数学小丛书

12

多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类

江泽涵

科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书 12

多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类

江 泽 涵

科 学 出 版 社
2002

内 容 简 介

本书第一章里凸多面形的欧拉定理(定理 1)的证明,只需要中学立体几何的知识.在第二章里,通过这定理和证明的分析讨论,以及橡皮薄膜作成的图形的变形,引进拓扑变换的直观描写,从而得到定理 1 的推广,闭多面形的欧拉定理(定理 2).在最后一章里,定理 3 和定理 4 圆满地解决由定理 1 所提出的一些问题,同时也给出闭曲面的拓扑分类.

图书在版编目(CIP)数据

多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类/江泽涵.—北京:科学出版社,2002

(数学小丛书)

ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.多…　Ⅱ.江…　Ⅲ.拓扑-普及读物　Ⅳ.O189-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010500 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002 年 5 月第一版	开本:787×960　1/32
2002 年 5 月第一次印刷	印张:2　插页:1
印数:1—5 000	字数:28 000

全套书定价: 99.00 元(共 18 册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》.在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣.书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长.当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才.当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展.我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

目　录

1　凸多面形的欧拉定理 ························ (1)

§1　定理的叙述和来源 ························ (1)

§2　定理1的证明 ······························ (7)

§3　一个推论和一个问题 ······················ (15)

2　闭多面形的欧拉定理 ························ (18)

§1　闭多面形 ································ (18)

§2　从球心投影到拓扑变换 ···················· (22)

§3　定理2的拓扑证明　网络 ·················· (27)

§4　一个应用:地图五色定理 ·················· (32)

3　闭多面形的一般定理和拓扑分类 ·············· (40)

§1　具有环柄的球面 ·························· (41)

§2　具有交叉帽的球面 ························ (43)

§3　闭多面形的一般定理和拓扑分类 ············ (50)

结束语 ·· (54)

习题 ·· (55)

1 凸多面形的欧拉定理

§1 定理的叙述和来源

1.1 什么是凸多面形

我们用中学立体几何教科书中的下面的这些定义.由若干个平面多边形所围成的封闭的立体称为**多面体**.这些多边形就称为多面体的**面**,这些多边形的边和顶点分别称为多面体的**棱和顶点**.多面体的表面称为**多面形**(在第 2 章以后,称为**初等多面形**);多面体的面、棱和顶点也称为这多面形的面、棱和顶点.当多面形在它的每一个面所决定的平面的同一侧,它就称为**凸多面形**.例如图 1 中的(a)到(d)都是凸多面形,图 1 中的(e)不是凸多面形.

如果 1 个凸多面形的所有的面都是全等的正多边形(等边和等角的平面多边形称为正多边形),并且所有的多面角都相等,这样的凸多

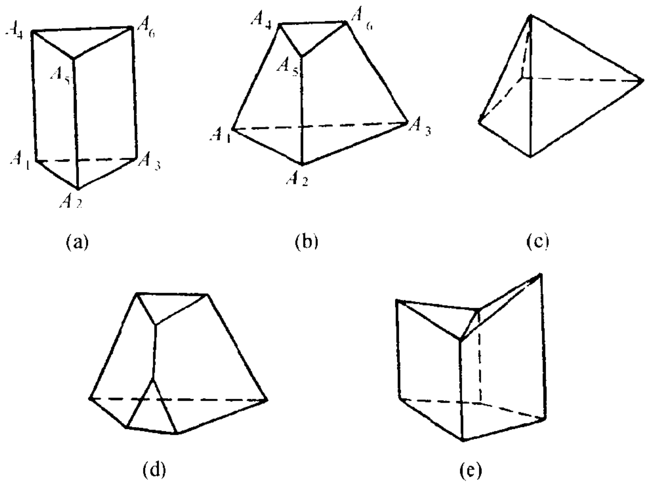


图 1

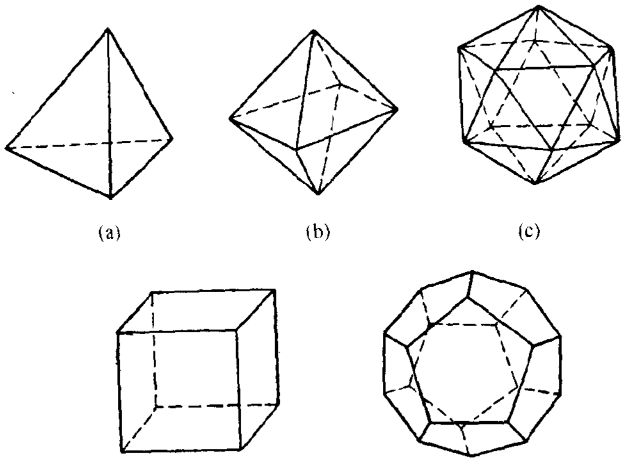
面形就称为**正多面形**. 中学立体几何教科书中所说的正多面体的表面,就是正多面形. 教科书中通常都有 5 种正多面体的图(如图 2),而且还说明了怎样用硬纸板制作这 5 种正多面形的模型. 我们现在只看正多面体的表面,所以把图 2 中的 5 个图形都看作是正多面形.

1.2 欧拉示性数的定义和记号

设用字母 P 表示一个多面形,并用 V、E 和 F 分别表示 P 的顶点的、棱的和面的个数. 然后

$$V - E + F$$

这个数是一个确定的整数,称为多面形 P 的**欧**



(a) (b) (c)

(d) (e)

图 2

拉（L. Euler，1707 ~ 1783）**示性数**，记作 $X(P)$，即

$$X(P) = V - E + F.$$

我们先来看图 1 中 5 个多面形的欧拉示性数 $X(P)$，并列于表 1.

表 1

多面形 P	V	E	F	$X(P)$
图 1(a)	6	9	5	$6-9+5=2$
图 1(b)	6	9	5	$6-9+5=2$
图 1(c)	5	8	5	$5-8+5=2$
图 1(d)	8	12	6	$8-12+6=2$
图 1(e)	8	13	7	$8-13+7=2$

再看图 2 中 5 个正多面形的欧拉示性数，并列于表 2.

表 2

正多面形 P	V	E	F	$X(P)$
图 2(a)：正四面形	4	6	4	$4-6+4=2$
图 2(d)：正六面形	8	12	6	$8-12+6=2$
图 2(b)：正八面形	6	12	8	$6-12+8=2$
图 2(e)：正十二面形	20	30	12	$20-30+12=2$
图 2(c)：正二十面形	12	30	20	$12-30+20=2$

从上面两个表中的最右一栏可以看出这些多面形的欧拉示性数都是 2. 这些多面形中除掉图 1(e)是非凸的以外，其它的都是凸多面形. 我们很容易产生这样的问题：是不是所有的凸多面形的欧拉示性数都是 2 呢？下面是这个问题的解答.

1.3 定理 1(凸多面形的欧拉定理)

任意一个凸多面形 P 的欧拉示性数都是 2：

$$X(P) = V - E + F = 2.$$

在证明这个定理以前，我们先来分析一下它的结论. 这结论只是关于凸多面形的顶点个数 V、棱的条数 E 和面的个数 F 这样的 3 个整

数的一种组合，即 $X(P)=V-E+F$，而不是其它的组合，例如不是 $V+E+F$ 等. 这结论的内容并不涉及凸多面形 P 的棱的长度、面的面积的大小以及面上的内角的大小；也就是说这结论的内容并不涉及凸多面形 P 的**度量**性质. 这是定理 1 的特点，与中学里所见到的一般的几何定理不一样.

在证明这定理以前，我们还要先谈一谈欧拉是怎样发现这个定理的.

1.4 定理 1 的来源

我们可以设想欧拉发现这定理的过程大约是下面这样的. 我们知道平面多边形的初步分类是用边的条数来分的，例如 3 条边的是三边形，4 条边的是四边形，…，n 条边的是 n 边形. 它们的记号是用顶点的排列表示出来的，例如三边形用它的 3 个顶点排列 $A_1A_2A_3$ 来表示，它是以 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1 为它的 3 个边. n 边形的记法为 $A_1A_2\cdots A_n$，以 A_1A_2，A_2A_3，…，A_nA_1 为边. 很自然地会想到凸多面形或者可以用它的面的个数 F 来分类，而且把图 1(a)这个多面形记作

$$A_1A_2A_3, A_4A_5A_6, A_1A_2A_5A_4,$$

$$A_2A_3A_6A_5, A_3A_1A_4A_6.$$

图 1(a)与图 1(b)这两个多面形的面数 F 同为 5,它们的记法也相同,因而会想到把它们归成一类而把它们称为**同构**(即结构相同)的多面形.图 1(c)的面数 F 虽然也是5,它的记法却与前两个凸五面形不同,因为它的 5 个面中有 4 个三边形而只有 1 个四边形,前两个凸五面形的 5 个面却同是 2 个三边形和 3 个四边形.所以图 1(c)不能和前两个凸五面形归为一类.这说明了仅用面数 F 来作为凸多面形分类的依据是不够的.

既然要把凸多面形分类时,只看它们的面数 F 是不够的,那么就会想到在看它们的面数 F 的同时再看顶点数 V;行不行呢? 这样倒是把图 1(c)与图 1(a)区别出来了;图 1(c)有 5 个面和 5 个顶点,而图 1(a)或图 1(b)有 5 个面和 6 个顶点.它们的面数 F 虽然同是 5,而它们的顶点数 V 却不一样.这好像说明了同时看凸多面形的面数 F 和顶点数 V,就可以区别出它们的结构,可以作为分类的依据似的.但只要再看下去,就知道这还是不够的.图 1(d)和图 2(d)这两个凸六面形有相同的面数 F,有相同的顶点数 $V=8$.但是图 1(d)的 6 个面中有两个三边形,两个四边形和两个五边形;可是图 2(d)的六个面都是四边形.它们的结构显然大不相同;它们不同类,虽然它们的面数 F 和顶点数

V 都相同.

凸多面形的面数 F 和顶点数 V 既然不够作为分类的依据,那么同时再加看棱的条数,是不是就行呢? 还是不行,因为结构不同的图1(d)和图2(d)不但有相同的面数 $F=6$,相同的顶点数 $V=8$,还有相同的棱的条数 $E=12$. 再试作各种面数 F 相等和顶点数 V 相等,但结构不同的凸多面形,结果必然是它们的棱数 E 也相等;而且更进一步,发现下面的事实:不论结构怎么样不同的两个凸多面形,尽管它们的面数 F 与顶点数 V 都不一样,只要当它们的面数 F 与顶点数 V 相加的和数 $V+F$ 相等时,它们的棱的条数 E 也必然相等,并且总满足关系式:$E=V+F-2$,也就是 $V-E+F=2$. 凸多面形分类的这样的讨论,就引导我们发现定理1.

§2 定理1的证明

凸多面形的欧拉定理有种种不同的证法.我们现在要给出的证明是勒让德(A. M. Legendre,1752~1833)的证明.这需要球面几何学中的一个简单事实.先来证明这个事实,作为证明定理的准备工作.

2.1 球面多边形内角和公式

设平面 n 边形的 n 个内角是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$(n \geqslant 3)$. 这 n 个内角的和 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 可以简写成 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$，即

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i + \cdots + \alpha_n,$$

其中 α_i 表示第 i 个角的弧度，$i = 1, 2, \cdots, n$，记号"$\sum$"表示和的意思，读作"西格码". $\sum_{i=1}^{n}$ 表示下标是 1 的项加到下标是 n 的项的总和. 中学平面几何教科书中都已经证明过：平面 n 边形的 n 个内角和是 $(n-2)\pi$，即

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi, \text{平面 } n (\geqslant 3) \text{ 边形}.$$

球面几何里也讨论球面上的 $n(\geqslant 2)$ 边形的内角和. 如果球的半径长度是 1，并且球面 n 边形的 n 个内角的弧度值也分别用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 表示，则球面 n 边形的诸内角和是：

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi + W, \text{球面 } n (\geqslant 2) \text{边形}, \quad (1)$$

式中的 α_i 表示第 i 个内角的弧度值，W 表示这球面 n 边形的面积. 关于这个公式(1)，还必须加以说明如下. 首先，球面多边形的边，必须是大圆(即以球心为圆心的圆)的圆弧. 其次，任意两个不同的大圆有两个交点，是球面上的一对

对径点,即球的同一条直径的两个端点,如图 3(a)中的点 A 和 A'. 最后,任意两个不同的大圆弧把球面分成四部分;其中的任一部分称为一个**月形**,它是一个球面 2 边形(平面上没有 2 边形). 图 3(a)中有阴影的部分是 1 个月形,也就是 1 个球面二边形,α 和 α' 是它的两个内角. 图 3(c)中有阴影的部分是 1 个球面三角形,α,β 和 γ 是它的 3 个内角. 此外,还要说明一下球面多边形内角的量法. 设要测量球面多边形的一个顶点 A 处的内角 α,如图 3(b). 夹这个角 α 的两个边必是大圆弧. 在顶点 A 处分别作这两个大圆的切线(射线即半直线)AB_1 和 AC_1. 平面角 $\angle B_1AC_1$ 的弧度就是角 α 的弧度.

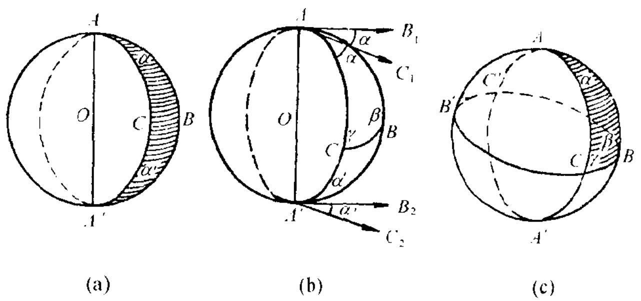


图 3

2.2 公式(1)的证明

在 $n=2$ 时,如图 3(a)中由两个大圆弧 ABA' 和 ACA' 所包围的球面上的部分,就是 1

个球面二边形，简记为 $ABA'CA$. 在 A 与 A' 处分别作同 1 个大圆 ABA' 的切线 AB_1 与 $A'B_2$，参看图 3(b)，因为都是与直径 AA' 垂直的线段，故这两切线平行，即 $AB_1 /\!/ A'B_2$. 同理，在 A 与 A' 处分别作同一个大圆 ACA' 的两切线 AC_1 与 $A'C_2$ 也平行，即 $AC_1 /\!/ A'C_2$. 从而两个平面角 $\angle B_1AC_1$ 与 $\angle B_2A'C_2$ 相等，也就是 $\alpha = \alpha'$，即 $\sum\limits_{i=1}^{2} \alpha_i = 2\alpha$. 这是公式(1)的左端，在 $n = 2$ 时的值. 公式(1)右端的第一项，在 $n = 2$ 时为零. 再计算公式(1)右端第 2 项 W 的值. 在这里，W 是月形的面积. 已知单位半径的球面积是 4π. 由于把半圆弧 ABA' 绕直径旋转一个周角 2π 时得球面，而旋转一个 α 角时得内角为 α 的月形，所以球面积与月形面积的比值，等于 $2\pi : \alpha$. 所以内角为 α 的月形面积 $W = 2\alpha$. 公式(1)的左右端相等，这证明了在 $n = 2$ 时公式(1)成立.

在 $n = 3$ 时，如图 3(c)中由三个大圆弧 AB(不是 $AA'B$，下同)、BC 和 CA 所包围的球面上的部分，就是 1 个球面三边形，它的 3 个内角是 α，β 和 γ. 所以公式(1)的左端：

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \alpha + \beta + \gamma.$$

下面我们来计算公式(1)的右端. 右端的第一项

是$(3-2)\pi=\pi$. 右端的第二项，球面三边形的面积等于什么呢？为方便起见，用记号$\triangle ABC$表示这个球面三边形的面积. 同理，由3个大圆弧，$A'B$，BC和CA'为边的球面三边形的面积用记号$\triangle A'BC$表示. 从图3(c)可以看出

$\triangle ABC+\triangle A'BC=2\alpha$

(因为左端就是月形$ABA'CA$的面积)，

$\triangle ABC+\triangle B'AC=2\beta$

(因为左端就是月形$BAB'CB$的面积)，

$\triangle ABC+\triangle C'AB=2\gamma$

(因为左端就是月形$CBC'AC$的面积)；

因为$\triangle C'AB$和$\triangle CA'B'$对于球心对称，所以

$$\triangle C'AB = \triangle CA'B',$$

因而第3式可以改写为

$$\triangle ABC + \triangle CA'B' = 2\gamma.$$

把上面的第一式、第二式和改写后的第三式相加，得

$$\begin{aligned}2(\triangle ABC)+(&\triangle ABC+\triangle A'BC\\&+\triangle B'AC+\triangle CA'B')\\&=2(\alpha+\beta+\gamma).\end{aligned}$$

但是这和式左端的第二个括号中的4个面积，应等于2π. 所以上式化简为