周光亚　赵振全　赵　文　姜诗章　吉林大学出版社

数理统计（Ⅱ）

数理统计(II)

周光亚　赵振全　赵文　姜诗章

吉林大学出版社

数 理 统 计（Ⅰ）

周光亚　赵振全　赵文　姜诗章

责任编辑：崔晓光　　**封面设计：张沭沉**

吉林大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市解放大路85号）　　长春市第四印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　**1988年12月第1版**
印张：6.375　　**1988年12月第1次印刷**
字数：160千字　　**印数：1—1 000册**

ISBN　7—5601—0176—3/O·34　　定价：1.75元

前　　言

本书是《数理统计》（Ⅰ）的继续。作为教材是经吉林大学数理统计专业本科生及研究生多次试用后再次修改而定稿的。

1．本教材以测度论和判决理论为基础，以介绍数理统计的理论部分为主要内容。

2．教材中按章配有一定数量、难易适当的习题与问题（对其中部分较难的问题给了适当的提示），以利于读者巩固所学的内容，加深所学的知识，掌握所学的方法。

3．本书与《数理统计》（Ⅰ）是一个整体，但也可以独立使用，可供具有初等数理统计知识的读者进一步深造选用。

4．本书可供概率统计专业研究生和高年级本科生选为教材；也可提供给从事数理统计教学的教师和理论研究工作者作为理论参考书。

书中不当之处，恳请读者指正。

作　者

1988年2月

目　　录

· 2 ·

第一章　统计结构

§1.1　统计结构

统计结构在数理统计中的地位相当于概率空间在概率论中的地位，它是研究数理统计问题的出发点。

定义1.1　设$\mathscr{P}$为可测空间（Ω，$\mathscr{A}$）上的概率测度（分布）族，称三元组（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）为一**统计结构**。如果族$\mathscr{P}$中元素由某个参数θ(可为向量）所确定，即

$$\mathscr{P}=\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$$

则此结构称为**参数统计结构**。

从定义看出，统计结构即是一族概率空间，它们是在同一可测空间上定义了不同的概率测度所确定的。在概率论中，问题总是在特定的概率空间中进行讨论的，概率空间被认为是已知的。数理统计的基本任务是以抽得的样本为依据，对母体进行推断。这里，概率测度是未知的并且正是想要进行推断的。通常只能根据事先对问题的了解程度，假定母体的概率测度所属的范围，即族$\mathscr{P}$。统计推断的目的就是根据抽得样本的数据，推断$\mathscr{P}$中哪个元素被认为是母体真实概率测度更符合实际。

例1.1（测量问题）一个实验者对一个物理量μ的值进行测定，他所测得的值x受各种随机因素的影响，可认为$x=\mu+\varepsilon$，其中ε是随机误差，通常假定$\varepsilon\sim N(0, \sigma^2)$这个测量问题对应的统计结构是

$$\Omega=R$$

$\mathscr{A}$是一维Borel集的全体

$\mathscr{P}=\{N(\mu,\ \sigma^2)\quad(\mu,\ \sigma^2)\in R\times R^+\}$

这是以（μ，σ^2）为参数的统计结构。

例1.2 对一仅取k个值（例如1，…，k）的随机变量进行了n次独立观测，这时对应的统计结构是

$\Omega=\{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}^n$

$\mathscr{A}$是Ω所有子集构成的σ-代数

$\mathscr{P}=\{P_\theta^n:\theta\in\Theta\}$其中$P_\theta(i)=\theta_i$

是观测中随机变量取值为$i=1\cdots,k$的概率，而Θ为R^k中的单纯形：

$$\Theta=\left\{\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k):\theta_i\geqslant 0,\ i=1,\ \cdots,\ k,\ \sum_{i=1}^{k}\theta_i=1\right\}$$

在数理统计中，常由一些简单的结构产生比较复杂的统计结构。

定义1.2 设（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）和（Ω'，$\mathscr{A}'$，$\mathscr{P}'$）为二统计结构，称（$\Omega\times\Omega'$，$\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}'$，$\mathscr{P}\otimes\mathscr{P}'$）为两者的**乘积统计结构**，记为（$\Omega$，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）$\otimes$（$\Omega'$，$\mathscr{A}'$，$\mathscr{P}'$）。其中：

$$\mathscr{P}\otimes\mathscr{P}'=\{P\otimes P':\ P\in\mathscr{P},\ P'\in\mathscr{P}'\}$$

显然可类似地定义多个统计结构的乘积结构。特别，称n个相同统计结构（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）的乘积结构为n次**重复抽样统计结构**，记为

$$(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathscr{P})^n=(\Omega^n,\ \mathscr{A}^n,\ \mathscr{P}^n)$$

这里$\mathscr{P}^n=\{P^n:P\in\mathscr{P}\}$。

乘积结构相当于独立观测系统，重复抽样结构相当于对同一母体进行有限次独立抽样（或观测）。例1.2就是个重复抽样结构。

§1.2 可控统计结构

可控统计结构是最重要的统计结构，实用中的统计结构多属于此种。它是母体分布具有概率密度情形的一般化。

定义1.3 统计结构 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ 或概率测度族$\mathscr{P}$称为是**可控的**，如果存在 $(\Omega, \mathscr{A})$ 上的 σ-有限测度 μ，使得$\mathscr{P}$中每个概率测度关于 μ 都是绝对连续的，即

$$P \ll \mu, \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

这时，$P \in \mathscr{P}$关于μ的Radon-Nikodym导数

$$p(\omega) = \frac{dP}{d\mu}$$

称为（关于 μ 的）**概率密度**、对于可控统计结构，概率测度族也可以用概率密度族来表示。例如对于以 $\theta \in \Theta$ 为参数的可控统计结构，可将其表示为

$$(\Omega, \mathscr{A}, \{p_\theta, \theta \in \Theta\})$$

对于参数结构，定义于$\Omega \times \Theta$上的实值函数

$$\mathscr{L}(\omega, \theta) = p_\theta(\omega)$$

称为**似然函数**。

在数理统计中，常用作控制测度的有计数测度和Lebesgue测度两种。

例1.3 （计数测度）设 $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$，$\mathscr{A}$是$\Omega$的一切子集组成的$\sigma$-代数。在 $(\Omega, \mathscr{A})$ 上定义这样一个测度μ：

$$\mu(A) = A\text{中元素的个数}, \quad \forall A \in \mathscr{A}$$

这一σ-有限测度称为**计数测度**。

这个计数测度μ可以控制定义在不多于可数集合上的任一概率分布族。譬如，由Poisson分布列

$$P_\lambda(\omega) = \frac{\lambda^\omega}{\omega!} e^{-\lambda}, \quad \omega = 0, 1, 2, \cdots, \qquad \lambda > 0$$

所确定的 Poisson分布族

$$\nu_\lambda(A)=\sum_{\omega\in A} P_\lambda(\omega),\quad \forall A\in\mathscr{A},\quad \lambda>0$$

就被此计数测度μ所控制，对应的Radon-Nikodym导数为

$$\frac{d\mu_\lambda}{d\mu}=p_\lambda(\omega)=\frac{\lambda^\omega}{\omega!}e^{-\lambda},\ \omega=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

例1.4 (Lebesgue 测度) 设$\Omega=R$，$\mathscr{A}$为一切一维 Borel集所组成的σ-代数，μ为一维 Lebesgue 测度。这时通常所说的连续型分布族$\mathscr{P}$就被μ所控制，而

$$\frac{dP}{d\mu}=p(\omega)\qquad a.e.\mu.\qquad \forall P\in\mathscr{P}$$

即是通常意义下的概率密度.例如，当$\mathscr{P}$为正态分布族$N(m,\sigma^2)$时，

$$p_{m,\sigma^2}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{-(\omega-m)^2}{2\sigma^2}\right\},\ (m,\ \sigma^2)\in R\times R^+$$

控制一个统计结构的测度可有多个，例如$\mathscr{P}$被μ所控制，且$\mu\ll\mu'$，则$\mathscr{P}$也被μ'所控制，且有

$$\frac{dP}{d\mu'}=\frac{dP}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\mu'},\qquad \forall P\in\mathscr{P}$$

对一可控的统计结构，在其众多控制测度当中必存在一个概率测度，而且此概率测度还具有许多优良性质。现在就来讨论这一问题。

定义1.4 设 $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathscr{P})$ 为一统计结构，P^*为 $(\Omega,\ \mathscr{A})$ 上的一个概率分布。如果对$A\in\mathscr{A}$，有

$$P(A)=0,\ \forall P\in\mathscr{P}\Longleftrightarrow P^*(A)=0$$

则称$\mathscr{P}$与P^*等价，记以$\mathscr{P}\equiv P^*$，并称P^*为此结构或$\mathscr{P}$的特权分布。

显然，特权分布是控制结构的一个概率测度。

定理1.1 统计结构 $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathscr{P})$ 可控的充要条件是存在

$\mathscr{P}$的不多于可数的子族$\mathscr{P}'$，使得对于$A\in\mathscr{A}$，有

$$P(A)=0,\ \forall P\in\mathscr{P}'\Longrightarrow P(A)=0,\ \forall P\in\mathscr{P}$$

证明 充分性。设$\mathscr{P}'=\{P_1, P_2, \cdots\}$，令

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nP(A),\ \forall A\in\mathscr{P}$$

其中$c_n>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$，则此$\mu$即可控制$\mathscr{P}$。

必要性。设结构被σ-有限测度μ所控制。不失一般性可假定μ是有限测度。假如不然，因存在分割$\Omega=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ 使得$0<\mu(A_n)<\infty$，$n=1, 2, \cdots$，故令

$$\lambda(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\mu(A\cap A_n)}{\mu(A_n)}$$

时，则λ是$(\Omega, \mathscr{A})$上有限测度并且也能控制结构。于是以λ代替μ即可。

对每个$P\in\mathscr{P}$，令

$$A_p=\left\{\omega: p(\omega)=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\mu}>0\right\}$$

用$\mathscr{B}$表示由一切可数个A_p之并构成的类。并令$M=\sup\limits_{B\in\mathscr{B}}\mu(B)$。由上确界定义，对每个$n=1, 2, \cdots$，存在$B_n\in\mathscr{B}$，使得

$$M-\frac{1}{2^n}\leqslant\mu(B_n)\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\leqslant M$$

令$n\longrightarrow\infty$，可得$\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k\right)=M$，显然$B_0\triangleq\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$仍属于$\mathscr{B}$，故可表示为可数个$A_p$之并，设$B_0=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_{p_i}$，则上确界$M$在$B_0$处达

到，即有$\mu(B_0)=M$。下面证定义B_0的这些P_i所构成的子族$\mathscr{P}'=\{P_1, P_2, \cdots\}$就满足要求，即要证对任意$A\in\mathscr{A}$，从$P_i(A)=0$，$i=1, 2, \cdots$，就能推出$P(A)=0$，$\forall P\in\mathscr{P}$。为此，由$A=(A-B_0)\cap(A\cap P_0)$知$P(A)=P(A-B_0)+p(A\cap B)$。从而只要证明$P(A-B_0)=0$，$P(A\cup B_0)=0$，$\forall P\in\mathscr{P}$。

首先，由于M是上确界，显然$\mu(A_p\cap B_0)=M=\mu(B_0)$，从而

$$\mu(A_p-B_0)=\mu(A_p\cap B_0)-\mu(B_0)=0,\quad \forall P\in\mathscr{P}$$

再由$P\ll\mu$得$P(A_p-B_0)=0$，$\forall P\in\mathscr{P}$，从而

$$\begin{aligned}P(A_p-B_0)&=P(A\cap A_p-B_0)+P(A\cap A_p^c-B_0)\\&\leqslant P(A_p-B_0)+P(A_p^c)=0\end{aligned}$$

其次，由p_i在A_{p_i}上为正，以及

$$0\leqslant\int_{A\cap A_{p_i}}p_i(\omega)\mathrm{d}\mu\leqslant\int_A p_i(\omega)\mathrm{d}\mu=P_i(A)=0$$

可得$\mu(A\cap Ap_j)=0$，$i=1, 2, \cdots$，从而$P(A\cap Ap_i)=0$，$i=1, 2, \cdots$，最后得

$$P(A\cap B_0)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}P(A\cap A_{p_i})=0 \qquad \blacksquare$$

由此定理进一步可推出下面的重要定理。

定理1.2 统计结构（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）为可控的充要条件是在（Ω，$\mathscr{A}$）上存在一个特权分布P^*。

证明 若结构可控，由定理1.1中的子族$\mathscr{P}'=\{P_1, P_2, \cdots\}$按$P^*=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}P_i$确定的就是特权分布，反之，$P^*$即是控制测度。 $\blacksquare$

推论1 可控统计结构（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）的特权分布P^*有如下性质：

1）P^*关于控制结构的一切σ-有限测度μ是绝对连续的。

2）P^*总可取为$\mathscr{P}$的不多于可数的子集$\mathscr{P}'$的严格凸组

合，即

$$P^* = \sum_{p \in \mathscr{P}'} c_p P$$

其中 $c_p > 0$，$\sum_{p \in \mathscr{P}'} c_p = 1$。 ∎

证明 性质1）由特权分布的定义即可得知，性质2）实际上已在定理1.2的证明中推得。

注 根据此推论，今后凡提到特权分布均限定可表为$\mathscr{P}$的不多于可数的子集的严格凸组合。

推论 2 若分布族$\mathscr{P}$可控，则$\mathscr{P}$中分布的所有凸组合构成的族也是可控的。

证明 设$\mathscr{P}$被μ所控制。作$\mathscr{P}$中分布所有凸组合组成的类

$$Q = \left\{ \nu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i P_i : c_i > 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1,\ P_i \in \mathscr{P} \right\}$$

它也是概率分布族。对任意$\nu \in Q$，显然

$$\nu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i P_i \ll \mu$$

即Q为μ所控制。 ∎

推论 3 可数个可控族$\mathscr{P}_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$之并$\mathscr{P} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{P}_i$仍为可控族。

证明 设$\mathscr{P}_i$的特权分布为P_i^*，$(i = 1, 2, \cdots)$则

$P^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} P_i^*$为$\mathscr{P}$的特权分布。

§1.3 统计量

如前所述，研究一个数理统计问题的出发点是某一个统计结构（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）。当人们取得观测样本$\omega \in \Omega$之后，通常总是通

过它的某个函数（更一般地为映射）$T(\omega)$来推断$\mathscr{P}$中哪一个是母体真实的分布。这便引进了统计量的概念。数理统计中统计量的概念相当于概率论中的随机变量。

定义1.5 设（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）为一统计结构从，（Ω，$\mathscr{A}$）到另一可测空间（$\mathscr{T}$，$\mathscr{C}$）的可测映射$T=T(\omega)$称为统计结构（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）上的**统计量**。应该强调的是，这里T不依赖于$\mathscr{P}$，从而当$\mathscr{P}=\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$时$T$不依赖于参数$\theta$。

在上面定义中，如果$\mathscr{T}=R$，则T是实（值）统计量；如果$\mathscr{T}=R^n$，则$T=(T_1,\ \cdots,\ T_n)$是向量（值）统计量。实用的统计量主要是这两种。

对于参数结构，即$\mathscr{P}=\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$时，统计量即是不依赖于参数的可测的向量值函数。这正是统计量通常的定义。

例1.5 对一正态母体进行n次独立观测。这一统计问题对应的统计结构为（R^n，$\mathscr{B}_{R^n}$，$\mathscr{P}^n$）。这里$\mathscr{B}_{R^n}$表示n维Borel集所构成的σ-代数，$\mathscr{P}=\{N(\mu,\ \sigma^2):(\mu,\ \sigma^2)\in R\times R^+\}$，$\mathscr{P}^n=\{P^n:P\in\mathscr{P}\}=\{N_n(\mu,\sigma^2I):(\mu,\ \sigma^2)\in R\times R^+\}$这是个参数结构，参数$\theta=(\mu,\ \sigma^2)$。按习惯用$X$代替$\omega$表示$R^n$中的点，$X=(X_1,\ \cdots,\ X_n)$，则以下映射都是常用的统计量

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{（样本均值）}$$

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \text{（样本方差）}$$

$$m_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \text{（样本}k\text{阶中心矩）}$$

$$(\overline{X},\ S_n^2)$$

但是，S_n^2/σ^2就不是统计量，因其中含有（未知的）参数σ^2。

作为（Ω，$\mathscr{A}$）到（$\mathscr{T}$，$\mathscr{C}$）的可测映射的统计量$T(\omega)$实际上是对样本点ω（观测数据）的某种加工处理。加工处理的好

坏，要结合具体统计问题的目的进行讨论，这里我们将通过“原像”概念来说明一个统计量代表原样本中所含信息的程度。对任一$C\in\mathscr{C}$，

$$T^{-1}(C)=\{\omega:T(\omega)\in C\}$$

是C的原像，$\mathscr{C}$中所有集C的原像构成的类记为$T^{-1}(\mathscr{C})$，即

$$T^{-1}(\mathscr{C})=\{T^{-1}(C):C\in\mathscr{C}\}$$

容易验证$T^{-1}(\mathscr{C})$是$\mathscr{A}$的一个子σ-代数。既然$\mathscr{A}$作为原样本空间中随机事件的全体，那么子σ-代数$T^{-1}(\mathscr{C})$范围的大小则可体现统计量T代表原样本的程度。根据这种观点给出以下定义。

定义1.6 设T_1和T_2为（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）上的两个统计量，它们分别取值于（$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{C}_1$，）和（$\mathscr{T}_2$，$\mathscr{C}_2$）。如果$T_1^{-1}(\mathscr{C}_1)=T_2^{-1}(\mathscr{C}_2)$，则称$T_1$与$T_2$等价，记为$T_1\sim T_2$。

由此定义看到，二统计量等价的概念与分布族$\mathscr{P}$无关。根据上面的分析，二等价统计量在代表样本进行统计推断时所起的作用应是相同的。下面的定理进一步说明这一事实。

定理1.3 设T_i是从（Ω，$\mathscr{A}$）到（$\mathscr{T}_i$，$\mathscr{C}_i$）的可测映射，$i=1$，2。如果$T_1\sim T_2$，则对任一可测实值函数$f(T_1)$，必存在另一可测实值函数$g(T_2)$，使得

$$f(T_1(\omega)=g(T_2(\omega))\ ,\quad\forall\omega\in\Omega$$

证明 因$T_1(\omega)$是$T_1^{-1}(\mathscr{C}_1)$可测，$f(T_1)$已假定为可测，故$f(T_1(\omega))$复合为ω的函数必为$T_1^{-1}(\mathscr{C}_1)$可测，从而也$T_2^{-1}(\mathscr{C}_2)$可测（因为$T_1\sim T_2$）。由此根据测度论中熟知的结果，知存在（$\mathscr{T}_2$，$\mathscr{C}_2$）上的$\mathscr{C}_2$可测函数$g(T_2)$使得

$$f(T_1(\omega))=g(T_2(\omega))\ ,\quad\forall\omega\in\Omega.$$ ∎

这个定理表明：$T_1(\omega)$能表达的，其等价统计量$T_2(\omega)$也能表达。由对称性可知，反过来也是对的。

例1.6 在空间（R^n，$\mathscr{B}_{R^n}$）上，用$X=(X_1,\cdots,X_n)$表示样本点，则以下三个统计量是彼此等价的：

$$T(X)=(X_{(1)},\ \cdots,\ X_{(n)})\quad \text{（顺序统计量）}$$

$$U(X)=(u_1,\ \cdots,\ u_n)=\left(\sum_{j=1}^{n}X_i,\ \sum_{i=1}^{n}X_i^2,\ \cdots,\ \sum_{i=1}^{n}X_i^n\right)$$

$$V(X)=(v_1,\cdots,v_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\ \sum_{i\neq j}^{n}X_iX_j,\cdots,X_1X_2\cdots X_n\right)$$

统计量的独立性与可积性同概率论中随机变量的独立性与可积性略有区别，区别就在于现在必需对族$\mathscr{P}$中每个P而言。

定义1.7 结构（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）上的统计量X和Y称为是**独立的**，如果对每个$P\in\mathscr{P}$而言，随机变量X和Y是独立的。

定义1.8 结构（$\Omega,\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$）上的实值统计量称为是**可积的**，如果对每个$P\in\mathscr{P}$而言，随机变量X是可积的、即数学期望$E_P(X)$对每个$P\in\mathscr{P}$存在。如果$X=(X_1,\ \cdots,\ X_n)$是取值于R^n的统计量，则它的可积性即是它每个分量$X_i(i=1,\ \cdots,\ n)$的可积性。

实可积统计量X称为是**同等均值的**，如果$\mathrm{E}_P(X)$不依赖于$P\in\mathscr{P}$，此时将$E_P(X)$记为$\mathrm{E}(X)$．特别当$\mathrm{E}(X)=0$时，称统计量X是**中心化的**。

例1.7 在统计结构（R^2，$\mathscr{B}_{R^2}$，$\{N_2(\mu,\ \sigma^2I)$：$\mu\in R^2$，$\sigma^2\in R^+\}$）上，以（X，Y）表示样本点，则如下两个统计量是独立的：

$$T(X,\ Y)=X+Y,\qquad S(X,\ Y)=X-Y$$

事实上，因（T，S）也服从二元正态分布，故其独立性从下面的不相关性即知：

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_{(\mu,\sigma^2)}[T-\mathrm{E}(T)][S-\mathrm{E}(S)]\\&=\mathrm{E}_{(\mu,\sigma^2)}[X-\mathrm{E}(X)+Y-\mathrm{E}(Y)][X-\mathrm{E}(X)-Y+\mathrm{E}(Y)]\\&=\mathrm{E}_{(\mu,\sigma^2)}[X-\mathrm{E}(X)]^2-\mathrm{E}_{(\mu,\sigma^2)}[Y-\mathrm{E}(Y)]^2\\&=\sigma^2-\sigma^2=0\end{aligned}$$

例1.8 考虑统计结构（R^2，$\mathscr{B}_{R^2}$，$\mathscr{P}$），其中$\mathscr{P}$关于Lebesgue 测度有密度

$$f_\theta(x, y) = e^{-\theta x - y/\theta}, \qquad x,\ y \geqslant 0, \qquad \theta > 0$$

此时统计量$T = XY - 1$是中心化的。事实上，应用分部积分法可得

$$\mathrm{E}_\theta(XY - 1) = \int_0^\infty \int_0^\infty (xy - 1) e^{-\theta x - y/\theta}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^\infty x e^{-\theta x}\mathrm{d}x \int_0^\infty y e^{-y/\theta}\,\mathrm{d}y - \int_0^\infty e^{-\theta x}\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-y/\theta}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^\infty \left(-\frac{x}{\theta}\right)\mathrm{d}e^{-\theta x} \int_0^\infty \left(-\theta y\right)\mathrm{d}e^{-y/\theta} - \int_0^\infty e^{-\theta x}\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-y/\theta}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^\infty e^{-\theta x}\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-y/\theta}\,\mathrm{d}y - \int_0^\infty e^{-\theta x}\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-y/\theta}\,\mathrm{d}y$$

$$= 0$$

最后，我们来讨论统计量的分布（族）。设T是从（$\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}$）到（$\mathscr{T}$，$\mathscr{C}$）的一个统计量。对于每个$P \in \mathscr{P}$，统计量$T$是个随机变量，它的概率分布可从分布$P$诱导出来，对任意的$C \in \mathscr{C}$。

$$P\{T(\omega) \in C\} = P(T^{-1}(C))$$

就是T的分布，记以P^T，即

$$P^T(C) = P(T^{-1}(C)),\quad \forall C \in \mathscr{C}$$

容易验证P^T是（$\mathscr{T}$，$\mathscr{C}$）上的概率测度。由于对每个$P \in \mathscr{P}$可定义P^T，记

$$\mathscr{P}^T = \{P^T,\ P \in \mathscr{P}\}$$

这便诱导出（$\mathscr{T}$，$\mathscr{C}$）上一族概率测度，从而构成一个统计结构（$\mathscr{T}$，$\mathscr{C}$，$\mathscr{P}^T$）。这个统计结构称为由统计量T诱导的统计结构

对于可控结构（Ω，$\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$），诱导的统计结构也必是可控的。事实上，如设$\mathscr{P}$被σ-有限测度μ所控制，令

$$\mu^T(C) = \mu(T^{-1}(C)),\quad \forall C \in \mathscr{C}$$

则也诱导出（$\mathscr{T}$，$\mathscr{C}$）上的一个σ-有限测度μ^T，并由$\mu^T(C) = \mu(T^{-1}(C)) = 0$可推出$P^T(C) = P(T^{-1}(C)) = 0$，$\forall P \in \mathscr{P}$，可见$\mathscr{P}^T$被$\mu^T$所控制。