三角综合习题题解

郑彩书 编

贵州人民出版社

责任编辑　雷　云
封面设计　周福縣

三角综合习题题解　郑彩书 编

贵州人民出版社出版
（贵阳市延安中路5号）
贵州省新华书店发行　贵州新华印刷厂印刷
开本：787×1092毫米　32开本　36.25印张　777千字
印数1—5,600
1982年6月第1版　1982年6月第1次印刷

书号：7115·600　定价：3.20元

前　言

三角是数学的一门分科，包括平面三角和球面三角。内容是研究三角形边和角的关系，三角函数及其间的关系等。简言之，即一部分是研究三角形的解法，一部分是研究三角函数的性质。这些内容是解决科研和生产实际问题的必要工具。三角在几何、物理、天文、测量、航海等方面都有广泛的应用。学习好三角，也是学习高等数学的基础。

为了帮助具有高中文化程度的青年系统地学习三角，深入理解三角函数的基础知识，掌握解题的基本技能，我编写了这本《三角综合习题题解》。在编写过程中，注意了选择三角和代数、几何之间的相互联系和各部分知识的综合运用。

本书共汇编了1170道题，其中，有基础题和综合性较强的题，也有国内外历年的高考试题和数学竞赛题。由于材料来自各方，在文字的语调风格上不很一致，有繁有简，有详有略，没有强求一致，以便读者多方了解一些数学语言方面的知识。另外，由于篇幅限制，有的习题不能把几种解题方法都列出，只能列出一种或两种，这就要求读者独立思考而加以发挥，补充研究其最佳的解题方法和步骤。

为了培养读者运用不同方法解答习题的能力，本书还选入了用三角知识解代数、几何习题，以及用代数、几何等知识来充实三角的不足的有关内容。

本书在编排次序、分类上充分考虑了三角的系统性，内容比较全面。全书开头简单介绍三角的基本理论，在每节前

还有基本知识的提要。希望读者先把这些基本概念基本理论搞清楚，牢牢掌握住，然后再作习题，效果会更好。

本书编成后，曾经范勤俭同志校阅，最后又承蒙肖润生、严莉蕾、蒋宣辉三位同志逐题详细审阅定正，在此表示诚挚的谢意。

由于编者水平、经验所限，书中缺点及不足之处在所难免，切望广大读者批评指正。

郑彩书

1981.10

目　录

第一章 三角函数的基本理论

（一）角的概念和测量

在初等几何学里给角的定义为：从同一点引出的两条射线所形成的图形叫角．在许多实际和理论的问题上，感到使用不方便，因此，在三角学中，我们把角的概念加以扩展，用更适合的另外的定义来代替它．

定义 射线绕着它的端点旋转而成的图形叫作角．

射线的同一相关位置可以是各种不同旋转的无限集合成的．如图1-1-1中指明了几种这样的旋转：Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和Ⅳ．

为了要指出一个角，必须给出它的顶点0，它的边OA和OB，以及指出把OA转移到OB的旋转方向和旋转量．因此，相异的角可有共同的顶点和边．如图1-1-1中指出了相异的角Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和Ⅳ，有共同的边OA、OB和顶点0．

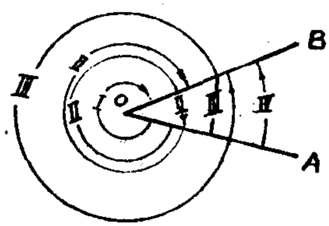

图1-1-1

必须注意，由角的始边OA旋转到角的终边OB可以从两个相反的方向来完成．依一个方向旋转所成的角假定称为正角，那么，依相反方向旋转而成的角则称为负角．通常在图形上把依逆时针方向的旋转认为是正的，顺时针方向的旋

转认为是负的。

实际上这个规定并无原则上的意义。例如，骑自行车，对于在路的一侧的行人，似乎车轮在顺时针方向旋转；而对于在路的另一侧的行人，则觉得车轮的旋转是逆时针的。也就是说，根据上述的规定不能说出自行车的车轮是依正方向或者负方向旋转的。我们可以认定一方向旋转为正的，那么，依相反方向的旋转便是负的。但也可认为一方向旋转为负的，与此相反方向的旋转则为正的。问题的关键在于两个方向旋转的比较，若命某一旋转的方向是正的，则依同一方向的任意的旋转也称为正的，而依相反方向的任意旋转称为负的。

若依正方向旋转周角的$\frac{1}{360}$定义为1°，则对于由0°到180°的旋转，无论对角这个字的新意义和旧意义来说，对应的角的度数都是相同的。但由新的定义也可以研究大于180°和小于0°（负的）的角。例如，360°的角是射线依正方向绕端点旋转一周，而$-180°$的角则依反方向旋转半周。

（二）锐角、直角三角函数的定义

取任意的锐角α，如图1-2-1．作一直角三角形，使它的一个锐角等于α．在角的一边上，取不与角的顶点A重合的任意一点B，并从B点向另一边作垂线BC．

引设记号：　$BC=a$、$AC=b$、$AB=c$．

定义1　锐角α所对的直角边a与斜边c，这二边的比值称为锐角α的正弦（$\sin\alpha$）；正弦的倒数称为锐角α的余

割（$\csc\alpha$），即

$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\qquad \frac{1}{\sin\alpha}=\csc\alpha=\frac{c}{a}.$$

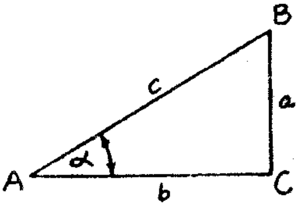

图1-2-1

定义 2 和锐角α相邻的直角边b与斜边c，这二边的比值称为锐角α的余弦（$\cos\alpha$）；余弦的倒数称为锐角α的正割（$\sec\alpha$），即

$$\cos\alpha=\frac{b}{c};\qquad \frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha=\frac{c}{b}.$$

定义 3 锐角α所对的直角边a与此角相邻的直角边b，这二边的比值称为锐角α的正切（$\mathrm{tg}\,\alpha$）；正切的倒数称为锐角α的余切（$\mathrm{ctg}\,\alpha$），即

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a}{b};\qquad \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{b}{a}.$$

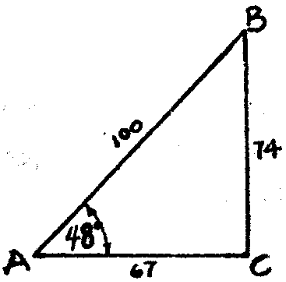

图1-2-2

我们用例子来表明，如何求任何一个角（这里系指任何锐角），例如角48°的正弦、余弦、正切和余切的近似值.

利用直尺、圆规和量角器作出直角三角形ABC，这三角形中$\angle BAC=48°$，而斜边$AB=100$毫米，如图1-2-2中量直角边BC和AC得：$BC=74$毫米、而$AC=67$毫米，则有：

$$\sin 48°=\frac{74}{100}=0.74,\qquad \cos 48°=\frac{67}{100}=0.67,$$

$$\mathrm{tg}\,48°=\frac{74}{67}\approx1.1,\qquad \mathrm{ctg}\,48°=\frac{67}{74}\approx0.9.$$

用同样的方法可求得任何锐角的正弦、余弦、正切和余切的值。

定理1　当已知α角时，它的正弦、余弦、正切和余切的值即已完全确定。也就是说，这几个值与作辅助直角三角形时对B点的选择无关。

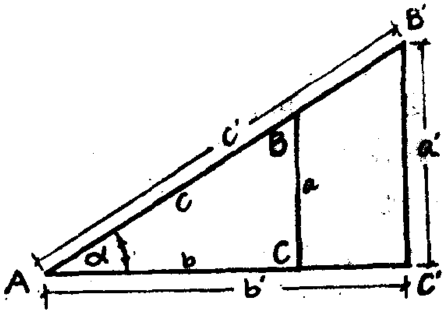

图1-2-3

证：研究有锐角α的任意两个直角$\triangle ABC$和$\triangle AB'C'$，如图1-2-3中这两个△相似，

所以　$\dfrac{a}{c}=\dfrac{a'}{c'}=\sin\alpha$，　　$\dfrac{b}{c}=\dfrac{b'}{c'}=\cos\alpha$，

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}=\mathrm{tg}\,\alpha$，　　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{b'}{a'}=\mathrm{ctg}\,\alpha$.

定理已被证明。

因此，对于锐角α有完全确定的$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\mathrm{tg}\,\alpha$和$\mathrm{ctg}\,\alpha$值。所以$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\,\alpha$和$\mathrm{ctg}\,\alpha$的值是角α的函数。这些函数叫做三角函数。它有八个基本公式，即

$\sin\alpha\csc\alpha=1$；　　$\cos\alpha\sec\alpha=1$；

$\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha=1$；

$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$；　　$\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

$\sec^2\alpha=1+\mathrm{tg}^2\alpha$；　　$\csc^2\alpha=1+\mathrm{ctg}^2\alpha$.

以上八个基本公式必须熟记。

（三）已知某角的三角函数，求作此角（锐角）的方法

从 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的定义推得，锐角 α 的正弦和余弦是小于 1 的正数：如图1-3-1所示

$$0<\sin\alpha<1;$$

$$0<\cos\alpha<1.$$

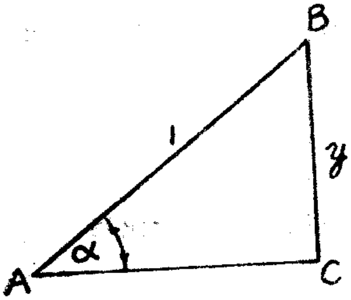

图1-3-1

定理1 对于任何小于 1 的正数 y，只能找到一个锐角 α，它的正弦等于 y，

$$\sin\alpha=y.$$

证：作出直角三角形 ABC，如图 1-3-1，使它的一直角边等于 y，斜边等于 1．即

$$\sin\angle BAC=\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{y}{1}=y.$$

我们已经证明，有这样的一个锐角 $\angle BAC=\alpha$，它的正弦等于 y．

我们将证明，正弦等于 y 的任何锐角 β 必等于锐角 α．

事实上，设 β 为锐角，它的正弦等于 y；作出直角 $\triangle A'B'C'$，使 $\angle B'A'C'=\beta$，如图1-3-2所示，于是

$$\frac{B'C'}{A'B'}=\sin\beta=y.$$

但 $\dfrac{BC}{AB}=y$；

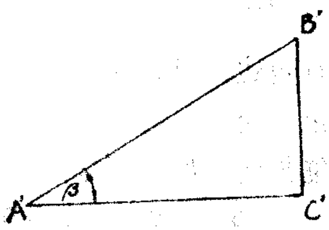

图1-3-2

故 $$\frac{B'C'}{A'B'}=\frac{BC}{AB}.$$

因此，直角$\triangle ABC$相似于直角$\triangle A'B'C'$，即$\angle BAC=\angle B'A'C'$，也即$\alpha=\beta$.

我们已证明，有且仅有一个锐角，它的正弦等于y.

同样，可证明下列定理.

定理 2　对于任何小于 1 的正数x，只能找到一个锐角α，它的余弦等于x：$\cos\alpha=x$.

定理 3　对于任何的正数p，只能找到一个锐角α，它的正切等于p：$\operatorname{tg}\alpha=p$.

定理 4　对于任何的正数q，只能找到一个锐角α，它的余切等于q，$\operatorname{ctg}\alpha=q$.

我们用例子来说明，怎样根据锐角的已知三角函数去作出锐角α的方法.

例 1　已知一个锐角的正弦等于$\frac{4}{5}$，求作这个锐角.

解：一个锐角的正弦就是在以它做一个锐角的直角三角形中，这个角的对边和斜边的比. 现已知它的正弦值是$\frac{4}{5}$，要画出这个锐角，就应画一个直角三角形，使直角边和斜边的比等于$\frac{4}{5}$，这样，这条直角边的对角就是所求作的角. 因此，可以任取一个单位长度（如 1 厘米），作$BC=4$厘米，图1-3-3所示. 由C作BC的垂线CD，以B

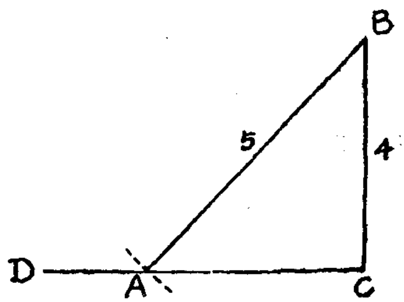

图1-3-3

为圆心，长5厘米为半径画弧，交直线CD于A，连结AB，在这直角三角形ABC中，角BAC即为所求作的锐角．用量角器可以量得这个角约等于53°，即简写成$\angle A\approx 53°$．

例2　已知一个锐角的余弦等于0.79，求作这个锐角．

解：化0.79为百分数即为$\frac{79}{100}$，取厘米为长度单位．因锐角的余弦就是在直角三角形中，这个角的邻边和斜边的比，故先作$AC=79$单位长度，如图1-3-4，从C作AC的垂线CB，然后以A为圆心，以长100单位长度为半径画圆弧交CB直线于B，连AB，角A即为所求的锐角．用量角器可量得角$A\approx 38°$．

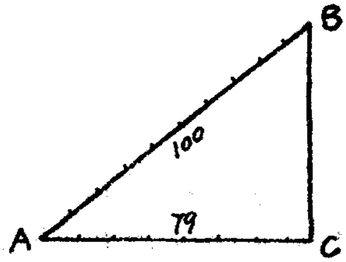

图1-3-4

例3　已知$\text{tg}\,A=2\frac{1}{3}$，求作锐角$A$．如图1-3-5所示．

解：作直角$\triangle ACB$，令$\angle C=90°$，然后在直角边截取BC为7单位长度，另一直角边上截取3单位长度，连结

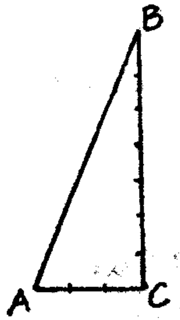

图1-3-5

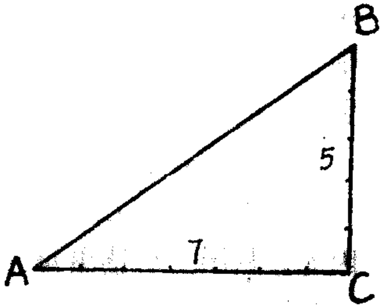

图1-3-6

AB，则$\angle A$即为所求作的锐角．

例4　已知一锐角的余切为1.4，求作这锐角．

解：化 1.4 为假分数等于$\frac{7}{5}$，取任意单位长度，画直角$\triangle ACB$，令$\angle C=90°$，在两直角边分别截取$AC=7$，$BC=5$，连结AB，如图1-3-6中，此角A即为所求的锐角。

（四）根据锐角的一个三角函数，计算此角的其它三角函数的方法

由前节的公式，可从一个三角函数的值求出其余一切三角函数的值，现在用例子来说明应当如何去作。

例 1　已知A是锐角，且$\sin A=\frac{3}{7}$，求直角$\triangle ABC$中$\angle A$的其它函数。

解：据题意画图形，如图1-4-1所示。

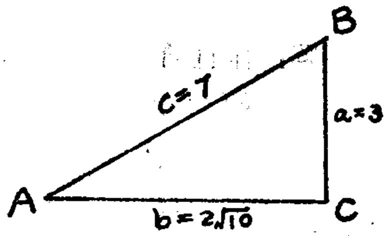

图1-4-1

因　$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{3}{7}$，

设　$a=3$，

则　$c=7$，

于是　$b^2=c^2-a^2=49-9$

$=40$，

$b=2\sqrt{10}$。

因此，从图上可读出角A的其它三角函数：

$$\sin A=\frac{3}{7}; \qquad \cos A=\frac{2\sqrt{10}}{7};$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{3}{2\sqrt{10}}; \qquad \operatorname{ctg} A=\frac{2\sqrt{10}}{3};$$

$$\sec A=\frac{7}{2\sqrt{10}};\qquad \csc A=\frac{7}{3}.$$

例 2 在直角$\triangle ABC$中，$c=9$，$b=4$，求锐角A的六个三角函数。

解：按题意画出图形，如图 1-4-2 所示，已知斜边和一直角边，可求得：

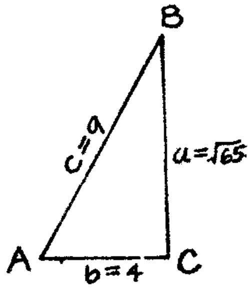

图1-4-2

$a^2=c^2-b^2=9^2-4^2=81-16=65$,

$a=\sqrt{65}$.

故得：

$\sin A=\frac{\sqrt{65}}{9}$;　　$\cos A=\frac{4}{9}$;

$\mathrm{tg}\, A=\frac{\sqrt{65}}{4}$;　　$\mathrm{ctg}\, A=\frac{4}{\sqrt{65}}$;

$\csc A=\frac{9}{\sqrt{65}}$;　　$\sec A=\frac{9}{4}$.

例 3 已知$\mathrm{tg}\, B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$B$是锐角，求$B$角的其它三角函数。

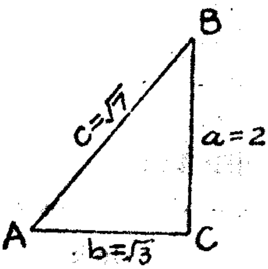

图1-4-3

解：画直角$\triangle ABC$，如图1-4-3所示，

由于　$\mathrm{tg}\, B=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

设　$b=\sqrt{3}$,

则　$a=2$,

因此，

$c^2=a^2+b^2=2^2+(\sqrt{3})^2$

$=4+3=7$，　$c=\sqrt{7}$.

∴ B角的其它三角函数可从图中看出，即

$$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}; \qquad \cos B=\frac{2}{\sqrt{7}};$$

$$\operatorname{tg} B=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \operatorname{ctg} B=\frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\sec B=\frac{\sqrt{7}}{2}; \qquad \csc B=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

例 4　如果 $\operatorname{ctg} A=\frac{1}{2}$，求锐角$A$的各三角函数的值。

解：画直角$\triangle ABC$，如图 1-4-4，由于已知 $\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，设 $b=1$，则$a=2$，

∴ $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

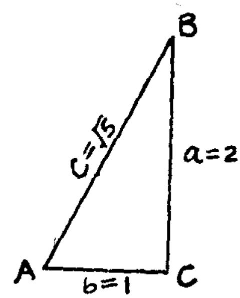

图1-4-4

则

$$\sin A=\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos A=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\operatorname{tg} A=2; \qquad \operatorname{ctg} A=\frac{1}{2};$$

$$\sec A=\sqrt{5}; \qquad \csc A=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

例 5　用$\cos\alpha$表示锐角α的三角函数值。

解：从所示本书第 4 页的基公本式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，求得 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$，又从公式　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，