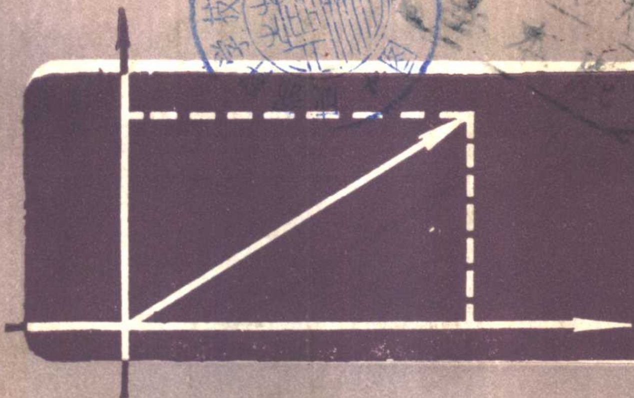
线性代数双基训练

主编 翟连林



数学自学丛书

中国农业机械出版社

数 学 自 学 丛 书

线性代数双基训练

主编　翟连林
编者　蒋省吾　吴宗荣　金逻旋

中国农业机械出版社

内容简介

本书是《数学自学丛书》之一.

本书从自学青年的实际需要出发，既照顾到电大、职大、函大、夜大等成人高校工科、财经类学员自学《线性代数》的需要，又考虑到青年教师自修《高等代数》的需求，以及普通高校有关系、科的学生学习参考. 全书通俗简明地叙述了有关概念、定理和性质，并通过典型例题和基本训练题帮助读者理解、巩固、掌握和熟练，通过自我测验题检查自己的学习效果.

全书内容包括：行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的标准形、二次型、线性空间、线性变换等七章；附录：一元多项式、一元高次方程、欧氏空间、抽象代数基本概念介绍等四章.

线性代数双基训练

主编　翟连林

编者　蒋省吾　吴宗荣　金逑旋

•

责任编辑：尹荣英

•

中国农业机械出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

•

开本 787×1092 1/32 · 印张 18 1/8 · 字数 399 千字

1987 年 9 月北京第一版 · 1987年 9 月北京第一次印刷

印数 0,001—9,100 · 定价 3.20 元

•

统一书号：7216.260

序

为适应我国四化建设的新形势，从根本上提高广大职工的科学文化水平，已成为当务之急。从我国广大职工的实际出发，科学水平的提高尤感迫切。中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，正是针对着这一迫切需要而作出的。但是，这样的认识在许多实际工作中往往得不到贯彻，总认为抓教育、提高科学文化水平只是久缓的计议，不是当务之急。这样当然就谈不上有什么迫切感了。其实这种看法既不符合中央的方针，又和广大群众的需要相违背。中国农业机械出版社编辑出版的《数学自学丛书》（第一版）问世以来，受到极为广泛的读者热烈欢迎，很重要的一个因素，就是因为它适应了当前的迫切需要。

数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础。当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学；就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学。要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎。所以这套丛书的出版具有深远的意义。

这套丛书在编写方面有许多特点，归结起来有以下三个方面。

一、取材允当，适用面广泛

事实上，该丛书是概括中学和大学专科数学的内容，由浅入深地编排，概括了全部中学和大学专科数学的内容，它

不仅适合于广大职工自学的需要，也适合于在校的中学生和大专学生自修参考之用，以及中学数学老师进修提高之用。

二、重视双基，突出能力的培养

这套丛书的每一册都按基础知识提要、典型例题、习题三部分组成，而且内容精练，例题典范，习题多样。在内容的叙述中又注意揭露实质与规律，在典型例题的讲解中又能注意启发思路，在习题的设置上注意基本训练题与综合训练题的配合，从而既能使读者巩固地掌握基础知识，熟悉基本技能，又能使读者得到能力的培养，科学地处理了知识传授和能力培养这两个重要环节。

三、重视启发诱导，利于自学

该丛书针对自学青年缺乏辅导的情况，力求叙述简明，讲清思路的来龙去脉，揭示解题规律，纠正易犯的错误，循循善诱，利于自学。还通过提示方式，启发读者自行解题。既为读者提供自学的方便，又能启发读者独立思考。

以上是概括这套丛书的特点。当然不是说每一本书都一样，更不是说每一本书都是完美无缺。而且随着形势的发展，今后还必须继续更新，使这套丛书在我国四化建设中继续发挥它的根本性的作用。

程民德

1984年12月20日

注：程民德教授是中国科学院学部委员，中国数学学会副理事长，北京大学数学研究所所长。

前　　言

为了帮助广大职工和自学青年学好中学数学和大学专科数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学、职工业余中学和电视大学、职工大学的数学教材，结合自学特点，编写了这套《数学自学丛书》．

这套丛书包括：

一、初中部分

1．《初中代数双基训练》；

2．《平面几何双基训练》；

3．《初中数学总结辅导》．

二、高中部分

1．《高中代数双基训练》；

2．《立体几何双基训练》；

3．《平面三角双基训练》；

4．《平面解析几何双基训练》；

5．《高中数学总结辅导》．

三、大学专科部分

1．《一元微积分双基训练》；

2．《多元微积分双基训练》；

3．《线性代数双基训练》；

4．《概率统计双基训练》；

5．《复变函数双基训练》；

6．《逻辑代数与BASIC语言双基训练》．

为便于自学，在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识；然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正常易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题、综合训练题以及自我测验题（包括解答或提示）的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力．

这本《线性代数双基训练》既可供电大、职大、函大等各类成人高等学校工科、经济类学员的参考，也可供普通高等学校有关系、科学生以及中学教师自修《高等代数》的参考．

由于我们的水平有限，书中的缺点、错误在所难免，欢迎广大读者批评指正．

编　者

1986年2月

目　录

第一章 行 列 式

一、基础知识提要

1. 排列

定义1.1 由自然数 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列．如果一个排列的各个数是按照从小到大的自然顺序排列的，就称它为自然序数列．

例如，1574263是一个 7 元排列，但它不是自然序排列．1234567才是一个 7 元自然序排列．

不难知道，n 元排列共有 $n!$ 个．

定义1.2 在一个 n 元排列中，如果有较大的数排在较小的数的前面，就称这一对数构成一个反序．一个排列中所包含的反序的总数，称为这个排列的反序数．反序数用记号"τ"表示．

例如，排列531246中构成反序的数共有51，31，32，52，53，54六对，它的反序数是 6，就记作 $\tau(531246)=6$．

定义1.3 反序数是偶数的排列称为偶排列；反序数是奇数的排列称为奇排列．

例如，$\tau(531246)=6$，所以531246是偶排列，$\tau(3421)=5$，所以3421是奇排列．

定义1.4 在一个排列中，任意交换某两个数 i 和 j 的位置，其余的数不动，就得到另一个排列，这种对一个排列所作的变换称为对换．记作（i，j）．

例如，把排列3421中的4和1对换，就变成排列3124，可记作$3421\xrightarrow{(4,1)}3124$.

定理1.1　每一个对换都改变排列的奇偶性.

例如，3421是奇排列，而3124是偶排列.

定理1.2　当$n\geqslant 2$时，n元排列中奇排列与偶排列的个数各占一半，都等于$\frac{n!}{2}$.

2. n级行列式

定义1.5　n级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad ①$$

是指这样的$n!$项的代数和，这些项是一切可能的取自①的不同行、不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad ②$$

它的符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，也就是说，当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时，这一项的符号为正，当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时，这一项的符号为负．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad ③$$

这里$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$表示对所有的$n$元排列取和.

a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）叫做行列式的元素.

定义1.6　若行列式的主对角线（从左上到右下的对角

线）下方的元素全为零：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\qquad ④
$$

就称为上三角形行列式；若行列式的主对角线上方的元素全为零：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\qquad ⑤
$$

就称为下三角形行列式（上三角形行列式和下三角形行列式统称为三角形行列式）；若行列式的主对角线以外的元素全为零：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{22} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\qquad ⑥
$$

就称为对角形行列式．

显然，对角形行列式既是上三角形行列式，又是下三角形行列式．

定义1.7　若行列式的元素满足$a_{ij}=a_{ji}$：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\qquad ⑦
$$

就称为对称行列式；若行列式的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}$ 因而 $a_{ii}=0$：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad ⑧$$

就称为反对称行列式.

定义1.8　若把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行变为列，就得到另一个行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D' 叫做 D 的转置行列式.

显然，若 D' 是 D 的转置行列式，则 D 也是 D' 的转置行列式.

定义1.9　在 n 级行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，剩下的元素按原来的次序组成的 $n-1$ 级行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. M_{ij} 附以符号 $(-1)^{i+j}$ 后，称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}. 即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

定义1.10　行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

称为 n 级范德蒙 (Vandermonde) 行列式.

一个 n 级行列式是 $n!$ 项的代数和，如果根据定义来计算将是十分麻烦，甚至难以办到的. 例如，一个10级行列式就需要计算3628800项，并且每一项又都是 10 个数的乘积. 因此，计算行列式时总是设法把它变换、化简，变化成比较容易计算的行列式，而变换、化简的根据就是行列式的性质. 行列式的性质在理论研究上也有很大用处.

（1）行列式等于零

性质 1　若行列式 D 中有一行（或列）元素全为 0，则 $D=0$.

性质 2　若行列式 D 中有两行（或列）相同，则 $D=0$.

性质 3　若行列式 D 中有两行（或列）的对应元素成比例，则 $D=0$.

（2）行列式的值不变

性质 4　行列式 D 与其转置行列式 D' 的值相等.

性质 5　行列式的某一行（或列）的公因子可以提到行列式符号外边，其值不变. 即