高等学校教材

复变函数

西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

复　变　函　数

西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

本书是西安交通大学高等数学教研室以 1959 年所编讲义为基础，经过几年的试用，最近又根据 1962 年 5 月审订的高等工业学校本科五年制无线电类专业与电机类专业适用的高等数学（结合专业部分）教学大纲(参考草案)和参考试用过程中教师和学生的意见改编的.

本书由陆庆乐、唐象礼编写定稿，唐佑华、黄喜才协助选配习题，并经浙江大学周茂清同志审阅.

本书可作为高等工业学校无线电类和电机类专业复变函数课程的试用教科书，也可供有关工程技术人员的学习参考.

复 变 函 数

西安交通大学高等数学教研室编

北京市书刊出版业营业許可証出字第 119 号

高等教育出版社出版(北京沙滩后街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 经 售

統一书号 K13010·1226　开本 850×1168 1/32　印张 3

字数 74,000　印数 0,001—5,000　定价(5)¥0.32

1966 年 1 月第 1 版　1966 年 1 月北京第 1 次印刷

目　　录

第一章　复变函数

1．复数的代数运算（ 1 ）．2．复数的几何表示法（ 2 ）．3．乘幂与开方（ 3 ）．4．复变函数的定义（ 5 ）．5．区域（ 6 ）．6．函数的极限及其连续性（ 8 ）．

第二章　复变函数的导数

1．函数的可导性（ 12 ）．2．函数可导的充要条件（ 14 ）．3．解析函数及调和函数（ 17 ）．4．平面场的复势（ 19 ）．5．指数函数（ 24 ）．6．三角函数（ 27 ）．

第三章　复变函数的积分

1．复变函数积分的定义、性质与计算法（ 30 ）．2．柯西-古萨基本定理（ 35 ）．3．基本定理的推广·复合闭路定理（ 39 ）．4．柯西积分公式（ 41 ）．5．解析函数的高阶导数（ 44 ）．

第四章　复数项级数

1．数列的极限（ 48 ）．2．级数概念（ 49 ）．3．幂级数（ 50 ）．4．泰勒展开式（ 54 ）．5．罗伦级数（ 56 ）．

第五章　留数及其应用

1．孤立奇点（ 62 ）．2．函数的零点与极点的关系（ 64 ）．3．留数（ 65 ）．4．留数在定积分计算上的应用（ 69 ）．

第六章　保角映射

1．保角映射的概念（ 75 ）．2．分式线性映射（ 78 ）．3．三对对应点唯一决定分式线性映射（ 81 ）．4．几个初等函数所构成的映射（ 85 ）．

第一章　复变函数

1．复数的代数运算　读者在学习初等代数时，已经知道 i 是方程

$$x^2+1=0$$

的一个根，即 $i^2+1=0$。

现在，我们称 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 为复数，其中 x,y 都是实数，分别称为 z 的实部与虚部，记作

$$x=\operatorname{Re} z,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

当 $x=0$ 时，$z=iy$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x$ 当然是实数。零是同时可作为实数与纯虚数的唯一的一个数。两个复数相等，必须而且只须它们具有相等的实部与相等的虚部。

两复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 的加法、减法及乘法定义为：

$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2) \tag{1.1.1}$$

及

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\\ +i(x_2y_1+x_1y_2). \tag{1.1.2}$$

显然，当 z_1 与 z_2 为实数（即当 $y_1=y_2=0$）时，以上两式符合实数的运算法则。

至于除法，可定义为：满足

$$z_2z=z_1 \qquad (z_2\neq 0)$$

的复数 $z=x+iy$，称为 $z_1=x_1+iy_1$ 除以 $z_2=x_2+iy_2$ 的商，记作 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$。从这个定义，易知

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.1.3}$$

事实上，因为$(xx_2-yy_2)+i(xy_2+x_2y)=x_1+iy_1$，所以

$$xx_2-yy_2=x_1,\quad xy_2+x_2y=y_1.$$

由于 $z_2\neq 0$，那末 $x_2^2+y_2^2\neq 0$，于是从以上两式解得

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

实部相同而虚部正负号相反的两个复数称为**共轭复数**，记作 $z=x+iy,\bar{z}=x-iy$。根据(1.1.3)式，在计算 $\frac{z_1}{z_2}$ 时，可以把分子分母同乘以 $\bar{z}_2$ 即得所求的商。

例. $\frac{3+4i}{1-2i}=\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=-1+2i.$

2. 复数的几何表示法 由于任一复数 $z=x+iy$ 与一对实数 x,y 成一一对应，那末对于平面上一给定的直角坐标系来说，复数 $z=x+iy$ 可以用坐标为 (x,y) 的点来表示。这是一个常用的表示法，并且常把"点 z"作为"数 z"的同义词。x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴。两轴所在的平面称为复平面，或称为 z 平面。

复数 z 还能用从原点指向点 (x,y) 的矢量来表示(图 1)。矢量的长度称为 z 的模或绝对值，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1.2.1)$$

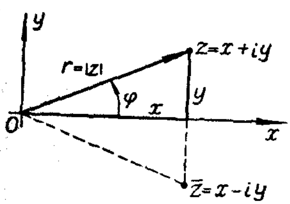


图 1

矢量与 x 轴的交角 φ 称为 z 的辐角，记作

$$\operatorname{Arg} z=\varphi.$$

当 $z=0$ 时，$|z|=0$，而辐角不确定。当 $z\neq 0$ 时，有

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z)=\frac{y}{x}. \qquad (1.2.2)$$

我们知道任何一个 $z\neq 0$，有无穷多个辐角。如果 φ_1 是其中的一个，那末公式

$$\operatorname{Arg} z=\varphi_1+2k\pi \quad (k \text{ 为任意的整数}), \tag{1.2.3}$$

就给出了 z 的全部辐角. 在 $z(\neq 0)$ 的辐角中, 若 φ_0 满足

$$-\pi<\varphi_0\leqslant\pi,$$

那末称 φ_0 为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值, 记作 $\varphi_0=\arg z$.

从直角坐标与极坐标的转化关系:

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi,$$

可把 z 表成下面的形式:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{1.2.4}$$

称为复数的三角表示法.

两复数 z_1 和 z_2 的加、减运算同于相应矢量的加减运算. 这从图 2 中可以看得很清楚. 我们又知道 $|z_2-z_1|$ 就是 z_1 与 z_2 之间的距离. 因此,

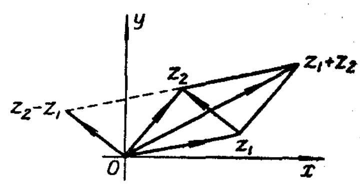


图 2

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{1.2.5}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{1.2.6}$$

一对共轭复数 $z, \bar{z}$ 在平面内的位置是与实轴对称的, 并且 $|z|=|\bar{z}|$ (图 1).

3. 乘幂与开方 设有两个复数:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), \quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

那末
$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

由此可见,

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \tag{1.3.1}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2①, \tag{1.3.2}$$

这就是说, 两个复数乘积的模等于各个复数的模的乘积; 两个复

① 因为这等式的两端是多值的, 于是应理解为这等式左端的值的集合和它右端的值的集合完全一样.

数乘积的辐角等于各复数辐角的和(图 3).

同理可证,如果

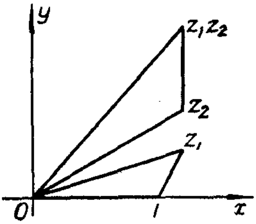


图　3

$$z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k),\ (k=1,2,\cdots,n),$$

那末

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+ +\cdots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)].$$

如果这些数都是相等的,并且它们的模都等于一:

$$z_1=z_2=\cdots=z_n=z=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

那末
$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \tag{1.3.3}$$

这就是德莫乌尔公式.

利用复数的三角表示法和德莫乌尔公式,可得复数开方的简单法则。设 $w^n=z$,求 w (记作 $w=\sqrt[n]{z}$).

令
$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

那末
$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

于是
$$\rho^n=r,\quad n\theta=\varphi+2k\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots),$$

由此
$$\rho=r^{1/n},\quad \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

所以
$$w=\sqrt[n]{z}=r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得 n 个相异的根 $w_0,w_1,w_2,\cdots,w_{n-1}$;当 k 以其他值代入时,这些根又重复出现。例如 $k=n$ 时,

$$w_n=r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2n\pi}{n}\right)=$$
$$=r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=w_0.$$

例. 求 $\sqrt[4]{1+i}$.

[**解**] 因为 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$

所以
$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{(\pi/4)+2k\pi}{4}+\right.$$
$$\left.+i\sin\frac{(\pi/4)+2k\pi}{4}\right);\quad (k=0,1,2,3).$$

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$
$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$
$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$
$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

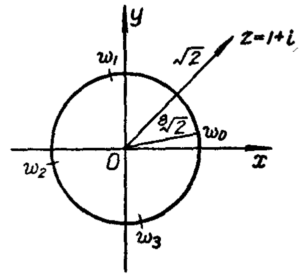


图 4

这四个根都在以原点为中心，$\sqrt[8]{2}$ 为半径的圆周上(图 4)。

4. 复变函数的定义　设有一复数 $z=x+iy$ 的集合 g. 对于集合 g 中的每一个复数 z，如果有一确定的法则存在，按照这一法则，数 $w=u+iv$ 就随着而定，则称 w 为 z 的**函数**，记作

$$w=f(z).$$

如果 z 的一个值对应着一个 w 值，那末我们称函数 $f(z)$ 是单值的；如果 z 的一个值对应着两个或两个以上的 w 值，那末我们称函数 $f(z)$ 是多值的. 集合 g 称为 $f(z)$ 的定义集合. 对应于 g 中所有 z 的一切 w 值，所成的集合 G，称为函数值集合.

由于给定了复数 $z=x+iy$ 就相当于给定了两个实数 x 和 y，而数 $w=u+iv$ 亦同样地对应着一对实数 u 和 v，所以复变函数 w 和自变量 z 之间的关系 $w=f(z)$ 相当于两个关系式：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

它们分别确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实函数.

例 1. 如果 $w=z^2$，令 $z=x+iy$，$w=u+iv$，那末 $u+iv=(x+iy)^2=$ $=(x^2-y^2)+2xyi$. 因而等式 $w=z^2$ 就相当于两个等式：$u=x^2-y^2$ 及 $v=$ $=2xy$.

如果把函数 $w=f(z)$ 的定义集合 g 看成是 z 平面上的一个点集合，而把函数值集合 G 看成是另一个平面——w 平面——上的一个点集合，那末函数

$w=f(z)$ 在几何上就可以看做是把集合 g 变到集合 G 的一个映射.

例 2. 由函数 $w=z^2$，我们有

$$u=x^2-y^2, \quad v=2xy.$$

这个方程组可以看成是把 z 平面变成 w 平面的一个映射. 它把 z 平面内的曲线族 $x^2-y^2=c_1$ 和 $2xy=c_2$ 变成 w 平面内的平行直线族 $u=c_1$ 和 $v==c_2$.

假定已经给出了一个函数 $w=f(z)$ 把 g 变到 G. 取 G 中任意确定的一点，我们求得 g 中这样的点，它(们)是在映射 $w=f(z)$ 下被变为在 G 中所取点的那一(些)点. 这样，G 中的每一个点将对应着 g 中的一个或多个的点. 按照函数的定义，在 G 上就确定了某一个函数 $z=\varphi(w)$，它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数，或称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射.

今后，如无特别声明，所指的函数均为单值的.

5. 区域 在以后的讨论中，平面点集合 g 常是区域的情形. 在讲区域之前，我们需要先介绍所谓平面上一点的邻域.

平面上以 z_0 为中心，δ（任意的正数）为半径的圆域（包含或不包含 z_0）：

$$|z-z_0|<\delta \text{ 或 } 0<|z-z_0|<\delta,$$

称为 z_0 的邻域(图 5).

平面点集合 g 称为一个区域，记作 B，它需满足下列条件:

i) g 中每一点有一个邻域，这个邻域内所有的点都属于 g.

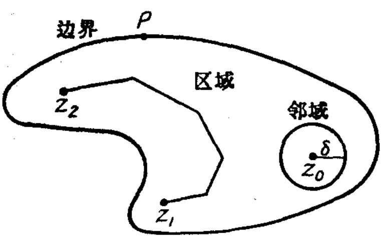


图 5

ii) g 中任何两点，都可以用完全属于 g 的一条折线连接起来(图 5).

如果一个区域 B 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面，那末 B 称为**有界的**，否则称为**无界的**.

对于平面内不属于区域B的点来说，可能有这样的点P，在P的任意小的邻域内总包含B中的点．这种点P我们称为B的界点．所有B的界点组成B的**边界**(图5)．

例．圆周$|z-a|=r$是区域$|z-a|<r$的边界．

由区域B及其边界所组成的集合称为闭区域或闭域，记作$\overline{B}$．

区域的边界，可能是由n条曲线与一些孤立的点所组成．

我们知道，如果$x(t)$和$y(t)$是两个连续的实变函数，那末方程组

$$x=x(t),\quad y=y(t)\qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

代表一条曲线，我们称它为连续曲线．如果命

$$z(t)=x(t)+iy(t),$$

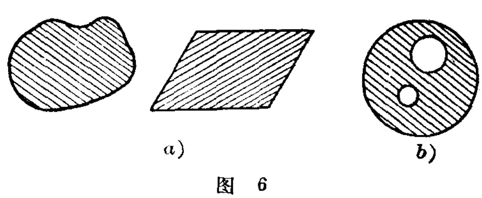
那末这曲线就可以用一个方程

$$z=z(t)\qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

来代表．如果$z(t)$在$a\leqslant t\leqslant b$上有连续的导数$z'(t)=x'(t)+$ $+iy'(t)$，且对于t的每一值有$z'(t)\neq 0$，那末这曲线称为光滑的．由n段光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线．

一条连续曲线C：$z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$，如果$z(a)=z(b)$且当$t_1\neq t_2$时(除非$t_1$及$t_2$两值中一个是$a$另一个是$b$)，$z(t_1)\neq z(t_2)$，称为简单闭曲线．一条简单闭曲线$C$将平面分为两个区域，其中一个是有界的，称为$C$的内部，另外一个是无界的，称为$C$的外部．

一个区域B，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于B，就称为单连域．就有限区域而论，单连域是由一条简单闭曲线所围成的(图6a)．一个区域如果不是单连域，就称为多连域(图6b)．单连域B具有这样的特



a)　　b)

图 6

征：属于B的任何一条简单闭曲线，在B内可以经过连续的变形而缩成B的一点；而在多连域内就不一定都能缩成一点。

6. 函数的极限及其連續性 设函数$w=f(z)$定义在z_0的邻域$0<|z-z_0|<\rho$内。如果有一确定的数A存在，对于任意给定的$\varepsilon>0$，相应地必有一正数$\delta(\varepsilon)$，使$0<|z-z_0|<\delta$时($0<\delta\leqslant\rho$)有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

那末称A为$f(z)$当z趋向于z_0时的极限，记作$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，或，当$z\to z_0$时，$f(z)\to A$。

若令$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z=x+iy$，$z_0=x_0+iy_0$，$A=u_0+iv_0$，则根据$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$的定义，就是：

当 $0<|(x+iy)-(x_0+iy_0)|<\delta$ 时，

$$|(u+iv)-(u_0+iv_0)|<\varepsilon.$$

或当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，

$$|(u-u_0)+i(v-v_0)|<\varepsilon.$$

由此，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，

$$|u-u_0|<\varepsilon,\quad |v-v_0|<\varepsilon.$$

这就是说
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0. \qquad (1.6.1)$$

反之，如果(1.6.1)成立，则在$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时有

$$|u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |v-v_0|<\frac{\varepsilon}{2},$$

而
$$|f(z)-A|\leqslant|u-u_0|+|v-v_0|.$$

所以在$0<|z-z_0|<\delta$时有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

因此我们有

定理一 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=u_0+iv_0$, $z_0=x_0+$ $+iy_0$, 那末 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

我们还有下面的定理.

定理二 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 那末

i) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$,

ii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB$,

iii) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0)$.

这些关系式，与实函数中的一样，可以从定义出发来证明，但也可利用定理一来证，现在举 ii)的证明为例.

令 $f(z)=u_1+iv_1$, $g(z)=u_2+iv_2$; 并设当 $z\to z_0$ 时,

$$f(z)\to A=a+ib,\quad g(z)\to B=c+id.$$

因此 $u_1\to a$, $v_1\to b$; $u_2\to c$, $v_2\to d$. 由于

$$f(z)g(z)=(u_1+iv_1)(u_2+iv_2)=$$

$$=u_1u_2-v_1v_2+i(u_1v_2+u_2v_1),$$

$$u_1u_2-v_1v_2\to ac-bd,\quad u_1v_2+u_2v_1\to ad+bc,$$

因而

$$f(z)g(z)\to ac-bd+i(ad+bc)=$$

$$=(a+ib)(c+id)=AB.$$

函数的連續性 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 我们说 $f(z)$ 在 z_0 连续. 如果 $f(z)$ 在区域 B 处处连续，我们说 $f(z)$ 在 B 连续.

根据这个定义与上述定理一，可以证明下面的定理三.

定理三 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是: $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

例. 函数 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$ 除原点外处处连续，因为 $u=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外是处处连续的；而 $v=x^2-y^2$ 是处处连续的。

由定理二与定理三，还可推得下面的定理四。

定理四 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数。连续函数的复合函数仍为连续函数。

从以上这些定理，我们可以推得有理整函数（多项式）

$$w=P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$

对所有的 z 都是连续的；而有理分函数

$$w=\frac{P(z)}{Q(z)}\qquad [P(z)\text{及 }Q(z)\text{ 都是多项式}]$$

在分母不为零的点也是连续的。

习 题

1. 设 $z=\dfrac{(3+i4)(2-i5)}{i2}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|$。

2. 当 x, y 等于什么实数值时，等式 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+i3}=1+i$ 成立？

3. 将下列复数化为三角形式：

1) i; 2) -1; 3) $1+i\sqrt{3}$;

4) $1-\cos\varphi+i\sin\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$; 5) $\dfrac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}$.

答: 4) $2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left(\cos\dfrac{\pi-\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\pi-\varphi}{2}\right)$.

4. 一个复数乘以 i，问它的模与辐角有何改变？

5. 将下列坐标变换公式写成复数的形式：

1) 平移公式: $\begin{cases} x=x_1+a_1, \\ y=y_1+b_1. \end{cases}$

2) 旋转公式: $\begin{cases} x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha, \\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha. \end{cases}$

答: 1) $z=z_1+A$;

2) $z=z_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, 这里 $z=x+iy$, $z_1=x_1+iy_1$, $A=a_1+ib_1$.

6. 证明:

1) $|z|^2=z\bar{z}$;　　2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$;　　4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2\neq0$.

7. 描出下列不等式所确定的区域，并指明是有界的还是无界的、闭的还是开的、单连的还是多连的:

1) $\operatorname{Im} z>0$;　　2) $|z-1|>4$;　　3) $0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant1$;

4) $2\leqslant|z|\leqslant3$;　　5) $|z-1|\leqslant|z+3|$;　　6) $1\leqslant\arg z\leqslant1+\pi$;

7) $|z-1|<4|z+1|$;　　8) $|z^2-1|<\dfrac{5}{4}$;

9) $|z-2|+|z+2|\leqslant6$;　　10) $|z-2|-|z+2|\geqslant1$;

11) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leqslant4$.

8. 下列方程(t 为实参数)给出了怎样的曲线?

1) $z=t(1+i)$;　　2) $z=a\cos t+ib\sin t$;

3) $z=t+\dfrac{i}{t}$;　　4) $z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$.

9. 函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 把下列 z 平面上的曲线变成 w 平面上怎样的曲线?

1) $x^2+y^2=4$;　　2) $y=x$;

3) $x=1$;　　4) $(x-1)^2+y^2=1$.

答: 1) $u^2+v^2=\dfrac{1}{4}$;　　2) $v=-u$;

3) $\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+v^2=\dfrac{1}{4}$;　　4) $u=\dfrac{1}{2}$.

10. 证明: 如果 $|a+ib|<\varepsilon$, 那末 $|a|<\varepsilon$, $|b|<\varepsilon$.

11. 设 $f(z)$ 在 z_0 处连续且 $f(z_0)\neq0$, 则可找到 z_0 的一个小邻域，在这邻域内 $f(z)\neq0$.

12. 证明定理三.

第二章 复变函数的导数

1. 函数的可导性 设函数 $w=f(z)$ 定义于区域 B，z_0 为 B 中的一点，点 $z_0+\Delta z$ 不出 B 的范围．如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在，那末我们说 $f(z)$ 在 z_0 可导．这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数，记作

$$f'(z_0)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \qquad (2.1.1)$$

也就是说，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，相应地有一个 $\delta(\varepsilon)$，使在 $0<|\Delta z|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon.$$

如果 $f(z)$ 在 B 处处可导，我们就说 $f(z)$ 在 B 可导．

例 1. 求 $f(z)=z^2$ 的导数．

[解] 因为 $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z,$$

所以

$$f'(z)=2z.$$

例 2. 问 $f(z)=x+2yi$ 是否可导？

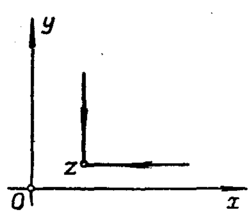


图 7

[解] 这里 $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-x-2yi}{\Delta x+\Delta yi}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}.$$

i) 设 $z+\Delta z$ 沿平行于 x 轴的方向趋于 z（图 7）；因而 $\Delta y=0$，这时极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

ii) 设 $z+\Delta z$ 沿平行于 y 轴的方向趋于 z，因而 $\Delta x=0$。这时极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\Delta yi}{\Delta yi}=2.$$

所以 $f(z)=x+2yi$ 的导数不存在。

可导与連續 从例 2 明显地看出，函数 $f(z)=x+2yi$ 处处连续但是处处不可导。

反过来，我们却容易证明可导函数必定连续。由在 z_0 可导的定义，我们有

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon,\qquad 0<|\Delta z|<\delta.$$

令
$$\rho(\Delta z)=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0),$$

那末
$$\lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0.$$

由此得
$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z. \qquad (2.1.2)$$

所以
$$\lim_{\Delta z\to 0}f(z_0+\Delta z)=f(z_0),$$

即 $f(z)$ 在 z_0 连续。

求导法則 由于复变函数中导数的定义与实变函数中导数的定义形式上是完全相同的，并且复变函数中的极限运算与复数的代数运算也和实变函数中一样，实变函数中的求导法则在复变函数中也都完全适用而且证法也是相同的。所以现在不加证明把它们写在下面：

i) $(c)'=0$.

ii) $(z^n)'=nz^{n-1}$.

iii) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$.

iv) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.

v) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{1}{g^2(z)}[g(z)f'(z)-f(z)g'(z)],\quad g(z)\neq 0.$