

解 在空间中任取异于点 M_0 的一点 O , 并记 $\overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r}_0$, $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ (图 7-6).

显然, $\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{v}$. 由三角形法则知道

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}.$$

这就是所求的关系式.

例3 证明不共线的三非零矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 构成三角形的充要条件是 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

证明 必要性 设矢量 a, b 和 c 构成 $\triangle ABC$ (图 7-7). 由三角形法则知道

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

即

$$a + b = -c.$$

所以

$$a + b + c = 0.$$

充分性 设 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{BC} = b$, 连接 C, A 得矢量 $\overrightarrow{CA}$. 由于 a, b 不共线, 所以矢量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CA}$ 构成 $\triangle ABC$. 因此

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0,$$

所以

$$a + b + \overrightarrow{CA} = 0.$$

又已知

$$a + b - c = 0,$$

将上面两式相减, 得 $\overrightarrow{CA} = c$. 从而此不共线的三非零矢量 a, b, c 构成三角形.

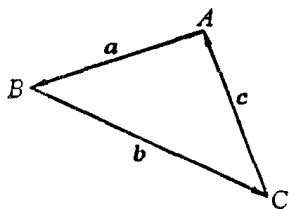


图 7-7

习 题 7.1

1. 矢量 a, b 分别满足什么条件, 才能使下列各式成立?

- (1) $|a+b| = |a-b|$; (2) $|a+b| > |a-b|$;
- (3) $|a+b| < |a-b|$; (4) $|a+b| = |a| + |b|$;
- (5) $|a+b| = |a| - |b|$; (6) $|a-b| = |a| + |b|$;

$$(7) \frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|}.$$

2. 化简 $(x-y)(a+b) - (x+y)(a-b)$, 其中 x, y 为数量.

3. 已知 $x - \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3}(x-a) \right] = \frac{1}{3}(x+b)$, 试求矢量 x , 其中 a, b 为已知矢量.

4. 已知平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 的中点分别为 K 和 L , 且

$\overrightarrow{AK} = k$, $\overrightarrow{AL} = l$, 试求 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.

5. 设 M 为有向线段 AB 上任意一点, 若 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB} (\lambda \neq -1)$, 则对任一点 O , 有

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}.$$

6. 把三角形的三条中线看作自由矢量, 证明它们构成一个三角形.

§ 7.2 矢量的坐标表示法

1. 空间直角坐标系

过空间一定点 O , 作三条具有相同长度单位且互相垂直的数轴, 分别叫做 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称为坐标轴, O 叫做坐标原点. 通常把 x 轴和 y 轴放在水平面上, z 轴是铅垂的. 它们的正方向符合右手法则, 即当右手握拳时, 如果四个手指的方向表示从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转到 y 轴的正向, 那么大拇指的指向就是 z 轴的正向 (图 7-8(a)). 这样的三条坐标轴构成一个空间直角坐标系, 记为 $Oxyz$.

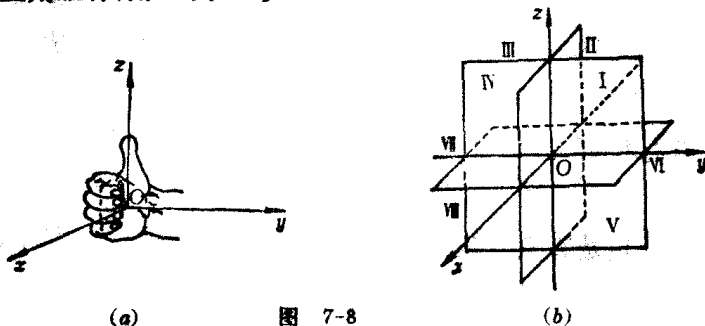


图 7-8

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样的平面共有三个, 即 xOy 平面, yOz 平面和 zOx 平面, 统称为坐标平面. 三个坐标平面把空间分成八个部分, 每一部分叫做一个卦限. 图 7-8(b) 中标出了 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 八个卦限.

取定了空间直角坐标系以后, 就可以建立空间的点与有序数组之间的一一对应关系.

(1) 空间点的坐标

设 M 为空间的一个点, 过点 M 作三个平面 π_1 , π_2 和 π_3 分别垂直于 x 轴, y 轴和 z 轴. 它们与 x 轴, y 轴和 z 轴的交点分别为 P , Q 和 R (图7-9). 如果把这三个点在 x 轴, y 轴和 z 轴上的坐标分别记为 x , y 和 z , 那么空间的一点 M 就唯一地确定一个有序数组 (x, y, z) . 反过来, 如果把一个有序数组 (x, y, z) 看作是 x 轴, y 轴和 z 轴上的点 P , Q 和 R 的坐标, 过点 P , Q 和 R 分别作 x 轴, y 轴和 z 轴的垂直平面 π_1 , π_2 和 π_3 , 那么这三个垂直平面相交于唯一的一个点 M , 即有序数组 (x, y, z) 确定空间唯一的一点 M . 综上所述, 有序数组 (x, y, z) 与空间的一个点 M 存在一一对应关系. 这样的有序数组 (x, y, z) 叫做点 M 的坐标, 并分别把 x , y 和 z 叫做点 M 的横坐标, 纵坐标和竖坐标. 坐标为 (x, y, z) 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

(2) 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两已知点. 过点 M_1 , M_2 各作三个平面分别垂直于 x , y 和 z 轴, 这六个平面构成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体, 如图 7-10 所示.

由于 $\triangle M_1NM_2$ 是直角三角形, $\angle M_1NM_2$ 是直角, 所以

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2.$$

又 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形, 且 $|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2$, 故又有

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

而

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

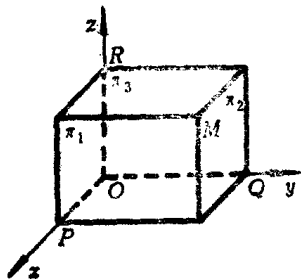


图 7-9

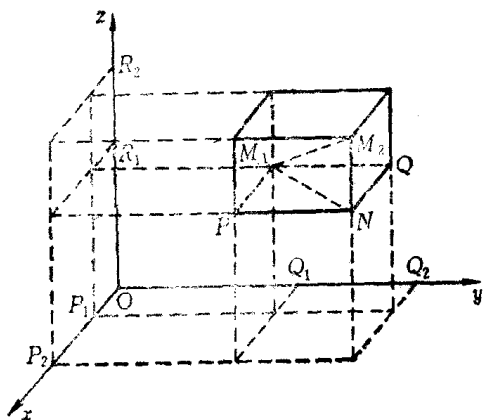


图 7-10

于是得 M_1 与 M_2 两点间距离的坐标表示式

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (7-3)$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 与原点 $(0, 0, 0)$ 间的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (7-4)$$

例 1 求证以 $M_1(2, 4, 3)$, $M_2(4, 1, 9)$, $M_3(10, -1, 6)$ 三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明 根据两点间的距离公式(7-3), 有

$$|M_1 M_2|^2 = (4-2)^2 + (1-4)^2 + (9-3)^2 = 49,$$

$$|M_2 M_3|^2 = (10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2 = 49,$$

$$|M_3 M_1|^2 = (2-10)^2 + (4-(-1))^2 + (3-6)^2 = 98.$$

由于 $|M_1 M_2| = |M_2 M_3|$ 和 $|M_1 M_2|^2 + |M_2 M_3|^2 = |M_3 M_1|^2$, 所以 $\triangle M_1 M_2 M_3$ 是等腰直角三角形.

例 2 求点 $M(-4, 3, 5)$ 到 y 轴的距离.

解 过点 M 作平面垂直于 y 轴, 设交点为 M_1 , 则点 M 到 y 轴的距离就是点 M 与 M_1 间的距离. 又因为点 M_1 是点 M 在 y 轴上的垂足, 所以点 M_1 的坐标为 $M_1(0, 3, 0)$. 于是

$$|MM_1| = \sqrt{(0+4)^2 + (3-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{41}.$$

2. 矢量的坐标表示法

(1) 矢量在轴上的投影

首先我们定义两矢量间的夹角. 把矢量 α, b 的起点都放在点 S 处(图 7-11), 把它们所成的角 φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) 叫做矢量 α 与 b 的夹角, 记为 (α, b) 或 (b, α) .

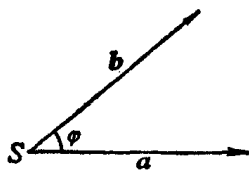


图 7-11

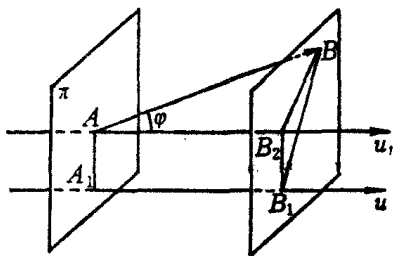


图 7-12

其次, 定义矢量在轴上的投影. 设已知空间一点 A 及一轴 u , 过点 A 作与轴 u 垂直的平面 π , 把平面 π 与轴 u 的交点 A_1 叫做点 A 在轴 u 上的投影(图 7-12). 又设 $\overrightarrow{AB}$ 是已知矢量, 它的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A_1 和 B_1 , 则轴 u 上的有向线段 $\overline{A_1B_1}$ 的数值 A_1B_1 叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影, 记为 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB}$. 这样就有 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A_1B_1$. 这里把轴 u 叫做投影轴.

关于矢量的投影有以下两个性质.

定理 1 矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于矢量的模乘以轴与矢量的夹角 φ 的余弦, 即

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi. \quad (7-5)$$

证明 如图 7-12, 过矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 引轴 u_1 , 使它与轴 u 平行且有相同的指向. 这时轴 u 与矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角 φ 等于轴 u_1 与矢

量 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角, 且有

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \text{Prj}_{u_1} \overrightarrow{AB}.$$

但 $\text{Prj}_{u_1} \overrightarrow{AB} = AB_2 = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$, 所以

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi.$$

由矢量在轴上投影的定义与式(7-5)可得

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \begin{cases} > 0, & 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ = 0, & \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ < 0, & \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

另外, 如果 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, 那么由矢量相等的定义及两矢量夹角的定义有 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \text{Prj}_u \overrightarrow{CD}$, 即相等矢量在同一轴上的投影相等.

定理 2 有限个矢量的和在轴上的投影等于各个矢量在该轴上的投影的和, 即

$$\text{Prj}_u (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n) = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2 + \cdots + \text{Prj}_u \mathbf{a}_n. \quad (7-6)$$

这个定理可根据矢量在轴上投影的定义来证明, 这里就从略了.

例 3 设 P_1, P_2 是某一矢量的起点和终点在轴 u 上的投影, 且它们在轴 u 上的坐标分别为 u_1 和 $u_2 (u_1 \neq u_2)$, $\mathbf{u}^0$ 为 u 轴上的单位矢量. 试验证

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (u_2 - u_1) \mathbf{u}^0. \quad (7-7)$$

证明 分 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 与 u 轴同向或反向两种情况验证.

当 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 与 $\mathbf{u}^0$ 同向时, 则 $u_2 - u_1 > 0$, 故 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 与 $(u_2 - u_1) \mathbf{u}^0$