北京市中学教师继续教育教材

中学数学 重点课题教学研究

(初中部分)

傅佑珊　张家骅　唐守默　编

北京师范大学出版社

北京市中学教师继续教育教材

中学数学重点课题教学研究

（初中部分）

傅佑珊　张家骅　唐守默　编

北京师范大学出版社

（京）新登字160号

北京市中学教师继续教育教材

中学数学重点课题教学研究

（初中部分）

傅佑珊　张家骅　唐守默　编

*

北京师范大学出版社出版发行
全　国　新　华　书　店　经　销
北京师范大学印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：13.625　字数：284 千
1992年7月第1版　　1992年7月第1次印刷
印数：1—2 500

ISBN7-303-01606-6/G·1003
定价：6.95 元

内容简介

《中学数学重点课题教学研究》，初中部分包括代数和平面几何两章。共分五节：数与数的扩张、方程与方程思想、函数与函数观点、平面几何与基本图形、几何与类比推理。每节内容都包括三个要点：基本理论、思想方法和教学实践。

本书的特点是：在突出重点课题的基础上，对于每个课题内容的选择，力求做到"基本理论与思想方法相结合"、"教学理论与教学实践相结合"，把"基本理论、思想方法和教学实践"融于一体。体现了理论联系实际的编写原则。

本书可作为中学初级数学教师继续教育的教材，对于新教师和其它级别教师的教学也有参考作用。

前　言

教育是社会主义物质文明和精神文明建设极为重要的基础工程。它对提高全体人民的思想道德和科学文化素质，对建设有中国特色社会主义的经济、政治和文化，对培养一代又一代社会主义事业的建设者和接班人，具有重大的战略意义。百年大计，教育为本；教育大计，教师为本；教师大计，提高为本。不断更新教育观念，深化教育改革，提高教育教学质量，必须建设一支德才兼备，又红又专的师资队伍。

我市自1978年恢复师资培训工作以来，中学教师的学历结构发生了明显的变化，至今大部分中学教师已达到现阶段国家教委规定的学历要求。如何积极稳妥地开展学历合格后的继续教育，全面提高教师素质，培养一大批业务骨干、学科带头人和教育教学专家，已成为我市师训工作的当务之急。继续教育是师资培训工作的深入和发展，是深化教育改革的重要措施。通过深入开展继续教育，使不同层次教师的政治素质、思想素质、业务素质和师德素质都能在原有的基础上得到新的提高。

为此，北京市教育局和北京市科技干部局联合制订和颁发了《北京市中小学教师继续教育暂行规定》。《规定》指出，中学具有大学专科以上学历或40岁以上（不含40岁）。在1989年8月之前虽不具备合格学历，但具有中级以上教师职务的教师都应接受继续教育。其中，新分到中学任教的大

学毕业生，在试用期内要接受120学时的培训；初级职务的教师，在五年内要接受180学时的进修培训；中级职务的教师，在五年内要接受240学时的进修培训；高级职务的教师，要接受360学时的研修培训。《规定》还明确：“继续教育要和教师的考核、职评、聘任、晋级结合起来，作为职评、聘任、晋级和新教师转正的必要条件之一”。

为了更好地开展继续教育工作，北京教育学院会同各分院和教师进修学校，受北京市教育局的委托，于1989年3月制订出中学《继续教育教学计划》和《教学大纲》。经过近两年的实践，在总结经验的基础上，又对《教学计划》和《教学大纲》（试行稿）作了必要的修改，于1991年6月和10月颁发了新的修订稿。

在此基础上，为了适应北京市中学教师继续教育形势的发展，满足各层次继续教育班师生教学的需要，我们正在组织编写和审订《北京市中学教师继续教育教材》，将于1992年陆继出版。这是一项十分艰巨复杂的系统工程，我们遵照积极组织、认真编写、严格审订的原则，搞好继续教育的教材建设。为此，北京市教育局成立了北京市中学教师继续教育教材编审领导小组、编审委员会和学科编审小组，努力保证教材质量。在编写这套教材时，我们特别注意了坚持正确的政治方向，坚持四项基本原则，建设有中国特色社会主义的中学教师继续教育教材；坚持先进的科学性，注意学科特点，尽量反映适应中学教学需要的科研新成果，立论和资料要有新意；坚持实用性，突出继续教育的特点，理论联系实际，特别是密切联系中学教育教学和中学教师进修的实际，注意解决好知识与能力的关系问题，重点是提高教育教学能

力，直接或间接为提高中学教育教学质量和中学教师全面素质服务；坚持一定的系统性，编排合理的教材结构，并努力做到字数适当、图文并茂、体例统一和要求明确，备有思考练习和参考书目。

这套教材的编写、审订和出版，在北京市教育局的领导下，得到了进修院校教师和广大中学教师的合作，得到了许多专家、教授和学者的指导，得到了北京师范大学出版社的支持，在此表示衷心地感谢！

由于中学教师继续教育教材建设是一项全新的工作，许多理论和实际问题尚在研究探索阶段，加上我们的水平有限，教材中的不足和错误之处在所难免，恳请广大教师和各位读者批评指正，以便进一步修改、完善。

北京市中学教师继续教育教材编审委员会

1991.12

编者的话

《中学数学重点课题教学研究》分为初中和高中两门课程。中学数学教师根据自己教初中或教高中必选学其中的一门。本书是初中部分，供教初中的初级教师学习，它是根据《北京市中学数学教师继续教育教学大纲》的要求编写而成的。

本书的编写，从整体结构上我们注意了以下两方面。

1.尽可能区别于大专院校的《数学教学总论和分论》的课程；也区别于各区县教研部门举办的《数学教材教法讲座》。

2.围绕着初中数学重点课题，我们适当地编写了一些观点较高、知识较深和教学方法较有特色的内容，目的是使教师能用较高的观点分析初中数学教材和处理教材，能独立地开展教学研究。

在运用本书时，可结合本地区的实际情况，重点讲授某些内容，其余部分可留给学员自学讨论之用。

本书编写分工：唐守默（《数与数的扩张》）、张家骅（《函数与函数观点》）、傅佑珊（《方程与方程思想》、《平面几何与基本图形》、《几何与类比推理》）。

本书初稿完成之后，于泽禾和陈鹤年两位老师进行审订，并且提出了修改意见，在此表示衷心的感谢。

限于作者水平，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

作者

于北京教育学院西城分院　1991.12

目　　录

第一章　初中代数重点课题教学研究

§1　数与数的扩张

一、数的概念的扩张

数是数学研究的一个最基本的对象，是数学研究各项内容的重要基础，也是在实际中应用最广泛的工具。因此学习数并逐步扩充学生关于数的概念，掌握数的运算及性质，是中学数学教学的一个重要任务。

学生从小学入学开始学习数学，首先接触的就是数及数的四则运算，直到高中二年级学习复数，历时十一年。可以说整个中小学阶段一直在扩充学生关于数的概念，可见份量之重。作为一名中学数学教师，有必要对数及数系的扩张有比较清楚的、系统的、逻辑的认识。

（一）数的概念形成和扩张的历史概述

M·克莱因〔美〕曾经说："历史背景是重要的。现在的根，深扎在过去，而对于寻求理解'现在之所以成为现在这样子'的人们来说，过去的每一件事都不是无关的"。数系的每一次扩张，都要建立新概念，教学每到这种关节就会有一定的困难。这里不仅有个教法问题，也有教师对概念的领会和认识问题。了解一些数系发展的历史及其根由，会有助于问题的解决。

数的概念产生于实际的需要，它的产生与发展是与量的度量密切相关的。在远古时期，人们为了要比较这一事物集合与另一事物集合的多与少，并且需要把反映其多与少的“数目”告诉别人，这就势必需要产生数的概念及其表示方法。当然，数不是一下子产生的，开始人们不能把数从具体事物中抽象出来，而是采用“对应”的方法来确定多少，从史料中可知，历史上有的民族用“眼睛”表示2，用“手”表示5，中国古代也有“结绳记数”的记载。这些都是最朴素的集合、对应的思想在记数方法中的应用，但它不是数的概念。人们世世代代进行比较，运用这种对应之后，才把数从具体的事物集合中抽象出来。认识到“5”是{五只羊}，{五个人}，{五个手指}，{五个绳结}这样一些集合的共同属性。引进数字符号，逐步形成了自然数的概念，由于人有天然的计数工具——十指，产生了十进位制的数（自然数）。

随着生产的不断发展，人们需要丈量土地，观测天象。在这些测量实践中，人们发现仅用正整数来表示测量结果是不够的，需要把单位进行划分，以便更准确地表示测量的结果，这样就产生了正分数和小数。从史料上得知，三千多年前，古埃及的纸草书中已经有关于正分数的记载。引进正分数是对数的概念的第一次扩张。

随着人类对量的概念的理解的不断加深，人们逐渐认识了不可公度线段的存在。大约在公元前5世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派在研究用一个正方形的边长作为单位长，去量正方形的对角线时，发现它们是不可公度的。为了表示不可公度线段的比值，导致了无理数的产生。尽管人们很早就认识了无理数的存在，但是严格的实数理论的建立，直到19世

纪70年代才真正完成。

人类对“0”的认识是比较晚的。公元6世纪印度数学家开始采用“0”表示记数中的空位。在我国古代筹算中却是利用空位的办法来表示“0”的。有了“0”才逐步形成了位置和数值统一的计数方法。

负数概念的产生也是相当迟的。一方面为了测量中表达具有相反意义的量的需要，另一方面也是为了解决数学自身的矛盾——在正数（或非负数）范围内减法不能永远实施，产生了负数的概念。但人类对于它的认可却经历了很长的历史时期。负数的思想，最早产生于我国古算书《九章算术》中（公元1世纪），书中就已经提出正负数的不同表示法和加减法则。印度数学家（公元476年）也是较早应用正负数概念的。不过当时还都不知用符号来表达负数。直到公元15世纪，才有人引进了负数符号，但很多数学家仍对负数持怀疑态度。直到公元16世纪，著名的德国数学家史提非还说：“负数”是“无稽”的或“虚伪的零下”。他们认为既然0解释为“什么也没有”，还有什么可以小于“什么也没有”呢？直到17世纪，人们才对负数有了比较完全的认识。这提醒我们，对负数的认识要比分数、小数困难得多。

虚数的引入是为了解决数学本身提出的问题，16世纪意大利数学家塔尔塔里亚在解一元三次方程时，首先采用了负数开平方运算，并取得了满意的结果，在求根公式中引入了新数$\sqrt{-1}$，并在代数中给予应用。但是当时很多数学家都不承认这种新数，直到二百年后，复数的几何表示出现了，虚数得到了具体的解释，复数在解决实际问题中取得了很大的成功，这种新数才被人们承认并巩固下来。

大体上说来，人类对数系的认识过程是这样的：

$$\text{自然数集}\xrightarrow{\text{添正分数}}\text{正有理数集}\xrightarrow{\text{添正无理数}}$$
$$\text{正实数集}\xrightarrow{\text{添零和负数}}\text{实数集}\xrightarrow{\text{添虚数}}\text{复数集。}$$

从上述历史的概述中，我们可以看出：

〈1〉数集的每一次扩张，总是由于旧有的数集与要解决的实际问题之间的矛盾引起的。（有些是为解决实际问题而提出的，也有些是为解决数学自身的矛盾而提出的）最后还必须取得了实际解释，在实际上显示了它的作用，才能被承认，被人类所接纳。然后人们再按照严谨的逻辑结构，逐步建立起相应的数的理论。

〈2〉数系的扩张，经历了一个漫长的历史时期。各种数的概念的产生和形成，不是那么层次分明的，而是相互交错进行的。在认识负数以前，人们就认识了不可公度线段及无理数；在实数理论未建立以前，人们就认识了虚数等等。现代的科学的数系，是后人根据严谨的逻辑结构建立起来的。

〈3〉数的概念的发展，是与量的测量紧密结合在一起的。所以教学中，讲授数的概念时，也应与计数和测量紧密结合。历史上某些难产的概念，往往也是教学中的难点所在。例如对负数的认识，无理数的概念及实数理论等都是教学中的难点。

（二）数系扩张的两种形式

为了建立完整理论的需要，科学的数系的建立一般采用以下的逻辑顺序：

自然数集（N）⟶整数集（Z）⟶有理数集（Q）⟶实数集（R）⟶复数集（C）