

北京市中学教师继续教育教材

中学数学 重点课题教学研究

(初中部分)

傅佑珊 张家骅 唐守默 编

北京师范大学出版社

北京市中学教师继续教育教材

中学数学重点课题教学研究

(初中部分)

傅佑珊 张家骅 唐守默 编

北京师范大学出版社

(京)新登字160号

北京市中学教师继续教育教材
中学数学重点课题教学研究
(初中部分)

傅佑珊 张家骅 唐守默 编

北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
北京师范大学印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 13.625 字数: 284 千
1992年7月第1版 1992年7月第1次印刷

印数: 1—2 500

ISBN7-303-01606-6/G·1003

定价: 6.95 元

内 容 简 介

《中学数学重点课题教学研究》，初中部分包括代数和平面几何两章。共分五节：数与数的扩张、方程与方程思想、函数与函数观点、平面几何与基本图形、几何与类比推理。每节内容都包括三个要点：基本理论、思想方法和教学实践。

本书的特点是：在突出重点课题的基础上，对于每个课题内容的选择，力求做到“基本理论与思想方法相结合”、“教学理论与教学实践相结合”，把“基本理论、思想方法和教学实践”融于一体。体现了理论联系实际编写原则。

本书可作为中学初级数学教师继续教育的教材，对于新教师和其它级别教师的教学也有参考作用。

北京市中学教师继续教育教材

编审常务委员会

主任：徐俊德

副主任：倪传荣 张维善

委员：邵宝祥 阎玉龙 曹福海 刘宗华 赵恒启

袁佩林 胡秀英 陈景仁 孙贵恕 韩友富

数学教材编审小组：

陈通鑫 王长沛 傅佑珊 陈焱午 曹才翰

前 言

教育是社会主义物质文明和精神文明建设极为重要的基础工程。它对提高全体人民的思想道德和科学文化素质，对建设有中国特色社会主义的经济、政治和文化，对培养一代又一代社会主义事业的建设者和接班人，具有重大的战略意义。百年大计，教育为本；教育大计，教师为本；教师大计，提高为本。不断更新教育观念，深化教育改革，提高教育教学质量，必须建设一支德才兼备，又红又专的师资队伍。

我市自1978年恢复师资培训工作以来，中学教师的学历结构发生了明显的变化，至今大部分中学教师已达到现阶段国家教委规定的学历要求。如何积极稳妥地开展学历合格后的继续教育，全面提高教师素质，培养一大批业务骨干、学科带头人和教育教学专家，已成为我市师训工作的当务之急。继续教育是师资培训工作的深入和发展，是深化改革的重要措施。通过深入开展继续教育，使不同层次教师的政治素质、思想素质、业务素质和师德素质都能在原有的基础上得到新的提高。

为此，北京市教育局和北京市科技干部局联合制订和颁发了《北京市中小学教师继续教育暂行规定》。《规定》指出，中学具有大学专科以上学历或40岁以上（不含40岁）。在1989年8月之前虽不具备合格学历，但具有中级以上教师职务的教师都应接受继续教育。其中，新分到中学任教的大

学毕业生，在试用期内要接受120学时的培训；初级职务的教师，在五年内要接受180学时的进修培训；中级职务的教师，在五年内要接受240学时的进修培训；高级职务的教师，要接受360学时的研修培训。《规定》还明确：“继续教育要和教师的考核、职评、聘任、晋级结合起来，作为职评、聘任、晋级和新教师转正的必要条件之一”。

为了更好地开展继续教育工作，北京教育学院会同各分院和教师进修学校，受北京市教育局的委托，于1989年3月制订出中学《继续教育教学计划》和《教学大纲》。经过近两年的实践，在总结经验的基础上，又对《教学计划》和《教学大纲》（试行稿）作了必要的修改，于1991年6月和10月颁发了新的修订稿。

在此基础上，为了适应北京市中学教师继续教育形势的发展，满足各层次继续教育班师生教学的需要，我们正在组织编写和审订《北京市中学教师继续教育教材》，将于1992年陆续出版。这是一项十分艰巨复杂的系统工程，我们遵照积极组织、认真编写、严格审订的原则，搞好继续教育的教材建设。为此，北京市教育局成立了北京市中学教师继续教育教材编审领导小组、编审委员会和学科编审小组，努力保证教材质量。在编写这套教材时，我们特别注意了坚持正确的政治方向，坚持四项基本原则，建设有中国特色社会主义的中学教师继续教育教材；坚持先进的科学性，注意学科特点，尽量反映适应中学教学需要的科研新成果，立论和资料要有新意；坚持实用性，突出继续教育的特点，理论联系实际，特别是密切联系中学教育教学和中学教师进修的实际，注意解决好知识与能力的关系问题，重点是提高教育教学能

力，直接或间接为提高中学教育质量和中学教师全面素质服务；坚持一定的系统性，编排合理的教材结构，并努力做到字数适当、图文并茂、体例统一和要求明确，备有思考练习和参考书目。

这套教材的编写、审订和出版，在北京市教育局的领导下，得到了进修院校教师和广大中学教师的合作，得到了许多专家、教授和学者的指导，得到了北京师范大学出版社的支持，在此表示衷心地感谢！

由于中学教师继续教育教材建设是一项全新的工作，许多理论和实际问题尚在研究探索阶段，加上我们的水平有限，教材中的不足和错误之处在所难免，恳请广大教师和各位读者批评指正，以便进一步修改、完善。

北京市中学教师继续教育教材编审委员会

1991.12

编者的话

《中学数学重点课题教学研究》分为初中和高中两门课程。中学数学教师根据自己教初中或教高中必选学其中的一门。本书是初中部分，供教初中的初级教师学习，它是根据《北京市中学数学教师继续教育教学大纲》的要求编写而成的。

本书的编写，从整体结构上我们注意了以下两方面。

1. 尽可能区别于大专院校的《数学教学总论和分论》的课程；也区别于各区县教研部门举办的《数学教材教法讲座》。

2. 围绕着初中数学重点课题，我们适当地编写了一些观点较高、知识较深和教学方法较有特色的内容，目的是使教师能用较高的观点分析初中数学教材和处理教材，能独立地开展教学研究。

在运用本书时，可结合本地区的实际情况，重点讲授某些内容，其余部分可留给学员自学讨论之用。

本书编写分工：唐守默（《数与数的扩张》）、张家骅（《函数与函数观点》）、傅佑珊（《方程与方程思想》、《平面几何与基本图形》、《几何与类比推理》）。

本书初稿完成之后，于泽禾和陈鹤年两位老师进行审订，并且提出了修改意见，在此表示衷心的感谢。

限于作者水平，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

作者

于北京教育学院西城分院 1991.12

目 录

第一章 初中代数重点课题教学研究	(1)
§1 数与数的扩张	(1)
一、数的概念的扩张	(1)
(一) 数的概念形成和扩张的历史概述	(1)
(二) 数系扩张的两种形式	(4)
(三) 数系扩张的原则	(7)
二、有理数集	(8)
(一) 数环和数域	(9)
(二) 有理数集的性质	(12)
(三) 绝对值概念的教学研究	(18)
三、实数集	(29)
(一) 关于有理数等价于有限或无限循环小数	(30)
(二) 关于无理数的引入	(32)
(三) 关于实数与数轴	(34)
(四) 关于实数集的性质	(35)
(五) 三个非负实数及其教学研究	(36)
四、扩张法及其应用	(41)
(一) 扩张法	(42)
(二) 扩张法应用举例	(42)
五、练习与思考	(51)
(一) 练习与思考	(51)
(二) 答案与提示	(53)
§2 方程与方程思想	(58)
一、方程的概念	(62)
(一) 等式	(62)

(二) 方程	(63)
(三) 解方程	(64)
(四) 方程的分类	(67)
(五) 同解方程	(68)
二、整式方程	(69)
(一) 同解方程定理	(69)
(二) 一元一次和一元二次方程同解性分析	(72)
(三) 一元 n 次方程的代数解	(74)
(四) 一元二次方程的教学研究	(88)
三、分式方程和无理方程	(97)
(一) 同解方程定理	(97)
(二) 分式方程的解法	(101)
(三) 无理方程的解法	(109)
(四) 分式方程和无理方程的教学研究	(118)
四、方程组	(120)
(一) 方程组概念	(120)
(二) 方程组的同解定理	(120)
(三) 一次和二次方程组同解性分析	(123)
(四) 一次方程组的解法	(124)
(五) 二次方程组的解法	(130)
(六) 方程组的教学研究	(141)
五、初等超越方程	(146)
(一) 指数方程的同解性	(146)
(二) 对数方程的同解性	(149)
(三) 三角方程的同解性	(153)
六、方程思想及其应用	(161)
(一) 方程思想	(161)
(二) 方程思想应用举例	(163)
七、练习与思考	(178)
(一) 练习与思考	(173)
(二) 答案与提示	(175)

§3 函数与函数观点	(178)
一、地位和作用	(178)
(一) 函数概念深刻地反映了客观世界的运动	(178)
(二) 函数观点体现了极为重要的数学思想	(179)
(三) 函数在理论和实践上有十分广泛的应用	(180)
(四) 中学代数课程中关于函数的内容安排	(180)
二、函数概念	(181)
(一) 函数概念形成和发展的历史概述	(181)
(二) 函数定义	(184)
(三) 函数的相等和化简	(188)
(四) 函数关系和因果关系	(194)
(五) 函数与方程的联系和区别	(194)
(六) 函数概念及其引入课的教学研究	(197)
三、函数图象和性质	(208)
(一) 函数图象的作法	(208)
(二) 函数性质	(222)
(三) 二次函数复习课的教学研究	(253)
四、函数观点及其应用	(259)
(一) 函数观点	(259)
(二) 函数观点应用举例	(260)
(三) 加强函数观点的教学	(287)
五、练习与思考	(288)
(一) 练习与思考	(288)
(二) 答案与提示	(292)
第二章 平面几何重点课题教学研究	(295)
§1 平面几何与基本图形	(295)
一、基本图形法	(297)
(一) 基本图形法的模式	(297)
(二) 掌握基本图形法的四项基本要求	(301)
(三) 化归原则与基本图形法	(309)

二、直线形与基本图形	(312)
(一) 直角三角形及其斜边上的高	(312)
(二) 三角形及其角平分线	(333)
三、圆与基本图形	(365)
(一) 圆内接四边形及其对角线	(365)
(二) 圆及其切割线	(380)
四、练习与思考	(394)
(一) 练习与思考	(394)
(二) 答案与提示	(394)
§2 几何与类比推理	(397)
一、类比推理概述	(398)
(一) 类比推理的意义	(398)
(二) 类比推理的作用	(398)
(三) 几种常用的类比	(402)
二、平面几何与立体几何的类比	(405)
(一) 类比的根据	(405)
(二) 类比的方法	(407)
三、类比推理与创造性思维	(417)
四、练习与思考	(417)
(一) 练习与思考	(417)
(二) 答案与提示	(418)
参考文献和资料	(419)

第一章 初中代数重点课题教学研究

§1 数与数的扩张

一、数的概念的扩张

数是数学研究的一个最基本的对象，是数学研究各项内容的重要基础，也是在实际中应用最广泛的工具。因此学习数并逐步扩充学生关于数的概念，掌握数的运算及性质，是中学数学教学的一个重要任务。

学生从小学入学开始学习数学，首先接触的就是数及数的四则运算，直到高中二年级学习复数，历时十一年。可以说整个中小学阶段一直在扩充学生关于数的概念，可见份量之重。作为一名中学数学教师，有必要对数及数系的扩张有比较清楚的、系统的、逻辑的认识。

(一) 数的概念形成和扩张的历史概述

M·克莱因〔美〕曾经说：“历史背景是重要的。现在的根，深扎在过去，而对于寻求理解‘现在之所以成为现在这样子’的人们来说，过去的每一件事都不是无关的”。数系的每一次扩张，都要建立新概念，教学每到这种关节就会有一定的困难。这里不仅有个教法问题，也有教师对概念的领会和认识问题。了解一些数系发展的历史及其根由，会有助于问题的解决。

数的概念产生于实际的需要，它的产生与发展是与量的度量密切相关的。在远古时期，人们为了要比较这一事物集合与另一事物集合的多与少，并且需要把反映其多与少的“数目”告诉别人，这就势必需要产生数的概念及其表示方法。当然，数不是一下子产生的，开始人们不能把数从具体事物中抽象出来，而是采用“对应”的方法来确定多少，从史料中可知，历史上有的民族用“眼睛”表示2，用“手”表示5，中国古代也有“结绳记数”的记载。这些都是最朴素的集合、对应的思想在记数方法中的应用，但它不是数的概念。人们世代代进行比较，运用这种对应之后，才把数从具体的事物集合中抽象出来。认识到“5”是{五只羊}，{五个人}，{五个手指}，{五个绳结}这样一些集合的共同属性。引进数字符号，逐步形成了自然数的概念，由于人有天然的计数工具——十指，产生了十进位制的数（自然数）。

随着生产的不断发展，人们需要丈量土地，观测天象。在这些测量实践中，人们发现仅用正整数来表示测量结果是不够的，需要把单位进行划分，以便更准确地表示测量的结果，这样就产生了正分数和小数。从史料上得知，三千多年前，古埃及的纸草书中已经有关于正分数的记载。引进正分数是对数的概念的第一次扩张。

随着人类对量的概念的理解的不断加深，人们逐渐认识了不可公度线段的存在。大约在公元前5世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派在研究用一个正方形的边长作为单位长，去量正方形的对角线时，发现它们是不可公度的。为了表示不可公度线段的比值，导致了无理数的产生。尽管人们很早就认识了无理数的存在，但是严格的实数理论的建立，直到19世

纪70年代才真正完成。

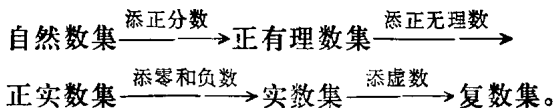
人类对“0”的认识是比较晚的。公元6世纪印度数学家开始采用“0”表示记数中的空位。在我国古代筹算中却是利用空位的办法来表示“0”的。有了“0”才逐步形成了位置和数值统一的计数方法。

负数概念的产生也是相当迟的。一方面为了测量中表达具有相反意义的量的需要，另一方面也是为了解决数学自身的矛盾——在正数（或非负数）范围内减法不能永远实施，产生了负数的概念。但人类对于它的认可却经历了很长的历史时期。负数的思想，最早产生于我国古算书《九章算术》中（公元1世纪），书中就已经提出正负数的不同表示法和加减法则。印度数学家（公元476年）也是较早应用正负数概念的。不过当时还都未知用符号来表达负数。直到公元15世纪，才有人引进了负数符号，但很多数学家仍对负数持怀疑态度。直到公元16世纪，著名的德国数学家史提非还说：

“负数”是“无稽”的或“虚伪的零下”。他们认为既然0解释为“什么也没有”，还有什么可以小于“什么也没有”呢？直到17世纪，人们才对负数有了比较完全的认识。这提醒我们，对负数的认识要比分数、小数困难得多。

虚数的引入是为了解决数学本身提出的问题，16世纪意大利数学家塔尔塔里亚在解一元三次方程时，首先采用了负数开平方运算，并取得了满意的结果，在求根公式中引入了新数 $\sqrt{-1}$ ，并在代数中给予应用。但是当时很多数学家都不承认这种新数，直到二百年后，复数的几何表示出现了，虚数得到了具体的解释，复数在解决实际问题中取得了很大的成功，这种新数才被人们承认并巩固下来。

大体上说来，人类对数系的认识过程是这样的：



从上述历史的概述中，我们可以看出：

〈1〉数集的每一次扩张，总是由于旧有的数集与要解决的实际问题之间的矛盾引起的。（有些是为解决实际问题而提出的，也有些是为解决数学自身的矛盾而提出的）最后还必须取得了实际解释，在实际上显示了它的作用，才能被承认，被人类所接纳。然后人们再按照严谨的逻辑结构，逐步建立起相应的数的理论。

〈2〉数系的扩张，经历了一个漫长的历史时期。各种数的概念的产生和形成，不是那么层次分明的，而是相互交错进行的。在认识负数以前，人们就认识了不可公度线段及无理数；在实数理论未建立以前，人们就认识了虚数等等。现代的科学数系，是后人根据严谨的逻辑结构建立起来的。

〈3〉数的概念的发展，是与量的测量紧密结合在一起的。所以教学中，讲授数的概念时，也应与计数和测量紧密结合。历史上某些难产的概念，往往也是教学中的难点所在。例如对负数的认识，无理数的概念及实数理论等都是教学中的难点。

（二）数系扩张的两种形式

为了建立完整理论的需要，科学的数系的建立一般采用以下的逻辑顺序：

自然数集 (N) \longrightarrow 整数集 (Z) \longrightarrow 有理数集 (Q)
 \longrightarrow 实数集 (R) \longrightarrow 复数集 (C)