

世界名著

原子核集體模式

J. P. Davidson 著

許雲基譯

國家科學委員會補助
國立編譯館出版

臺灣開明書店印行



世界名著

原子核集體模式

J. P. Davidson 著

許雲基譯

本書已承美國科學院代為轉譯權謹此致謝

國家科學委員會補助

國立編譯館出版

臺灣開明書店印行

民國六十一年一月初版發行

精裝每冊新臺幣七十六元
平裝每冊新臺幣五十八元

原 子 核 集 體 模 式



有 著 作 權 不 准 翻 印

原 著 者 J. P. Davidson
翻 譯 者 許 雲 基
譯 權 所 有 人 國 立 編 譯 館
補 助 機 關 國 家 科 學 委 員 會
發 行 人 劉 甫 琴
印 刷 者 臺 灣 開 明 書 店

總發行所

臺北市中山北路一段七七號
電話 四三六九 五〇八三 號
郵局劃撥賬號第一二五七號

臺灣開明書店

本店業經內政部核准登記頒發內版營業字第〇〇三三號登記證

(中華—114 J.)

基價 (精) 3.80 (平) 2.90

原 序

關於原子核構造的理論，可概略分爲兩部份，此二部份在時間上的起源均相同，但隨着我們對於原子核的知識日漸增加，此二部份也隨之而相互錯綜。在一方面，殼層模型(shell model)，選出原子核中一個或數個核粒子(nucleon)，且迄今爲止，一直嘗試以特定的位函數以及殘剩交互作用(residual interactions)進行詳細的計算，其目的，除了要解釋。在一相當廣泛區域內的原子核均表現出的一般性質外，並希望能解釋或預示個別原子核的性質。在另一方面，則爲整體運動模型(collective model)，其中賦予一量子化液滴(quantized liquid)以某些性質，並加上某些邊界條件，以解釋某些大略的性質——這些性質，即使不與全部核粒子有關，也與大多數在一個系統中相互作用的核粒子，有密切的關係。爲解釋其他某些性質，尤其是某些與一或二個核粒子有關，且係重疊於較呈整體運動性(collective)背景之上的性質，則我們須將此二種極端性理論，揉和成一統一化模型(unified model)。

當我在「近代物理評論」(Review of Modern Physics)上作此最後兩個题目的綱要時，我發現，雖然有許多討論層殼模型的論文，尤其是芬堡(Feenberg)，梅耶及詹森(Mayer and Janssen)，以及較近迪沙力特及泰密(de Shalit and Talmi)所作的，然而關於整體運動模型，則沒有相似的論文曾被刊出。這點看來相當奇特而可惜，因整體運動模型在整理由世界各地實驗室所獲得的實驗資料中作了相當重要的角色，且已成爲各種有關原子核的多體問題(many-body problem)的探討，所賴以進行及發展的基礎。然我們已可明顯的看出，如是的一本著

11.11.65/104

作將是十分有用的，然而所須包含的內容以及強調的重點，則尚未瞭然。我們可自一現象論 (phenomenological) 的觀點，蒐集並詳細敘述各種整體運動模型，亦可循微觀性 (microscopic) 的討論路線，由內在的，也可能是較基本的觀點，來展示及說明各種整體運動模型。當然，亦可兼採這兩種方式。我在本書中採用了前一種討論方式，不僅因為此一方式對理論家及實驗家均較實用，況且現今已有兩本書，其作者各為雷因 (Lane) 及布朗 (Brown) 自微觀性觀點，充份的討論了所有今日有關此方面的知識。

我曾經嘗試着融合各種概念以及計算結果，其中許多都是“衆所週知”然而却不易詳細探究的，並將之聚合成一內部相互關聯的討論，以說明各種須以整體性運動模式方能加以解釋的原子核構造特性。如此使得我們須將關於質點，反應的討論省略，例如剝除反應 (stripping reaction) 及多核粒子轉移反應 (multinucleon transfer reaction)，其中關於質點的觀點較關於整體運動性者為重要。由相似的推論，使我們須將原子核光反應 (photonuclear reaction) 加入，其中整體運動性效應佔有較重要的地位。如此的著作，則將對實驗家及理論家二者均較實用。實驗家將發現，此種著作在整理最近的實驗結果以及提議新實驗時非常有用。理論家則可用之作跳板，以將這些現今的理論作進一步的擴展，亦可將之視為一組模型理論特性的大綱，以便以詳細的微觀性計算加以說明。

本書的敘述順序，是由舊至新，由偶原子核至奇原子核，由靜態至動態。簡短的第一章，基本上是有關歷史的敘述，僅為可跳過的緒論。雖然在如此的書中將如許篇幅用作歷史的簡介可能不算不合宜，然而卻有些過時了。無論如何，將早年有關的概念作一再檢討，在物理學上仍是相當重要的，雖然它們僅是非常簡陋的理論。我禁不住地想到尼

爾斯·波爾 (Niels Bohr) 的首篇論文，爲他贏得了丹麥皇家科學會 (Royal Danish Scientific Society) 的金勳章 (Gold Medal)，且在日後原子核理論的發展上有不可磨滅的貢獻，雖然其中所包含的古典性概念歷三十年之久一直被擱置而不動。

在第一章的簡介之後，便是一章有關液滴物理現象的討論。在此處建立的概念，即爲各振動性模型以及各種將振動性自由度加入轉動性模型中的方法的基礎。此後的三章中則討論各種類型的原子核，偶——偶，奇—— A 數，及奇——奇原子核，且每一章均建立於前一章之上。在此各章有關模型理論的討論中，我都嘗試着最先把各種由系統所具有的不規則形狀即可推出，而且幾乎與所使用各特定模型的細節無關的特性表現出來。在此各章之後，按次序是討論各種躍遷的各章：伽瑪躍遷 (gamma transition)，阿爾法 (alpha) 及貝他 (beta) 躍遷，原子核光效應 (photonuclear effect)，以及最後有關 μ —介子化原子 (mu-mesic atom) 的討論。其中僅最後一章尚須加以驗證，而我將之納入本書中係因 μ —介子看來是在對原子核的整體運動性現象的探究中一種新穎且具威力的工具。至今日爲止，所有關於 μ 介子與原子核的整體運動模式間交互作用的討論，均僅限於其中最簡單者。所得的預示，並曾被廣泛地加以驗證。然而，利用固態偵測器 (solid state detector) 以及即將完成的“介子工廠 (meson factory)”，實驗物理學家即可擁有用以進行更人爲化的實驗工具，且至少我亦曾提議如何自目前的計算法，進行探討的方式。在附錄中我並加入了一些在作計算時相當重要的數學細節。

在此我須對本書內所列出的參考資料以及方程式的編號加以說明。本書中列出的參考資料並不週全，而所列出的爲一個概念式計算最主要的依據。因此書目係被排列爲三部份，各爲教科書，期刊上的文

章,以及最後的論文部份,我感覺若要知道對一概念有貢獻的著者全部名單,則最好查閱最近的期刊。有關實驗證據方面也是如此。大部份實驗測量值,就像婦女的裙行,隨時改變(其中最可笑的例子,即為光的速率值),而我以一理論物理學者的身份,也不願意涉入指正各數據之糾紛中。因此,我在本書內幾乎沒有將任何實驗數據表列入。此等數據是很重要的,然而這些數字卻是暫時性的。再次,這個責任又落到期刊身上。至於方程式,則一章內所有須加以參考的,均按次序編號。當提及同一章內的方程式,則僅寫出它的阿拉伯數字編號;若提及者為在另一章內的方程式,則同時將其章數標出。

最後,我要感謝各方面所給予的協助。本書中提及的某些工作,是我的學生所完成的,例如 Drs. P. O. Lipas, A. K. Rafiqullah, S. A. Williams, B. E. Chi, M. G. Darison, 及 J. R. Roesser。他們每人均曾幫助我徹底明瞭其中的概念。特別是,在附錄 D 中列出的各尼爾森軌道 (Nilsson orbitals) 圖表,係 Dr. Chi 所完成的。同時我感謝 Dr. S. A. Williams 及 Professor Paul Goldhammer 在讀完本書初稿後所提出的寶貴建議。本書中仍存留的錯誤,均是我所留下的,而不是他們的。最後我還要感謝一位老朋友,即在 Rensselaer Polytechnic Institute 的 Professor W. A. McKinley, 多年來與我所作的極具價值及啓發性的討論。

1968 年 3 月

J. P. Davidson

目 錄

原 序

第一章	緒 論	1
第二章	有關液滴的物理	9
第三章	偶—偶原子核之模型	24
	A. 泛 論	24
	B. 具軸對稱性之模型	37
	C. 不具軸對稱性之模型	46
	D. 有關負宇稱性狀態之理論	55
第四章	關於奇—A 數原子核的模型	61
	A. 單一粒子與核心之耦合作用	61
	B. 核心外單獨粒子問題之解	72
	C. 不具軸對稱性之模型	86
第五章	奇—奇原子核之模型	92
第六章	各模型之電磁性質	101
	A. 緒 論	101
	B. 振動性模型	105
	C. 偶偶—原子核之模型	108
	D. 關於奇—A 數原子核之模型	122
	E. 關於奇—奇原子核之模型	134

第七章	阿爾法及貝他衰變	138
A.	阿爾法衰變	138
B.	貝他衰變	150
第八章	原子核之光效應	155
第九章	Mu -介子化原子及整體運動性構造	172
附錄 A:	關於角動量的一些定理	184
附錄 B:	整體運動性參數	191
附錄 C:	模型狀態函數	199
附錄 D:	畸變原子核中單獨粒子解	205

第一章 緒 論

同溯至 1932 年，查德威 (Chadwick) 發現中子，以及 1934 年艾沙索 (Elsasser) 發現魔數 (magic number)，並首先創用殼層模型 (shell model) 之觀念〔86〕這兩件事，即暗示原子核可能顯現整體性運動 (collective) 的現象。在 1930 年，蒂博 (Thibaud) 指出〔152〕，若將鉍 $^{212}(\text{Bi})$ α -衰變之蛻變核 (daughter nuclei) 鉈 $^{208}(\text{Tl})$ 原子核考慮為一旋轉體系，則當時羅森布倫 (Rosenblum) 〔143〕對此衰變的微細構造 (fine-structure) 所作測定之結果即可得到解釋。在蒂博所作之討論中，對於具軸對稱 (axial symmetry) 及球形二種旋轉體之本徵值 (eigenvalue) 之關係，均曾採用。然此研究在今日僅具有歷史性之價值，因鉈原子核在今日並不被認為是在一畸形核區域 (deformed regions) 內，且其較低能階，並不具旋轉體系所特有的構造。相當久之後，尼爾斯·波爾 (Niels Bohr) 及卡克卡 (Kalckar)，在討論重原子核之能階分佈 (energy level distribution) 時指出，若將能階密度 (level density) 視為質量數 A 的函數，則其性質與一量子化液滴 (quantum fluid) 的表面振動有些相似〔59〕(他們亦曾考慮一量子化固體之彈性振動)。貝西 (Bethe) 曾對一非渦性 (irrotational) 流體所形成的球狀液滴，表面波動問題之某些細節加以計算，亦曾對一可壓縮 (compressible) 流體內之縱波 (longitudinal wave) 加以討論〔25〕。不久之後，此等關於液滴振動之觀念即在對當時新近發現之原子核分裂 (nuclear fission) 現象所作的研究上，佔了極重要之地位。

雖然原子核理論家並未預言核分裂現象的存在，但他們很快即覺

察到，它的含義，並利用液滴模型而加以說明。芬堡 (Feenberg) [88]，佛蘭可 (Frenkel) [93]，N 波爾及惠勒 (Wheeler) [60]，以及馮威茲克 (von Weizsäcker) [156] 均曾研究關於一帶均勻分佈電荷，但為畸形之液滴形狀及穩定性間之關係，以及總能量如何隨液滴之形狀距圓球形相去若干，亦即，其畸變度 (deformation)，而變化的情形。芬堡的論文主要是對於原子核對自發性分裂 (spontaneous fission) 之穩定性加以證實。波爾，惠勒及佛蘭可則對反應程序之理論作了相當詳盡之研討。的確，佛蘭可相當有眼光的注意到，“看起來，若 E/U 此比值不太大時，則我們可能可以假設一種非球形的穩定狀態之存在……。若此種觀點被證明係正確的，則較重原子核之電四重極矩 (quadrupole moment) 值將異常地大。” [93]。在此時，已經知道至少三種原子核——鎔 $^{151}(\text{Eu}^{151})$ ，鎔 153 ，及鑷 $^{175}(\text{Lu}^{175})$ ——具有相當大之電四重極矩值。卡西麥 (Casimer) [4] 在約三年前於分析光譜線偏離間隔規則 (interval rule) 的程度時，即證明此等原子核的電四重極矩值各約為 1.5, 3.2, 及 5.5 巴恩 (barn)。

在液滴模型中，當由質子間的庫倫排斥力而產生的體積能量 (volume energy) 超過液滴收縮之表面能量時，即產生不穩定現象。若使液滴作一微量，且不改變其體積的變形，則可顯見其表面積，亦即，其表面能量，將增加而同時其庫倫靜電能量將減少。若庫倫能量之減少較表面能量之增加為快，則產生可能導致核分裂的不穩定性。許多年前羅萊爵士 (Lord Rayleigh) 即曾研究過一類似的古典性問題，其中他曾探討在一噴嘴中一荷電液滴的穩定性 [151]。甚至在盧瑟福 (Rutherford) 假設出他的原子之核模型 (nuclear model of the atom) [145] 之前，尼爾森·波爾即在其發行之第一本著作中提出了對羅萊爵士理論所作的修正 [58]。(有關一團旋轉氣體之穩定性之相似探討亦曾被提出，

雖然牽涉到不同之邊界條件 (boundary condition)。二問題中之庫侖力場與重力場，雖則符號相反，却具有相同之型式。此問題雖僅在天文物理 (astrophysics) 上具有價值，但其數學上之細節卻可很容易地應用到我們考慮的問題上。關於此問題之詳細數學討論，可參見 Lyttleton [13]。

爲了替以下之討論打好根基，我們在此將芬堡 [88] 的討論作一較為概括之覆述。考慮一半徑爲 R_0 之圓球，在不改變體積之原則下，變形爲如下式之橢圓體

$$\lambda x^2 + \kappa y^2 + z^2 / \lambda \kappa = R_0^2 \quad (1)$$

當變形不大時，其離心率 (eccentricities) 可以二參數 κ 及 λ 表示如下：

$$\begin{aligned} e_1 &= (a-c)/R_0 \cong 2(1-\sqrt{\lambda}) + (1-\sqrt{\kappa}) \\ e_2 &= (b-c)/R_0 \cong (1-\sqrt{\lambda}) + 2(1-\sqrt{\kappa}) \end{aligned}$$

此處我們將橢圓體各半軸取爲 $a > b > c$ 。若以 E_c 及 E_s ，各代表變形後系統之庫侖能量及表面能量，及以 E_c^0 及 E_s^0 ，各代表原有圓球之相當能量，則因表面能量係與表面積成正比，故我們計算後者即可。橢圓體之表面積可以其半軸長表爲 [3]，

$$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} [(a^2 - c^2)E(\theta) + c^2\theta] \quad (2)$$

此處 $E(\theta)$ 爲第二類橢圓積分 (elliptic integral of the second kind)，其定義爲

$$E(\theta) = \int_0^\theta dn^2 u du \quad (3)$$

而 θ 之定義爲

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = \operatorname{sn}^2(\theta, k)$$

此處之調數 (modulus) k 定義為

$$k^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

而 $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, 及 $\operatorname{dn} u$ 為通常之橢圓函數 (elliptic functions)。將 $\operatorname{sn}^{-1}u$ 及 $\operatorname{dn}^2 u$ 以冪級數展開, 並將 (3) 逐項積分且代入 (2), 即足以求得我們所需之量。按此種程序, 完成一些計算後, 即可求得一橢圓體狀原子核之表面能量為

$$E_s = E_s^0 [1 + (8/45)(e_1^2 - e_1 e_2 + e_2^2) + \dots] \quad (4)$$

帶均勻分佈電荷之橢圓體的庫倫靜電能量可以一個簡明的 (closed) 形式寫出, 因其係與一橢圓體的重力能量相似。參照萊特頓 (Lyttleton) [13] 的研究, 我們可書之為

$$\begin{aligned} E_c &= -\frac{3}{10} \left(\frac{Ze}{R_0} \right)^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^\infty \frac{d\Gamma}{\Delta} \\ &= E_c^0 \frac{a^2 b^2 c^2}{2R_0^3} \int_0^\infty \frac{d\Gamma}{\Delta} \end{aligned} \quad (5a)$$

此處

$$\Delta^2 = (a^2 + \Gamma)(b^2 + \Gamma)(c^2 + \Gamma)$$

而 Γ 為橢圓體坐標 (ellipsoidal coordinate) 中 “似向徑” (radial-like) 之坐標。(5a) 中之積分可以反橢圓函數表之如下

$$E_c = E_c^0 \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{sn}^{-1} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}} \quad (5b)$$

其中之調數 k 則為

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

再度將 $\text{sn}^{-1}u$ 以幕級數展開，則 (5b) 式變為

$$E_c = E_c^0 [1 - (4/45)(e_1^2 - e_1 e_2 + e_2^2) + \dots] \quad (6)$$

(4)與(6)二式在變形不大時均有預期中的性質。關於穩定性的問題即可由計算總能量（亦即庫侖能量與表面能量的和）的變化而看出，其值可表之如下：

$$\Delta E_d = \frac{4}{45} E_s^0 \left(2 - \frac{E_c^0}{E_s^0} \right) (e_1^2 - e_1 e_2 + e_2^2) \quad (7)$$

只要 $E_c^0/E_s^0 < 2$ 成立，則系統對分裂反應即為穩定。否則，此系統即將發生自發分裂。此關係係在上述之早期之論文中導出。（佛蘭可係用 E 及 U 分別替代 E_c^0 及 E_s^0 二量）。

現在，若將(7)式中之各離心率視為變分參數，則我們立可發現，最穩定之形狀即為圓球體。由此等推論，我們可斷言，偶——偶原子核（even-even nuclei）及其他原子核的偶——偶核心（even-even cores）之低能階形態必為圓球形。若此結論是正確的，則各原子核的低能階構造在本質上必非旋轉體所有者。（在蒂博最初的提議後，以一量子力學觀點下之畸形旋轉體來解釋原子核之能階構造的觀念即不斷被提出作更深入之探討。然而，對於激發態原子核之自轉量（spin）及宇稱（parity）的知識卻相當貧乏，以致不能對此類之模型作任何實驗證明。由查閱當時關於原子核構造之資料摘要，即可知此種狀況一直延續至1950年〔39〕。直至1954年，方能確認出一具有數能階的原子核，其階距（spacing）令人聯想起一畸形旋轉體所有者〔131〕）。

自液滴模型之觀點看來，爲了要使原子核在靜態（static state）時即為畸形，則須在(7)式中加入一與離心率成線性關係的項。但加入此種項的必需性一直過了十年之久方被發現。在第二次世界大戰之後，許多人轉而致力於原子核之磁二重極矩（magnetic dipole moment）及

電四重極矩的測量。在這段時期中，當殼層模型的理論正在迅速發展之際，即可顯見，雖然測得之電四重極矩值顯示其確為一般殼層效應 (shell effects)——每當接近一般殼層邊際時，即變小且改變符號，而在到達殼層的中間部份時其值即變大 [104]——然在稀土元素區域內，其值即大得不能以殼層模型所假設由一個甚或數個質子各自在其獨立軌道中運行，而得之結論加以解釋。有些人提議，此等頗大之四重極矩值表示原子核的偏極化 (nuclear polarization) [154]。幾乎立即的，連華特 (Rainwater) 指出，一個在一不規則形狀的振動體位阱 (deformed oscillator well) 中運動的質點所具有的能量，可能較在一相似的圓球位阱 (spherical well) 中者為低 [139]。事實證明，此種能量的改變係與離心率的一次方成正比，故靜態的畸形液滴係可能的。此程序統一了殼層模型與液滴模型。

雖然雷瓦特在計算時採用了簡諧振動體的位函數 (oscillator potential)，實際上若採用一深度有限的方形位阱 (square well) 則可能較簡單，因其結果只差一數值因子。我們採用一由芬堡及漢·麥克 (Hammack) 所創的方法，但將之推廣至橢圓體狀畸變的情形考慮一質點，在一由下式所定義，深度為 D 的畸形位阱中運動

$$t^2 = \lambda x^2 + \kappa y^2 + z^2 / \lambda \kappa$$

位函數的定義為

$$\begin{aligned} V(t) &= -D, & t < R_0 \\ &= 0, & t \geq R_0 \end{aligned}$$

由於位阱自圓球形畸變而產生之能量變化恰為

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= E_p(e_1, e_2) - E_p(0) = \int |\phi_0(x, y, z)|^2 [V(t) - V(0)] dx dy dz \\ &= \int V(r) \left[\left| \phi_0 \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \frac{y}{\sqrt{\kappa}}, z \sqrt{\lambda \kappa} \right) \right|^2 - |\phi_0(x, y, z)|^2 \right] dx dy dz \end{aligned}$$

計算的進行，為先將方括弧內的第一項以泰勒級數 (Taylor's series) 對於未微擾解 (unperturbed solution) 展開，利用散度定理 (divergence theorem)，最後轉換至圓極坐標 (spherical polar coordinate)

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= -\frac{R_0^3 D}{3} \left\{ \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (e_1 - e_2) \int_i [Y_{22}(\theta, \varphi) + Y_{2-2}(\theta, \varphi)] \right. \\ &\quad \times |\psi_0(R_0, \theta, \varphi)|^2 d\Omega \\ &\quad \left. - 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} (e_1 + e_2) \int_i Y_{20}(\theta, \varphi) |\psi_0(R_0, \theta, \varphi)|^2 d\Omega \right\} \\ &= DR_0^3 \mathcal{R}_{n_l} \frac{l(l+1) - 3m^2}{3(2l-1)(2l+3)} (e_1 + e_2) \quad (8)\end{aligned}$$

此處，我們將未微擾解取為

$$\psi_0(r, \theta, \varphi) = \mathcal{R}_{n_l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

對一奇一 A 數原子核而言，其總能量即為由液滴及液滴外質點產生者的和。故將(7)式與(8)式相加，即得

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta E_d + \Delta E_p \\ &= A(e_1^2 - e_1 e_2 + e_2^2) + B(e_1 + e_2)\end{aligned}$$

將二離心率規為變分參數 (variational parameter) 處理，則我們立可發現，當液滴形狀為滿足下式的畸形對稱體時，可得能量的極小值

$$e_1 = e_2 = -B/A$$

故，此即為連華特所作計算的意義，但其含義較寬廣。

然而，此種類型的計算切不可當作畸形原子核必定具有一對稱軸此一概念的證據。前述已經被徹底研討過之命題，即對一團旋轉中流體所作之古典理論計算的結果，更不能支持此概念。此等計算的結果顯示，自一圓球開始系，統變形為一球體，然後繼續扭曲，經過一系列稱為麥克勞林球體 (MacLaurin spheroids) 的圖形。在某些情形下，此球

體系列與雅可布橢圓體系列 (family of Jacobi ellipsoids) 重疊, 且穩定狀況線 (line of stability) 通過此系列, 最後成爲一梨形之形體 [13]。量子力學觀點下的相似系統則不包含與此完全相同的特性, 但所得的結果却相當相似。且曾有人指出, 由於其邊界條件之故, 此旋轉原子核系統不可能成爲球狀體 [50]。此問題僅可能在此等現象學觀點的模型理論範疇外, 應用哈特力——霍克 (Hartree-Fock) 式的多粒子計算 (many particle calculation), 並使用如巴蘭吉 (Baranger) 及庫瑪 (Kumar) 所仔細選擇的殘剩力場 (residual force), 方能得到解決 [47]。

此等觀念在原子核構造理論上最初的應用, 包括磁二重極矩的測量值與單粒子殼層模型 (single-particle shell model) 所預示之值間的誤差計算。此係由利用一振動模型 (vibrational model), 在其中將角動量 (angular momentum) 爲 2 的表面振動量子與核心之角動量耦合而達成 [91]。利用轉動模型 (rotational model) 的相似研究亦曾進行 [55], 在此二場合中所得的數值結果均較應用單粒子殼層模型所得者更與實驗值符合。

在最近十至十五年間, 此等觀念已有極迅速的發展及擴充, 並已在大量實驗結果的組織化中產生了相當大的影響。特別值得一提的是, 我們現在已知道, 此等原子核畸變體模型在距離封閉殼層 (closed shell) 相當遠處的區域最爲有用。在此等區域中的原子核包含有一大部份的核粒子 (nucleons) 在一封閉殼層外運動, 因此便產生相當多可能的耦合情形。事實上, 我們的處理方法, 是由接近殼層邊際時非常有用的 $j-j$ 耦合 ($j-j$ coupling) 法衍變而來。各粒子並非在球對稱性之位阱中運動, 而是在一畸形的位阱中, 更因 j 值的混合, 而能將在較簡單的模型中所不能考慮的許多粒子交互作用 (correlations) 考慮在內。此原因——可能較任何其他原因爲重要——解釋了爲什麼我們將討論的極簡單模型能具有如此卓著的功效。