国家自然科学基金资助项目

边界元理论及应用

杨德全　赵忠生　著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

边界元理论及应用/杨德全,赵忠生著.—北京:北京理工大学出版社,2002.9

ISBN 7-81045-931-7

Ⅰ.边… Ⅱ.①杨…②赵… Ⅲ.边界元法 Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011717 号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(办公室)　68912824(发行部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/北京房山先锋印刷厂
装　　订/天津高村印装厂
开　　本/850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张/10.25
字　　数/258 千字
版　　次/2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
印　　数/1~1500 册　　责任校对/郑兴玉
定　　价/18.00 元　　责任印制/刘京凤

前　言

物理问题的数学模型一般有三种主要形式，第一种是描写微元的微分方程，第二种是综合整个区域的变分式，第三种归结为区域边界上的积分方程，同一实际问题往往可同时找到这三种形式，并且在数学的推演上是相通的。上述三种模型都是描写无限自由度的问题，如果存在封闭的解析解，则可求出需要的结果。由于方程及实际问题的复杂性，绝大多数问题找不到这样的解析解。于是将无限自由度的问题经过离散化处理而化为有限自由度的问题。现代电子计算机在有限自由度的问题上大有用武之地，这也是电子计算机问世以后物理和工程计算方法飞速发展的原因之一。

有限差分法虽然历史久远，但由于理论比较完整，在目前的教科书中仍占有重要地位。它直接从微分方程出发，将求解区域划分成网格，近似地用差分、差商代替微分、微商，于是无限自由度的问题化成了有限自由度的问题。这种方法在解决规则边界的问题时极为方便，但也正是由于这种限制而增加了它的局限性，即对于非规则边界的问题适用性较差。

有限元法的重要归化途径是从微分方程所对应的泛函出发，用变分原理结合区域剖分得到离散算式——代数方程组。它克服了有限差分法对区域形状的限制，对于各种形状的边界都能灵活处理，有限元法是目前工程计算的主要手段，这种方法的主要困难有两个：一是要找出微分方程对应的变分式，二是由于区域的剖分随着网格的加细而使方程组的维数增大，尽管使用电子计算机仍不能达到快速、精确的要求。工程师们正在期待着新一代计算方法的出现。

随着科学技术的发展，出现了新的计算方法——边界元法。这

种方法是用控制微分方程的基本解建立相应的边界积分方程，再对它结合边界的剖分而得到离散算式。由于只在边界上剖分，因此实际上是将问题降维处理，降维的结果必然减少代数方程组的未知数。由于积分方程可用加权余量法得到，即由于近似函数而引起的误差的合理分配而达到最佳效果。这就避免了寻找泛函的麻烦，这也是边界元法迅速发展的原因之一。

同源的三种数学模型产生三种等价的计算方法，离散的根据不同，手段各异，表现出的效果也不相同，有时差别很大。

边界元法是在经典的积分方程的基础上，吸收了有限元法的离散技术而发展起来的计算方法。从计算格式形成的全过程看，关键问题有两个。一个是问题的边界化，即将给定区域上的定解问题化为可以只考虑边界的问题。这一步的关键是格林(Green)公式，这是边界元法的基石。边界化的结果使问题降维，如果是各维尺度相近的大型问题，代数方程组的未知数按指数规律减少，这无疑将大大减少准备工作、存贮量与机时。有限元法要将全部区域及边界离散，并要求将全部节点纳入方程进行计算，这是因为这些结点值包含在同一个封闭方程组中。边界元法的封闭方程组中只有边界结点上的未知量，解完方程组再根据需要有目的地求内部值，因此减少了计算的盲目性。

边界化的好处还表现在扩大了方法的应用范围。对于低雷诺数粘性流动问题，用边界元方法与精确解的误差仅为 10^{-3}量级，对多体绕流及无限域问题也将化得十分简捷。对于像地下孔洞这种边界有限、区域无穷的问题，如果采用边界元法，将是一个极其简单的问题。计算无限介质中圆形内孔均匀受压问题，如取十二个常单元，与解析解比较的相对误差不超过 8%，如果是十二个线性单元，相对误差不超过 2%。

形成计算格式的第二个关键是边界的离散化。单就离散技术本身而言，与有限元法没有很大的不同。由于只对边界离散，因此计算误差只来源于边界，这就使我们将减少误差的全部注意力放

在边界上。又由于区域内由解析公式计算，这就提高了计算精度，并达到内部值的某些特殊要求，如连续性、可微性等。

计算格式形成的两个关键已经体现了计算简单、适应性强、精度高的优点，这正是这种方法生命力之所在。

边界元法的数学基础是积分方程理论，早在100多年前，阿贝尔(Abel)、亥姆霍兹(Helmholtz)等就对积分方程理论进行了深入的研究。弗雷德霍姆(Fredholm)在对积分方程研究的基础上，首先将这种理论用于弹性力学问题的求解。20世纪50年代，前苏联的米赫林(Mikhlin)、穆什海里什维里(Muskhelisvili)的工作为积分方程在工程上的应用开辟了道路。

电子计算机的发展开创了数值求解积分方程的新时期，一些学者研究了解积分方程的直接法和间接法，解决了一些弹性力学问题。20世纪60年代末，得到了三维弹性静力问题积分方程的数值解。至此，为边界元法奠定了理论和应用基础。

20世纪70年代边界元法已不仅在一般领域中得到发展，在断裂力学、塑性理论及各向异性等问题中的应用研究也都是成功的，这时有相当一批数学力学工作者及工程师将对有限元法的热情转向边界元法。这时还没有统一使用“边界元法”这一名称，曾用过的名称有边界积分方程法(Boundary integral equation method)、边界积分法(Boundary integral method)、格林函数法(Green's function method)、奇异性方法(Singularity method)、边界元法(Boundary element method)等，1978年，C·A·Brebbia在其著作“The boundary element method for engineers”中正式使用“边界元法”这一术语。相对于有限差分法和有限元法，将边界积分方程的离散技术称为边界元法是很合适的，三者的简称分别是FDM、FEM、BEM，“边界元法”这一名称已被世界各国公认并正式采用。

20世纪80年代以来，世界各国已从基本理论与方法的研究向深广的领域发展，在波的传播、断裂力学、接触问题、耦合问题、

粘弹塑性、振动问题、电磁场、流体力学、渗流问题、生物力学、等离子运动等方面都取得了不少成果。

边界元法的研究正处于上升阶段，应扩大在上述领域的研究与应用，加强基本理论（基本解、奇异积分、收敛性、误差估计、边界元外推法等）的研究，研究大型满秩非对称正定系数矩阵方程组的解法，开发有实用价值、能在微机上使用的程序包等。可以预言，随着研究工作的深入，必将结出更丰硕的成果。

我们的研究工作始于 1982 年，先后完成国家自然科学基金“八五”、“九五”规划两项课题，本书是在以上研究成果的基础上写成的。

本书得到国家自然科学基金项目（19772020）的资助。并承蒙北京大学颜大椿教授、浙江大学吴淇泰教授、河北工业大学王守信教授、林建平教授对本书的推荐和评审。作者的研究生吕树慧参加了书稿的校对工作。在此表示深深的谢意。

限于作者学识与水平，书中会有疏误不当之处，敬请读者多提宝贵意见。

作　者

2001 年 1 月

目　　录

第一章　边界元方法基础…………………………………………（1）
1.1　定解问题 ……………………………………………（1）
1.2　加权余量法 ……………………………………………（4）
1.3　变分法概述 ……………………………………………（12）
1.4　位势问题的加权余量法 ………………………………（19）
1.5　Dirac－δ 函数 ………………………………………（27）
1.6　基本解 ………………………………………………（34）
1.7　积分方程 ……………………………………………（46）
1.8　边界积分方程 …………………………………………（48）
1.9　格林公式及其应用 ……………………………………（53）
1.10　广义傅里叶展开…………………………………………（60）
1.11　特征函数及基本解………………………………………（70）
1.12　积分的算术化…………………………………………（78）
1.13　二重积分的离散计算……………………………………（87）
第二章　位势问题的边界元方法……………………………………（97）
2.1　积分方程的离散 ………………………………………（97）
2.2　边界积分的计算 ………………………………………（102）
2.3　一维数值积分 …………………………………………（108）
2.4　多表面问题与无穷域问题 ……………………………（117）
2.5　泊松方程 ……………………………………………（119）
2.6　二维数值积分 …………………………………………（122）
2.7　线性单元 ……………………………………………（133）
2.8　高次单元 ……………………………………………（138）
2.9　角点问题 ……………………………………………（149）

第三章 流体力学的边界元方法…………………………(152)
3.1 流体力学基本方程组 …………………………(152)
3.2 不可压粘性流体定常运动的边界元方法 …………(158)
3.3 二维粘性流动的内流问题 ……………………(163)
3.4 多体内流问题 ………………………………(166)
3.5 二维低雷诺数无界粘性绕流问题 ………………(170)
3.6 三维粘性流动的内流问题 ……………………(173)
3.7 三维无界粘性绕流问题 ………………………(177)
3.8 非线性问题 …………………………………(180)
3.9 用边界元方法对润滑问题的研究 ………………(183)
3.10 生物力学中片流问题…………………………(188)
3.11 正交各向异性问题……………………………(195)
3.12 变系数渗流场问题……………………………(201)
第四章 弹性问题的边界元方法…………………………(206)
4.1 张量符号 ……………………………………(206)
4.2 弹性力学的基本方程 …………………………(209)
4.3 平面问题 ……………………………………(214)
4.4 平面问题的基本解 ……………………………(217)
4.5 弹性问题的加权余量法 ………………………(225)
4.6 积分方程 ……………………………………(227)
4.7 边界积分方程 ………………………………(229)
4.8 积分方程的离散 ……………………………(232)
4.9 边界积分的计算 ……………………………(235)
4.10 应力…………………………………………(239)
4.11 三维问题的基本解,开尔文问题 ………………(244)
4.12 三维问题的基本公式…………………………(248)
第五章 边界元方法在工程中的应用……………………(250)
5.1 亥姆霍兹方程 ………………………………(250)
5.2 电磁问题 ……………………………………(259)

5.3　弹性柱体的扭转 …………………………………… (263)
5.4　梁的弯曲 …………………………………………… (266)
5.5　非齐次亥姆霍兹方程 ……………………………… (272)
5.6　变系数非齐次亥姆霍兹方程 ……………………… (275)
5.7　热弹性问题 ………………………………………… (278)
5.8　区域划分法 ………………………………………… (282)
5.9　边界元与有限元的耦合 …………………………… (286)
5.10　具有线性算子非线性问题的边界元计算………… (294)
5.11　非线性问题示例…………………………………… (297)
5.12　非线性扩散问题的迭代法………………………… (300)
5.13　复数域上的耦合方法……………………………… (305)
参考文献………………………………………………………… (312)

第一章　边界元方法基础

1.1　定解问题

数学物理方程一般是指描述物理过程的微分方程，有时也包括积分方程。在力学、热学、电磁学、核物理学和其他自然科学及工程技术中常提出一些数学物理方程。电磁学中的麦克斯韦方程、热学中的热传导方程、力学中的弹性力学方程、流体力学方程等都是常见的。下面列出一些与边界元方法有密切联系的方程。其中的 ∇^2 表示

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(1) 拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0 \tag{1.1.1}$$

(2) 泊松方程

$$\nabla^2 u + P = 0 \tag{1.1.2}$$

(3) 达西方程

$$\nabla_0^2 u = 0 \tag{1.1.3}$$

式中

$$\nabla_0^2 = K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1.4}$$

(4) 亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 u + \omega^2 u = 0 \tag{1.1.5}$$

(5) 热传导方程

$$C \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.1.6}$$

(6) 波动方程

$$C\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1.7}$$

(7) 弹性静力学方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+f_x=0\\[2mm]\dfrac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+f_y=0\\[2mm]\dfrac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+f_z=0\end{cases} \tag{1.1.8}$$

上述方程往往可以描述多种物理过程,如拉普拉斯方程可以描述稳态电磁场中的电位分布、磁位分布,也可以描述稳定热传导过程中的温度场,还可以描述弹性扭转及一些流体力学问题。即使同一过程,初始条件和边界条件不同,其解答也不相同。这就说明了方程本身只表现出同一类现象中的共性,只有方程还不能决定具体的物理过程,方程加上初始条件和边界条件才能确定某一特指的物理过程。初始条件和边界条件合称为定解条件。

以三维热传导方程为例,方程(1.1.6)中的待求函数 $u=u(x,y,z,t)$,在不同的坐标位置 (x,y,z) 及时间 t 应有不同的值,如果给出物体边界上的温度分布(或热交换状况)和初始时刻的温度分布,就可以求出任何时刻的温度分布。设初始温度分布是 $u_0(x,y,z)$,则温度函数应满足如下的初始条件

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,z)\quad(\text{在区域内},t=0) \tag{1.1.9}$$

边界条件的提法可分为三种,分别称为第一、第二和第三边界条件。第一边界条件表示为

$$u(x,y,z,t)=\overline{u}(x,y,z,t)\quad(\text{在边界上}) \tag{1.1.10}$$

它表示在物体与外界交界的表面上,其温度分布用已知函数 $\overline{u}(x,y,z,t)$ 表示。第二边界条件可以写成

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}=\overline{q}(x,y,z,t)\quad(\text{在边界上}) \tag{1.1.11}$$

式中 n 表示边界的法向。用 $P(x,y,z,t)$ 表示单位时间内通过边

界上单位面积的热量，由傅里叶热传导定律应有

$$P(x,y,z,t)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t = -k\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \tag{1.1.12}$$

式中　$\mathrm{d}\Gamma$ 是边界上的微元面积，k 是热传导系数。如设

$$\bar{q}(x,y,z,t) = -P(x,y,z,t)/k \tag{1.1.13}$$

则得式(1.1.11)。第三边界条件表示边界上的热交换状况。如果物体周围介质的温度是 $u_1(x,y,z,t)$，按牛顿热交换定律(由一种介质流到另一种介质的热量与两种介质间的温度差成正比)就有

$$\mathrm{d}Q = h[u_1 - u]\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \tag{1.1.14}$$

式中　h 是两种介质间的热交换系数；$u(x,y,z,t)$ 是物体表面的温度；$\mathrm{d}Q$ 是在 $\mathrm{d}t$ 时段内由 $\mathrm{d}\Gamma$ 流入的热量。由傅里叶定律应有

$$\mathrm{d}Q = k\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \tag{1.1.15}$$

由热量守恒定律就得到

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = h[u_1 - u] \quad (\text{在边界上}) \tag{1.1.16}$$

或写成

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + hu = hu_1 \quad (\text{在边界上}) \tag{1.1.17}$$

这就是第三边界条件。

只有初始条件，没有边界条件的定解问题，称为初值问题，也称为柯西(Cauchy)问题。只有边界条件，没有初始条件的定解问题，称为边值问题。既有初始条件，又有边界条件的定解问题，称为混合问题。

要特别提出的是位势问题的定解条件，位势方程(如拉普拉斯方程、泊松方程)表示的物理现象是定常的，与时间无关，因此在定解条件中无初始条件，只有与时间无关的边界条件。这种条件也分三种情况：

第一边界条件

$$u(x,y,z) = \bar{u}(x,y,z) \tag{1.1.18}$$

第二边界条件

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial n}=\bar{q}(x,y,z) \qquad (1.1.19)$$

第三边界条件

$$k\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial n}+hu(x,y,z)=hu_1(x,y,z) \qquad (1.1.20)$$

这三种边值问题分别称为第一边值问题、第二边值问题和第三边值问题。有时在不同的边界上分别给出不同的边界条件，这就是“混合边值问题”，这种情况在工程上经常遇到。

在指定的定解条件下，求微分方程精确解析解的问题已经有了比较完整的理论，但是真正能求出解析解的问题却很少，只是在一些特殊情况下才有可能。客观事物是多种多样的，尤其工程技术中的问题更是如此。由于实际的需要，必须用数值法求解。有限差分法、有限元法和边界元法是最重要的数值法。电子计算机的发展，为数值解法创造了有利的条件。

1.2 加权余量法

加权余量法又称加权残数法，是用于求微分方程近似解的重要方法。

介绍加权余量法的目的，是为了由微分方程的定解问题导出对应的积分方程，再进一步得到边界积分方程和边界元法。这些工作虽然也能用格林公式得到，但是加权余量法表现出了更大的灵活性，并且易于同有限元法等其他方法相联系。

设精确解满足下面的定解问题

$$\begin{cases}L(u)=P & (\text{在区域 }\Omega\text{ 内})\\ G(u)=g & (\text{在边界 }\Gamma_1\text{ 上})\\ S(u)=q & (\text{在边界 }\Gamma_2\text{ 上})\end{cases} \qquad (1.2.1)$$

其中 L,G,S 都是算子。为了更直观地说明问题，考虑位势问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = P & \text{(在 } \Omega \text{ 内)} \\ u = \bar{u} & \text{(在 } \Gamma_1 \text{ 上)} \\ q = \dfrac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} & \text{(在(} \Gamma_2 \text{ 上)} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

式中　$\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma$ 是 Ω 的边界(图 1.2.1)，$\boldsymbol{n}$ 是边界 Γ 的外法向，$\bar{u}$ 和 $\bar{q}$ 是指定边界上的已知量或已知函数。Γ_1 上的边界条件有时称为本质边界条件，Γ_2 上的边界条件有时称为自然边界条件。

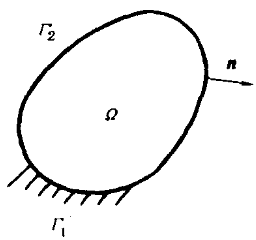

图 1.2.1

为了求此问题的近似解，用测试函数

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x,y) \tag{1.2.3}$$

去近似真正的解。式中的 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$是待定参数，$\varphi_k(x,y)$ $(k=1,2,\cdots,n)$是选定测试函数的函数项，在理论上它们应是线性无关完备序列中的一部分。

将测试函数代入方程，产生一个误差函数 ε，称之为余量或残数

$$\varepsilon = L\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x,y) \right) - P \tag{1.2.4}$$

为了消除余量 ε，用权函数 $\psi_j(x,y)(j=1,2,\cdots,n)$，列出消除余量的方程

$$\int_{\Omega} \varepsilon \psi_j \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.5}$$

在理论上权函数亦应是线性无关完备序列中的一部分。由式(1.2.5)可以看到，被积函数已知，积分后得到关于参数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的方程组

$$F_j(a_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.6}$$

求解得到 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$，于是得到近似解

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x,y) \tag{1.2.7}$$

权函数的不同选取方法及消除余量方程的不同形式决定了不同的加权余量法。表 1.2.1 给出五种基本方法，其中 x 可以是一维或多维的。

表 1.2.1

方　法	消除余量方程	权函数	注
矩量法	$\int_\Omega \varepsilon x^{j-1} \mathrm{d}\Omega = 0$	$x^{j-1}(j=1,2,\cdots,n)$	
配点法	$\int_\Omega \varepsilon\delta(x-x_j)\mathrm{d}\Omega = 0$	$\delta(x-x_j)$	$\delta(x-x_j)$ 是 δ 函数
子域法	$\int_{\Omega_j} \varepsilon \mathrm{d}\Omega = 0$	$\psi_j = \begin{cases} 1 & \Omega_j 内 \\ 0 & \Omega_j 外 \end{cases}$	Ω_j 是 Ω 的子域
伽辽金法	$\int_\Omega \varepsilon\varphi_j \mathrm{d}\Omega = 0$	$\psi_j = \varphi_j$	φ_j 是测试函数项
最小二乘法	$\int_\Omega \varepsilon \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_j} \mathrm{d}\Omega = 0$	$\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_j}$	

例 1 用加权余量法解下面的问题：

$$\begin{cases} L(u) - P = \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + u + x = 0 \qquad (0 < x < 1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{a}$$

解 用矩量法，取测试函数

$$u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \cdots) \tag{b}$$

它包含因子 $x(1-x)$，因此满足边界条件

$$u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

取前两项

$$u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) \tag{c}$$

余量 ε 是

$$\begin{aligned}\varepsilon &= L(u) - P \\ &= x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2\end{aligned} \tag{d}$$

因为要用矩量法，而测试函数取两项，因此

$$\psi_1 = 1,\ \psi_2 = x \tag{e}$$

将它们代入

$$\int_\Omega \varepsilon\psi_j \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (j = 1,2) \tag{f}$$

则应有

$$\left\{\begin{aligned}&\int_0^1 \varepsilon \cdot 1\mathrm{d}x = 0 \\ &\int_0^1 \varepsilon \cdot x\mathrm{d}x = 0\end{aligned}\right. \tag{g}$$

将余量 ε 代入(g)并计算积分，得到关于参数 α_1、α_2 的方程组

$$\begin{bmatrix}\frac{11}{6} & \frac{11}{12} \\ \frac{11}{12} & \frac{19}{20}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}\end{bmatrix} \tag{h}$$

解此方程组得

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{122}{649} \\ \frac{110}{649}\end{bmatrix} \tag{i}$$

近似解是

$$\begin{aligned}u &= x(1 - x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) \\ &= x(1 - x)\left(\frac{122}{649} + \frac{110}{649}x\right)\end{aligned} \tag{j}$$

此定解问题的精确解是

$$u = \frac{\sin x}{\sin 1} - x \tag{k}$$

例 2　用伽辽金法解例 1 的问题。

解　仍取测试函数为

$$u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) \tag{a}$$

余量仍是

$$\varepsilon = x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2 \tag{b}$$

伽辽金法要求权函数与测试函数相同，因此

$$\psi_1 = \varphi_1 = x(1-x),\ \psi_2 = \varphi_2 = x^2(1-x) \tag{c}$$

消除余量的积分式是

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \varepsilon\psi_1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \varepsilon x(1-x)\mathrm{d}x = 0 \\ &\int_0^1 \varepsilon\psi_2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \varepsilon x^2(1-x)\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}\right. \tag{d}$$

由此得

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3}{10} & \dfrac{3}{20} \\ \dfrac{3}{20} & \dfrac{13}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{20} \end{bmatrix} \tag{e}$$

求解得

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{71}{369} \\ \dfrac{7}{41} \end{bmatrix} \tag{f}$$

近似解是

$$\begin{aligned} u &= x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) \\ &= x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right) \end{aligned} \tag{g}$$

将例 1 及例 2 的结果与精确解的比较列成表 1.2.2。

表 1.2.2

x	矩量法	伽辽金法	精确解
0.25	0.043 191	0.044 0	0.044 014
0.50	0.068 181	0.069 8	0.069 747
0.75	0.059 084	0.060 0	0.060 056
0.90	0.030 647	0.031 1	0.030 911