罗增儒数学奥林匹克丛书

LUO ZENG RU SHU XUE AO LIN PI KE CONG SHU

新世纪版

高中数学奥林匹克

同步辅导 专题讲练 激发兴趣 拓展思维

三年级

罗增儒 主编

陕西师范大学出版社

罗增儒数学奥林匹克丛书

高中数学奥林匹克

三年级

主　编　罗增儒
副主编　李元中
　　　　文　锐
　　　　魏暹荪

陕西师范大学出版社

图书代号:JF185400

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克.三年级/罗增儒主编.—西安:陕西师范大学出版社,2001.7

ISBN7-5613-0665-2

Ⅰ.高… Ⅱ.罗… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第15582号

责任编辑 朱永庚
封面设计 徐 明
责任校对 郭健娇
出版发行 陕西师范大学出版社
社 址 西安市陕西师大120信箱(邮政编码:710062)
E-mail: nuph@pub.xaonline.com
经 销 新华书店
印 刷 陕西师范大学印刷厂
开 本 850×1168 1/32
印 张 6.5
字 数 143千
版 次 2001年7月第1版
印 次 2001年7月第2次
定 价 6.50元

开户行:西安工行小寨分理处 账 号:216-144610-44-815
读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换。
电 话:(029)5251046(传真) 5233753 5307864

让中学生更加聪明——写在前面

本书是在《高中数学奥林匹克系列教材》(1992年出版)的基础上,根据高中数学教学新大纲和第二课堂发展新需要而修订重组的,内容已作了充实,结构也作了调整.但是,我们对数学竞赛的认识始终如一,编写的指导思想也坚定如初.所以,我们仍保留"让中学生更加聪明"作为本书的前言.

一、数学竞赛的认识

把数学竞赛看成"解难题的竞赛"是一种浅薄的误解,把数学竞赛培训看成"数学工作者的预科教育"是一种不恰当的愿望,我们对数学竞赛的基本看法是:

1. 较高层次的基础教育

数学竞赛活动在本质上是一种基础教育,但更强调素质的培养和能力的发展.如果说,日常教学已经从"一纲一本"的封闭中走了出来,开始踏上"一纲多本"的大道,那么数学竞赛所体现的教育,实质上已突进到"多纲多本"的前哨.从而为学有余力的学生提供了自由发展和充分表现的机会.种种情况表明,许多学生的数学功底是在第一课堂准备的,而思维潜能却常常在第二课堂才爆发出来.

2. 数学文化的生动普及

历史已经昭示,未来将进一步证实,高科技的本质是一种数学技术;扫除"数学盲"的任务必将代替扫除"文盲"的工作;数学不仅是一门科学、一项艺术,而且也是一种文化.因此,数学竞赛最深刻的历史

作用,不在于选拔出几个数学尖子,而在于普及了数学文化.中学教材所提供的,基本上是历史的数学或数学的历史,而数学竞赛则可以渗透今天的数学或数学的今天.许多体现现代思想和高等背景的“活数学”正是通过竞赛的桥梁传播到中学校园的.虽然大量的选手将来并不以数学为职业,但他们从数学竞赛的文化熏陶中所获得的洞察力和创造机智,将受益终生.

3. 自由灵活的愉快教学

数学竞赛培训与日常教学相比,特点是有较多的自由度和较大的灵活性.教师可以根据反馈随时调节信息的速度、强度和顺序.每个学生不仅可以听,可以讨论,而且也可以写作小论文.总之,这是一个开放的系统,十分有利于实施愉快的教与学.

所有这一切可以归结到一点,数学竞赛将使中学生更加聪明.

二、写作安排的特点

本着“让中学生更加聪明”的精神,我们依据自己长期从事各级数学竞赛辅导的经验,挑选了一批有较高训练价值的素材,让同学们通过课外的、自由活泼的学习,将朴素的数学兴趣上升为真诚的科学热忱,将潜在的数学功底优化为闪光的数学才华.

在编排上,我们按照“高中数学竞赛大纲”的内容,组织成7大知识块:平面几何、立体几何、解析几何、代数、数论基础、组合初步和奥林匹克方法,并细分为46个小专题,然后,按照各年级的知识水平分成3册,各册既相对独立又前后呼应,结构成一个有机的整体.其整体性的特点主要有:

1. 立足高考　着眼竞赛

过去的许多竞赛辅导材料,一上来就立足于竞赛,师生曾有反映:吃不消.我们在实践中也感到,应该在课堂学习与数学竞赛之间加一个“中途点”.因此,我们的教材设计原则是,分两步走,先从高处接近高考,再从低处接近竞赛.就是说,以教材的加深加宽为基础,先进行高观点下的高考型的思维训练,然后再逐步加强竞赛的重点和

热点，到高三分册才将竞赛的内容推向高潮．这其中，自始至终强调数学方法的训练和策略意识的培养．有两方面的事实顺便提起．

(1)1997 年全国高中数学联赛推出了一个改革意见，将原来的一试、二试分成两个层次的考试，一试定名为“全国高中数学联赛”，命题范围以现行高中数学教学大纲为准，试题难度大体相当于普通高考中档、高档的试题．二试才以现行高中数学竞赛大纲为准．

这个改革意见与我们当初的写作思想不谋而合．对于参加培训的学生来说，这也是一个万全之策，退可站稳高考脚跟，进可迈向竞赛高台．

(2)读者通告我们，《高中数学奥林匹克系列教材》自 1992 年出版以来，仅第一册就有好几道题目成为正式高考(或竞赛)题的背景与原型(参看原书 P·18，P·70，P·106，P·115 等处，其中不难对照出 1996 年的两道高考解答题)，这种偶然的巧合，说明我们“立足高考，着眼竞赛”是认真的．

2．同步安排　系统跟踪

我们把 7 大知识块分成 46 个小专题后，不是再按原知识点合并，而是与教学同步地分到各年级分册．比如“平面几何”这一知识块，我们一方面与立体几何互相渗透，另一方面又设“向量方法”、“平面几何的著名定理”、“几何中的运动”、“趣味平面图形”、“等周问题”等多个小专题渐次安排到高一、高二、高三分册．对于数学解题的重要方法，除在各讲各例中尽量体现外，还专门组织了“反证法”、“数学归纳法”、“构造法”、“解析法”、“抽屉原理”、“数学奥林匹克的技巧”(一)、(二)、(三)等众多专题，由少到多地穿插到三个年级．

3．立体设计　螺旋提升

就是说，把各种因素、各种关系、各种要求都尽可能考虑进去，并从整体上协调起来，使得学生便于学习，教师便于辅导，既综合教育功能强又适应面广．

在编排上，高一分册以中学教材的加深加宽为主，高二分册加强

了高考的重点和竞赛的热点，高三分册突出竞赛、达到高中联赛第二试甚至接近冬令营的水平.

在每一专题的写作中，既注意知识点的数量、典型性和训练价值，又注意直接从中学课本中寻找生长点.例题的编排，通常都有较低的起点、较高的落点、较宽的跨度，教学中不必求齐求全.习题的配备，既注意到类型又注意到数量，既为学生准备较多的练习机会又为教师提供更大的选择余地.

在结构上，我们交叉安排，纵有7大知识块作经线，横有课本、高考、竞赛3个思维层次作纬线.代数，几何，数论，组合这4个数学竞赛的支柱都明显地在各年级中循环，其中也有从初中到高中的循环，但都不是简单重复，而是巩固深化、拾级登高的螺旋上升.

三、新旧教材的交接

新的高中教学大纲已经颁布，新教材正在一些省市试用，我们这本书是按新教材体系安排的，但在例题、习题的配备上考虑到新旧教材并存的需要.各地在使用本书时可根据自己的实际调整前后次序和增删例题、习题.比如，立体几何内容，原来安排在高一，现已移到高二下学期，而在高一增添了向量；相应的，数列和不等式也移到了高一，这对使用旧教材的地方就显得不方便了.但是总体上来说，仍不失其同步性.

作为前言的最后，谨向帮助、支持本书出版的有关人士表示由衷的感谢，也向关心本书将提出批评指正意见的读者提前表示欢迎与谢意.

罗增儒

2001年4月

目　　录

（习题的详细解答请参看罗增儒主编的《高中数学奥林匹克题解》）

第一讲

三面角与欧拉定理

一、三面角

1. 基本概念

有公共端点并且不在同一平面内的 $n \geqslant 3$ 条射线，以及相邻两条射线间的平面部分所组成的图形，叫做多面角.

如图 3-1-1，组成多面角的射线 $SA_1, SA_2, \cdots, SA_n$ 叫做多面角的棱，这些射线的公共端点 S 叫做多面角的顶点，相邻两棱的平面部分叫做多面角的面，相邻两棱组成的角 $\angle A_1SA_2$，$\angle A_2SA_3$，$\cdots$，$\angle A_nSA_1$ 叫做多面角的面角，相邻两个面组成的二面角 $A_i—SA_{i+1}—A_{i+2}$ 叫做多面角的二面角.（规定 $A_{n+i}=A_i$）

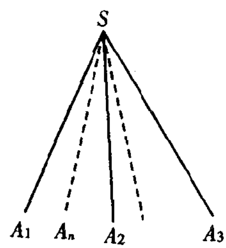

图 3-1-1

多面角按它的面数可分为三面角、四面角、五面角等. 若多面角在其每一面所在的平面的同侧，便叫做凸多面角，否则就叫做凹多面角. 最简单的凸多面角是三面角，三面角可用表示它的顶点和棱的字母来表示，如图 3-1-2，记作 $S—ABC$.

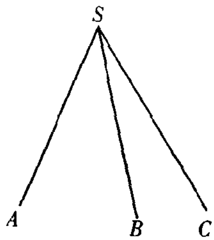

图 3-1-2

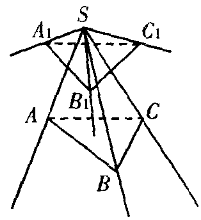

图 3-1-3

有两个面角相等的三面角,叫做等腰三面角,三面角中,如果有一个、二个、三个直二面角,就分别叫做一直三面角,二直三面角,三直三面角.如果将三面角中的面对应于三角形中的边,而二面角对应于三角形中的内角,那么它们之间有一些相似的命题.

2. 补三面角

给定三面角 $S—ABC$,从顶点 S 出发作三条射线 SA_1, SB_1, SC_1 分别垂直于平面 SBC, SCA, SAB,使射线 SA_1 与射线 SA 在平面 SBC 的同侧,射线 SB_1 与 SB 在平面 SAC 的同侧,射线 SC_1 与 SC 在平面 SAB 的同侧.那么三面角 $S—A_1B_1C_1$ 称为三面角 $S—ABC$ 的补三面角(如图 3-1-3).

定理 1 若 $S—A_1B_1C_1$ 是 $S—ABC$ 的补三面角,则 $S—ABC$ 也是 $S—A_1B_1C_1$ 的补三面角.

【证明】 首先我们有“若自平面上一点引平面的垂线、斜线,则两射线组成锐角的充要条件是:它们在平面的同侧”(证明略),现由补三面角的定义,有 $SB_1 \perp$ 平面 SCA, $SC_1 \perp SAB$, $\angle ASA_1 < d$,得 $SB_1 \perp SA$, $SC_1 \perp SA$,从而 $SA \perp$ 平面 SB_1C_1,且 $\angle A_1SA < d$,即 $SA \perp$ 平面 SB_1C_1,且 SA 与 SA_1 在面 SB_1C_1 的同侧.

同理可证,$SB \perp$ 平面 SC_1A_1, $SC \perp$ 平面 SA_1B_1 且 SB_1 与 SB

在平面 SC_1A_1 同侧，SC_1 与 SC 在平面 SA_1B_1 同侧. 按定义，三面角 $S—ABC$ 是三面角 $S—A_1B_1C_1$ 的补三面角.

定理 2 在两个互补的三面角中，一个的面角与另一个对应的二面角的平面角互补.

【证明】 如图 3-1-3，由于二面角的平面角等于两个平面的垂线夹角的补角，于是有

$$\angle BSC + 二面角\ B_1 - SA_1 - C_1 = 180^\circ,$$

$$\angle CSA + 二面角\ C_1 - SB_1 - A_1 = 180^\circ,$$

$$\angle ASB + 二面角\ A_1 - SC_1 - B_1 = 180^\circ.$$

再由定理 1 知，把三面角 $S—ABC$ 与 $S—A_1B_1C_1$ 地位互换，还可以得到另一组等式.

3. 三面角的简单性质

定理 3 三面角的任意两个面角的和大于第三个面角.

【证明】 在三面角 $S—ABC$ 中，若 $\angle ASC \leqslant \angle ASB$，显然有 $\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC$.

现设 $\angle ASC > \angle ASB$. 如图 3-1-4，在面 ASC 上作线段 SD_1，使 $\angle ASD_1 = \angle ASB$，过 D_1 引与各棱都相交的平面 $A_1B_1C_1$，使 $SB_1 = SD_1$. 这时 $\triangle A_1SB_1 \cong \triangle A_1SD_1$，得 $A_1B_1 = A_1D_1$.

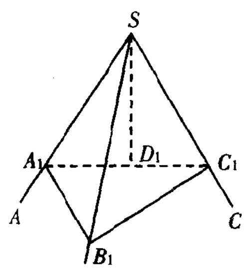

图 3-1-4

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1 + B_1C_1 > A_1C_1$，同时 $A_1D_1 + D_1C_1 = A_1C_1$，由此得到 $B_1C_1 > D_1C_1$.

在 $\triangle B_1SC_1$ 和 $\triangle D_1SC_1$ 中，因 $B_1C_1 > D_1C_1$，有

$$\angle B_1SC_1 > \angle D_1SC_1,$$

即 $$\angle BSC > \angle D_1SC,$$

因此 $\angle ASB+\angle BSC>\angle ASD_1+\angle D_1SC$,

就是 $\angle ASB+\angle BSC>\angle ASC$.

定理 4 三面角的三个面角之和小于 2π.

【证明】 如图 3-1-5,延长一棱 AS 得 SA_1,在三面角 $S—A_1BC$ 中,有

$$\angle BSC<\angle CSA_1+\angle A_1SB$$
$$=(\pi-\angle CSA)+(\pi-\angle ASB).$$

所以 $\angle BSC+\angle CSA+\angle ASB<2\pi$.

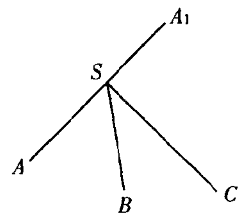

图 3-1-5

定理 5 三面角的三个二面角之和大于二直角.

【证明】 $S—A_1B_1C_1$ 表示 $S—ABC$ 的补三面角,于是由定理 2,定理 4,有

$$\angle B_1SC_1+\angle C_1SA_1+\angle A_1SB_1$$
$$=(\pi-\text{二面角 } B-SA-C)+(\pi-\text{二面角 } C-SB-A)$$
$$+(\pi-\text{二面角 } A-SC-B)<2\pi.$$

移项,得

二面角 $B—SA—C$ + 二面角 $C—SB—A$ + 二面角 $A—SC—B>\pi$.

4. 三面角中的正(余)弦定理.

在三面角 $S—ABC$ 中,记二面角 $C—SA—B$, $A—SB—C$, $A—SC—B$ 的平面角分别为 A,B,C,而 $\angle BSC=\alpha$, $\angle CSA=\beta$, $\angle ASB=\gamma$,则有

(1)正弦定理

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

(2)第一余弦定理

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A,$$
$$\cos\beta=\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos B,$$
$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

(3)第二余弦定理.

$$\cos A = -\cos B\ \cos C + \sin B\ \sin C\ \cos\alpha,$$
$$\cos B = -\cos A\ \cos C + \sin A\ \sin C\ \cos\beta,$$
$$\cos C = -\cos A\ \cos B + \sin A\ \sin B\ \cos\gamma.$$

【证明】 先证正弦定理. 于棱 SA 上取点 P,使 $SP=1$,设 Q,R,H 是 P 在直线 SB,SC 及平面 SBC 上的射影.

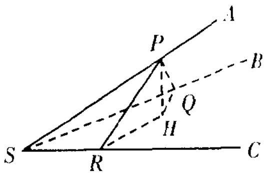

图 3-1-6

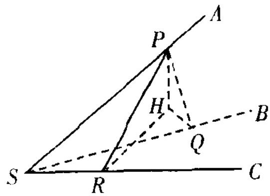

图 3-1-7

在 Rt△PQH 中,$\angle PQH$ 或等于 B(当 $B\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,如图 3-1-6),或等于 $\pi-B$($B>\frac{\pi}{2}$ 时,如图 3-1-7),均有

$$PH = PQ\ \sin B = SP\sin\gamma\sin B = \sin\gamma\sin B.$$

同样,在 Rt△PRH,Rt△SPR 中,有

$$PH = \sin\beta\sin C,$$

于是

$$\frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

同理,可证

$$\frac{\sin\gamma}{\sin C} = \frac{\sin\alpha}{\sin A}.$$

所以

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

再证第一余弦定理,如图 3-1-8,取 $SA=1$. 作 AD 垂直于平面 BSC,在面 BSC 上,作 $DE\perp SB$,$DF\perp SC$,$FG\perp SB$,连 AE,AF. 有

$$SE=\cos\gamma,$$
$$SE=SG+GE.$$

但 $SG=SF\cos\alpha=SA\cos\beta\cdot\cos\alpha$

$=\cos\beta\cos\alpha;$

$GE=FD\sin\alpha$

$=AF\cos C\cdot\sin\alpha$

$=SA\sin\beta\cdot\cos C\sin\alpha$

$=\sin\alpha\sin\beta\cos C.$

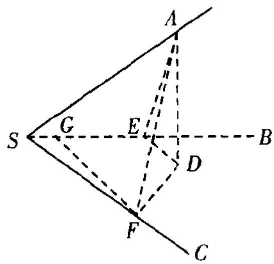

图 3-1-8

得 $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C.$

同理可证另外两个等式.

第二余弦定理的证明. 作三面角 $S—ABC$ 的补三面角 $S—A_0B_0C_0$,则对三面角 $S—A_0B_0C_0$ 有第一余弦定理成立,利用互补三面角的面角与二面角之间的关系有

$$\cos(\pi-A)$$
$$=\cos(\pi-B)\cos(\pi-C)+\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)\cos(\pi-\alpha),$$

即 $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha.$

同理可证另外两个等式.

二、欧拉定理

任意一个多面体,例如正六面体,假定它的面是用橡胶薄膜做成的. 如果充以气体,那么它就会连续(不破裂)变形,最后可变为一个球面.

像这样,表面连续变形,可变为球面的多面体叫做简单多面体. 欧拉定理是说:

简单多面体的顶点数 V,棱数 E,面数 F,有下面的关系

$$V+F-E=2.$$

【证明】 设多面体的各面为 n_i 边形($i=1,2,\cdots,F$). 由于多面体的每一条棱都只属于两个面多边形,故有

$$n_1+n_2+\cdots+n_F=2E.$$

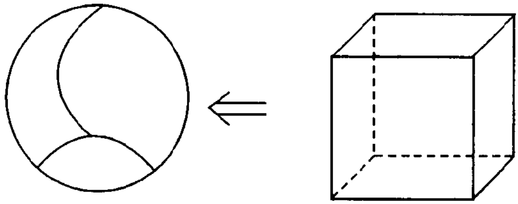

图 3-1-9

又由内角和公式知,多面体所有面角的总和为

$$\begin{aligned}&(n_1-2)\pi+(n_2-2)\pi+\cdots+(n_F-2)\pi\\=&(n_1+n_2+\cdots+n_F-2F)\pi\\=&(2E-2F)\pi=2(E-F)\pi.\end{aligned} \quad ①$$

另一方面,我们想象多面体表面是橡皮做的,可以把它压成平面图形,使其中一个为最大,其它各多边形都包围在它的内部.示意如下图.

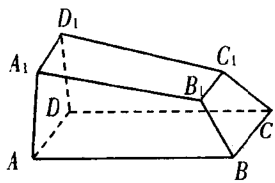

图 3-1-10

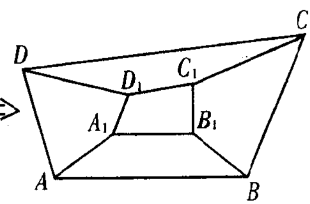

图 3-1-11

在这个变形中,顶点数,棱数都没有变化,每个多边形虽然形状变了但边数没有变化,假设最大的多边形边数为 n,那么被包围在它的内部的顶点数应为$(V-n)$个,可见被包围的多边形所有内角和为

$$(V-n)2\pi+(n-2)\pi.$$

再加上最大的多边形内角和$(n-2)\pi$，可得

$$(V-n)2\pi+(n-2)\pi+(n-2)\pi=2(V-2)\pi. \qquad ②$$

比较①，②得

$$2(E-F)\pi=2(V-2)\pi.$$

即
$$V+F-E=2.$$

由这个公式可以证明，正多面体恰有 5 种.

【例 1】 试证不存在 7 条棱的多面体.

【证明】 如果有 7 条棱的多面体，那么由欧拉公式可得

$$V+F-7=2,$$

即
$$V+F=9.$$

但多面体至少有 4 个面、4 个顶点，故只有

$$\begin{cases}V_1=4,\\F_1=5,\end{cases}\qquad\begin{cases}V_2=5,\\F_2=4.\end{cases}$$

这是不可能的，因而不存在 7 条棱的多面体.

【例 2】 如图 3－1－12，三面角 $S—ABC$ 中，SD 是面角$\angle ASB$ 的平分线，SE 是面角$\angle ASC$ 的平分线，SF 是面角$\angle BSC$ 的平分线，且 $SD\perp SE$，求证，$SF\perp SD$，$SF\perp SE$.

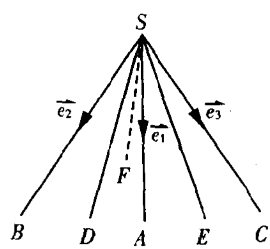

图 3－1－12

【证明】 取$\overrightarrow{SA}$，$\overrightarrow{SB}$，$\overrightarrow{SC}$上的单位向量$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$. 则$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_3}$，$\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$，分别在$\angle ASB$，$\angle ASC$，$\angle BSC$ 的平分线 SD，SE，SF 上，由 $SD\perp SE$，有

$$(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})\cdot(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_3})=0.$$

从而 $(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})\cdot(\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3})$

$=\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_2}^2+\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}$

$=\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_1}^2+\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}$

$=(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})\cdot(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_3})=0.$

得 $SD\perp SF$.

同理有 $SE\perp SF$.

习题 3-1

(一)选择题

1. 下列各组面角中,能够构成三面角的是(　　).

(A)$45°,65°,120°$　　(B)$75°,45°,90°$

(C)$82°,56°,26°$　　(D)$130°,120°,116°$

2. 在三面角 $S-ABC$ 中,$\angle ASC=\angle BSC=45°$,$\angle ASB=60°$,则二面角 $A-SC-B$ 的平面角为(　　).

(A)$45°$　(B)$60°$　(C)$90°$　(D)$120°$

3. 三个面角都是直角的三面角叫做直三面角.直三面角 $S-ABC$被任意平面所截,得截面$\triangle A_1B_1C_1$,若 S 在平面$A_1B_1C_1$上的投影为 O,则 O 是$\triangle A_1B_1C_1$ 的(　　).

(A)外心　(B)内心　(C)重心　(D)垂心

4. 如果三面角有一个直二面角,而直二面角所对的面角为 α,其余两个面角为 β,γ,则 $\cos\alpha=$(　　).

(A)$\cos\beta\cos\gamma$　(B)$\cos\beta\sin\gamma$　(C)$\sin\beta\cos\gamma$　(D)$\sin\beta\sin\gamma$

(二)填空题

1. 已知凸多面体的各面都是四边形,则 $V-F=$______.

2. 已知一个简单多面体的各个顶点都有 3 条棱,则 $2F-V$