

湖北教育出版社

孔国平 著

测圆海镜

导读



矣其爲術也廣大精微無所不包大之而隨維
數小之而米鹽凌雜凡它術所能禦者立天元
能禦之它術所不能禦者立天元獨能禦之自
天文像若元郭太史守敬所造援時術中法號
大弧度以三乘方取矢亦用立元
天術載在授時術草者可覆而按則其爲用亦
矣哉以元論之又非獨如是已也今歐羅巴本
均輪橢圓地動諸法
之書目下則論則合



中华传统数学名著导读丛书

测圆海镜导读

● 孔国平 著 白尚恕 审

● 湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

《测圆海镜》导读/孔国平著. —武汉:湖北教育出版社,1996
(中华传统数学名著导读丛书/李迪主编)

ISBN 7-5351-1972-7

I. 测… II. 孔… III. 古算经-中国-学习参考资料
IV. 0112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 04282 号

出版
:湖北教育出版社
发行

汉口解放大道新育村 33 号
邮编:430022 电话:5830435

经 销:新 华 书 店

印 刷:黄冈日报印刷厂印刷

(436100·黄冈市八一路 7 号)

开 本:850mm×1168mm 1/32

5 插页 9.25 印张

版 次:1996 年 12 月第 1 版

1997 年 1 月第 1 次印刷

字 数:224 千字

印数:1—1 000

ISBN 7—5351—1972—7/O·26

定价:20.00 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你及时调换。

前 言

中国的传统数学在宋元时期达到高峰。李冶是这一时期的重要数学家,《测圆海镜》则是他的代表作。

本书以弘扬中华文化为宗旨,一方面引导读者阅读和理解《测圆海镜》这部古典数学名著;另一方面为研究者提出新的课题。全书分为引论、本论及附录3部分。

引论中介绍了李冶的生平,《测圆海镜》的成书经过、主要内容及学术价值,考察了历代学者对该书的研究成果及其版本流传情况。最后根据笔者的心得,给出一些阅读方法和研究方向。

本论以《知不足斋丛书》中的《测圆海镜细草》为蓝本,是全书的主要部分。每卷依次为提要、原文、注释、译文。原文部分选择有代表性的文字,并进行了断句、标点和校订工作。原书中排小字者加方括号,繁体字改为简体字,异体字改为通用字。卷一录圆城图式、总率名号、今问正数,以及识别杂记的一部分。卷二至十二的所有题目及“法”照录,并选录57题(总数的 $1/3$)的“草”。为读者查阅方便,各题都加了题号。后人按语择要而录,误者不取。其中,“锐按”为李锐按语,只标“按”字者为《四库全书》馆馆员的按语。原文有误者,除脱漏较多、须另加说明外,均在原文中改正,以便阅读,并在注释中说明校改依据。李锐的校改为本书所取者一般不注,因原书已反映出来。译文重在阐明算法、算理,不逐词翻译,重要的以及费解的命题给出理由或证明要点。原书中的“法”是一般算法,而“草”是具体演算,所以译文中的“算法”以字母表示而“算草”中使用阿拉伯数码,这样做似有利于读者了解李冶的数学思想。

《测圆海镜》各题都以圆径为所求,但某些题的结果却不是圆径。李冶这样做的目的是给读者留下思考余地。为了排除阅读障碍,笔者提示了求直径的方法。对那些理解能力较强的读者,可以不看这部分内容而独立求出圆径(方法往往不只一种)。

文献是本书的重要组成部分,目的在于提供尽可能全面的资料,对于学数学史的学生,应该选读阅读指导文献,以加深对李冶数学思想的理解,加深对传统数学的认识。对有志于研究《测圆海镜》者,除了研读原著及上述文献外,还应涉猎研究文献,大体了解前人的研究工作,以便取得新成果。

作为附录的《高次方程的数值解法》,介绍了中国传统数学的这一重要成果。虽然李冶精通其法,但由于《测圆海镜》重在列方程,所以没有记载方程解法。这个附录不仅解决了原书各题“结果是如何求出”的疑问,也提供了一种行之有效的数学方法,体现出我国传统数学的生命力。

在撰写本书的过程中,参考了中外各家研究《测圆海镜》之著作。对于不同观点,采取择善而从和正面阐述的态度,不在书中进行评论。

由于笔者水平有限,不当之处在所难免,欢迎读者尤其是数学史同仁们批评、指正。

孔国平

1994年12月15日

这部书稿于1994年底交给白尚恕教授时,他已身患癌症,住院治疗。先生抱病审阅全书,并特地在星期天返回家中,与笔者面谈,提出中肯的修改意见。先生的精神感人至深。不料先生于今年3月16日溘然长逝,令人潸然泪下。兹以此书献给我敬爱的恩师——白尚恕教授!

孔国平

1995年11月21日

目 录

引论

一、李冶生平	3
二、《测圆海镜》成书经过	6
三、《测圆海镜》内容分析	8
四、《测圆海镜》的学术价值	19
五、《测圆海镜》的不足之处	23
六、后人对《测圆海镜》的研究	24
七、《测圆海镜》版本考	33
八、如何阅读及研究《测圆海镜》	41

本论

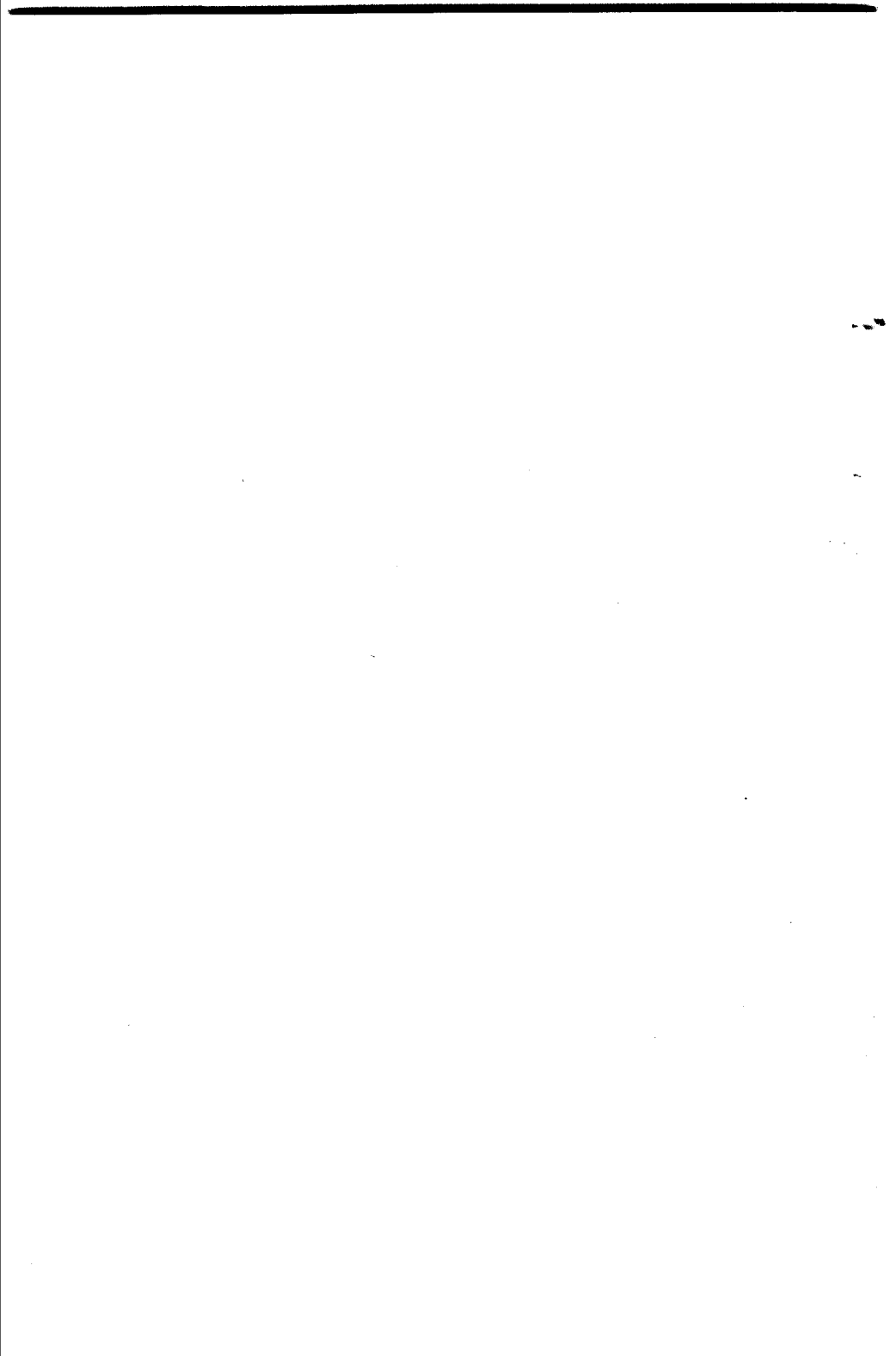
重刻测圆海镜细草序	49
测圆海镜序	51
第一卷 圆城图式 总率名号 今问正数 识别杂记	54
第二卷 正率一十四问	70
第三卷 边股一十七问	81
第四卷 底勾一十七问	100
第五卷 大股一十八问	119
第六卷 大勾一十八问	140
第七卷 明虫前一十八问	156
第八卷 明虫后一十六问	185
第九卷上 大斜四问	203
第九卷下 大和八问	209
第十卷 三事和八问	217
第十一卷 杂糅一十八问	226

第十二卷 之分一十四问	249
敬斋先生《测圆海镜》后序	264
跋	265

附录

文献	269
高次方程的数值解法	276

——引 论



一、李治生平

李治是金元之际的著名数学家，字仁卿，号敬斋，真定府栾城（今河北栾城）人。金明昌三年（1192）生于大兴（今北京）；元至元十六年（1279）卒于河北元氏。

李治的父亲李通(yú)是位博学多才的学者，曾在大兴府尹胡沙虎手下任推官^①，母亲姓王。李治有两个同父异母的弟兄，兄名澈，刘氏所生；弟名滋，崔氏所生；还有两个同胞姐妹。李治原名治，后改为治。改名的原因，大概是为了避免与唐高宗同名。^②

李治出生的时候，金朝正由盛而衰。章宗即位（1190）后，官僚政治日趋腐败。由于管理不善，酿成了连年水灾。再加上对外战争及任意挥霍，金朝出现了财政危机，于是滥发纸币，致使物价飞涨，国虚民穷。泰和八年（1208），金章宗病死，卫绍王允济即皇帝位。这时蒙古军队加紧向金朝进攻，腐朽的金朝内已潜伏着亡国的危机。李通的上司胡沙虎是一个深得朝廷宠信的奸臣，“声势炎炎，人莫敢仰视”，动辄打骂同僚，欺压百姓，甚至“虐杀不辜”。李通见他无恶不作，常常据理力争，置个人生死祸福于度外。为了防备不测，李通把老小送回故乡栾城。这时李治正是少年，他没有随家人回乡，而独自到栾城的邻县元氏求学去了。至宁元年（1213），由于胡沙虎

① 推官为幕僚，其职责与现在参谋类似。

② 参见缪钺《李治·李治释疑》，载《数学通报》1956年第10期。

篡权乱政,李迥被迫辞职,隐居阳翟(今河南禹县),从此不再过问政事。时常吟诗作画。在当地颇有名声。

父亲的正直为人及好学精神对李冶深有影响。在李冶看来,学问比财富更可贵。他说:“积财千万,不如薄技在身。”又说:“金璧虽重宝,费用难贮蓄。学问藏之身,身在即有余。”^[95]他在青少年时期,对文学、史学、数学、经学都感兴趣,曾与好友元好问外出求学,拜文学家赵秉文、杨云翼为师,受益匪浅。正大七年(1230),李冶在洛阳考中词赋科进士。时人称赞他“经为通儒,文为名家”。同年得钧州(今河南禹县)知事官职。李冶为官清廉,一丝不苟。开兴元年(1232)正月,蒙古军队攻破钧州。李冶不愿投降,只好北渡黄河避难,走上了漫长而艰苦的流亡之路。这是他一生的重要转折点,将近50年的学术生涯便由此开始了。

李冶北渡后流落于山西的忻县,崞县之间,过着“饥寒不能自存”的生活。1234年初,金朝为蒙古所灭。李冶感到政事已无可为,于是潜心学问。他经过一段时间的颠沛流离之后,定居于崞县的桐川。这时,他已年过40了。金朝的灭亡使他不再为官,他虽然生活清苦,却有充分的时间进行学术研究。他的研究工作涉及数学、文学、历史、天文、哲学、医学。与李冶同时代的砚坚说他“世间书凡所经见,靡不洞究,至于薄物细故,亦不遗焉。”^[94]《元史新编》中也说他“凡天文象数,名物之学,无不研精。”李冶不仅博览群书,而且善于去粗取精,批判地接受前人知识。他说“学有三,积之之多不若取之之精,取之之精不若得之之深。”^[96]他在实践中逐渐认识到:“数术虽居六艺^①之末,而施之人事,则最为切务。”^[94]于是把主要精力用于数学。

1248年,李冶写成代数名著——《测圆海镜》12卷,这是他一生的最大成就。后来到太原住了一段时期,藩府官员曾请他出仕,

① 六艺即礼、乐、射、御、书、数,是周代学校的教育内容。

但他谢绝了。又流落到平定，平定侯聂珪很尊重他，把他接到自己的帅府来住。但他却深深怀念着少年求学时的元氏。1251年，李治的经济情况已经好转，他终于结束了在山西的避难生活，回元氏定居，并开始收徒讲学。

不久以后，李治带领学生在北宋李昉读书堂故基上建起封龙书院。李治在书院不仅讲数学，也讲文学和其他知识。他呕心沥血，培养出大批人才，工作之余常与元好问、张德辉一起游封龙山，被称为“龙山三老”。1257年，李治在开平（今内蒙正蓝旗）接受忽必烈召见，提出一些开明的政治建议，并强调说：“为治之道，不过立法度、正纪纲而已。纪纲者，上下相维持；法度者，赏罚示惩劝。”^[99]

李治见忽必烈之后，回封龙山继续讲学著书，于1259年写成另一部数学著作——《益古演段》。1261年，忽必烈聘李治至京（即开平），许以翰林学士知制诰同修国史官职。但李治却以老病为辞，婉言谢绝了。1265年，忽必烈再次请他出仕翰林院，他勉强就职一年，因感到翰林院里思想不自由，辞职还乡。他说：“翰林视草，唯天子命之；史馆秉笔，以宰相监之。特书佐之流，有司之事，非作者所敢自专而非非是是也。今者犹以翰林、史馆为高选，是工谄誉而善缘饰者为高选也，吾恐识者羞之。”^[96]

李治辞职后一直在封龙山下讲学著书。他在晚年完成的《敬斋古今藁(tǒu)》与《泛说》是两部内容丰富的著作。《泛说》一书今已不存，据《元朝名臣事略》中的几段引文及书名来看，这是一本随感录，记录李治对各种事物的见解。《敬斋古今藁》则是一本读书笔记，“上下千古，博极群书”，在文史方面颇有独到见解。另外，李治作过不少诗词，有5首诗保存在《元诗选癸集》中；5首词保存在《全金元词》中；还著有《文集》、《壁书丛削》等，已佚。

李治一生著作虽多，但他最得意的还是《测圆海镜》。他在弥留之际对儿子克修说：“吾平生著述，死后可尽燔去。独《测圆海镜》一

书,虽九九小数,吾常精思致力焉,后世必有知者。庶可布广垂永乎?”(《测圆海镜后序》)

二、《测圆海镜》成书经过

《测圆海镜》是我国现存最早的一部以天元术为主要内容的著作。天元术是一种用数学符号列方程的方法,“立天元一”是其重要标志。“立天元一为某某”与今“设 x 为某某”是一致的。在中国,列方程的思想可追溯到汉代的《九章算术》,该书中用文字叙述的方法建立了二次方程,但没有明确的未知数概念。唐王孝通已经能列出三次方程,但仍是用文字叙述的,且未掌握列方程的一般方法,所以列方程需要高度技巧。经过北宋贾宪、刘益等人的工作,求高次方程正根的问题基本解决了。随着数学问题的日益复杂,迫切需要一种普遍的建立方程的方法,天元术便在北宋应运而生。虽然我们很难判断谁是第一个用“天元一”来表示未知数的,但从《测圆海镜》分析,11世纪的洞渊^①无疑是天元术的先驱之一,因为该书有两道题(卷十一第17、18题)引用了洞渊细草,而草中已有“立天元一”的步骤。但在李冶之前,天元术还是比较幼稚的,记号混乱、复杂,演算繁琐。例如李冶在山东东平得到的一本讲天元术的算书,还不懂得用统一符号来表示未知数的不同次幂,它“以十九字识其上下层,曰仙、明、霄、汉、垒、层、高、上、天、人、地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼。”^[95]即以人字表示常数,人以上9字表示未知数的正数次幂(最高为9次),人以下9字表示未知数的负数次幂,其运算之繁可见一斑。从稍早于《测圆海镜》的《铃经》等算书来看,天元术的作用还十分有限。在解决几何问题时,数学家们的思维方法也基本上是几何的,只是在用几何方法无法计算时,才偶尔用一下代

① 据李迪考证,洞渊为北宋处州(今浙江丽水)的洞渊大师李思聪。[56]

数方法——天元术。李冶决心在前人基础上，创造一种简便而用途广泛的天元术。当时，北方出了不少算书。除《铃经》外，还有《照胆》、《如积释锁》、《复轨》等，这无疑为李冶的数学研究提供了条件。特别值得提到的是，他在桐川得到了洞渊的一部算书，内有九容之说，专讲勾股容圆（即切圆）问题，此书对他启发甚大。他在《测圆海镜》序中提到，他过去学算，曾有不少疑难，但得洞渊九容之说后，“日夕玩绎”，于是“向之病我者，使爆然落去而无遗余。”他把勾股容圆问题作为一个系统，研究了在各种条件下用天元术求圆径的问题，并著书立说。

李冶在桐川生活时，条件是十分艰苦的。不仅居室狭小，而且常常不得温饱，要为衣食而奔波。但他却以著书为乐，从不间断自己的工作。据《真定府志》记载，李冶“聚书环堵^①，人所不堪”，但却“处之裕如也”。他的学生焦养直说他“虽饥寒不能自存，亦不恤也”，在“流离顿挫”中“亦未尝一日废其业”。^[96]

有时候，为了筹集一点科研和生活费用，李冶不得不求助于人。李冶这样做，是很不自愿的。他在读了“纳纸投名愧已深，更教门外久沉吟”两句诗以后，曾感慨地说：“投竭固可耻，然士当穷困，摇尾乞怜于人，亦可悯也。”不过，一些开明的官吏和名儒还是很赏识他的学问，如聂珪、张德辉、王颖等，都曾给予他不同程度的帮助。

经过多年的艰苦奋斗，《测圆海镜》终于在1248年完稿。它使天元术达到相当完善的程度，堪称世界上第一流的数学著作，但在当时的中国却没有引起重视。对这一点，李冶是早就料到的，他在《测圆海镜序》中说：“览吾之编，察吾苦心，其悯我者当百数，其笑我者当千数。”但他接着又说：“乃若吾之所得则自得焉耳，宁复为人悯笑计哉！”表现了他坚持真理、不屈不挠的精神。实际上，《测圆

① 堵，墙壁度量单位，长、高各一丈为一堵。环堵即四面是长、高各一丈的墙。

《海镜》一书直到 1282 年才得以出版,这时李冶已去世 3 年了。

三、《测圆海镜》内容分析

1. 天元式与天元术

“天元”一词,在秦九韶《数书九章》里已使用过,但没有未知数的意思,天元一便是单位一。而在李冶的《测圆海镜》中,天元一相当于现在的未知数 x 。书中的方程是用天元式表示的,所用数码则是古代算筹^① 形象的反映。摆筹的方式有竖式、横式两种:

竖式 | || ||| |||| ||||| 丁 卅 卅卅 卅卅卅
横式 一 二 三 三 三 上 上 上 上

分别表示 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 使用时按“一纵十横,百立千僵”^② 的规则,从个位起一竖一横地排列,可以表示任何正整数。后来,这种算筹记数的形式演变为数码,用于书写。

天元式实际起源于筹算开方式。两者形式类似,只是开方式未标明未知数,如下图。这个开方式的意义是

$$100x^2 + 4000x = 15225$$

如前所述,天元式的表示法最初很繁。到李冶时代,天元式已经简化了,有古法图式和今法图式(如下页上图)两种,都把太放在中间,表常数项。按古法图式,天元在上,地元在下,以天元代表未知数的正一次幂,天上一层则高一次;以地

实		≡		=	
法		≡	○	○	○
借算				○	○

开方式

① 算筹是中国古代用于计算的小竹、木棍(也有金属或骨质的)。在珠算产生之前,它是中国主要的计算工具,在春秋战国时代已普遍使用了。

② 《夏侯阳算经》称:“一纵十横,百立千僵。千十相望,万百相当。满六以上,五在上方。六不积算,五不单张。”

元代表未知数的负一次幂，地下一层则低一次。今法图式的顺序与之相反。这种用两个字表示正、负数次幂的方法，显然比各次幂都用不同字表示的方法简便。

在《测圆海镜》中，李冶进一步简化了天元式，他取消地元，只用一个天元，采用正数次幂在上、负数次幂在下的次数由高到低的排列顺序，而且式中只写“元”或“太”一个字。例如，方程

$$-x^2 + 320x - 132800$$

$$+ 13056000x^{-1} = 0$$

便写为下图的形式。也可不在常数项旁标“太”，而在一次项旁标“元”。在这里，太是太极的简称，元是天元的简称。天元式中的各层即方程的各项系数，负系数则加一斜线。

a_n	
•	
•	天
•	
a_1	太
c	地
b_1	
•	
•	
b_n	

古法图式

b_n	
•	
•	地
•	
b_1	太
c	天
a_1	
•	
•	
a_n	

今法图式

天元式

李冶的天元式，既可表示方程，又可表示多项式。从形式看，两者并无区别。但具体到算题中，两者是不会混淆的，因为列方程有固定程序，在“相消”前出现的是多项式，相消时便把两个多项式联在一起，成为方程了。

《测圆海镜》中的列方程程序分为三步：首先立天元一，这相当于设未知数 x ；然后寻找两个等值的而且至

					⋈
			≡	=	○
		≡		≡	○ ○ 太
	≡	○		⊥	○ ○ ○

李冶的天元式

少有一个含天元的多项式(或分式)；最后把两个多项式(或分式)联为方程；通过相消，化成标准形式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

这便是李冶的天元术。所谓相消,相当于现在的移项及合并同类项。只是当时没有等号,所以没有移项的步骤,而是直接消去两个等值多项式中的同类项。

在推导方程的过程中,必然要进行多项式的四则运算。《测圆海镜》中的运算方法与现在类似,不同的是那时不用阿拉伯数码。书中的多项式加、减,是同次幂系数的加、减;常数乘多项式是用常数乘多项式的各项系数;天元或天元幂乘多项式是将元字(或太字)移下一层或数层;天元或天元幂除多项式是将元字(或太字)移上一层或数层;多项式乘多项式是用一个多项式的各项分别乘另一个多项式的各项,然后合并同类项;多项式除多项式是不能进行的,李冶称之为“不受除”。若在建立方程的过程中遇到这种情况,他便采用去分母的办法,具体步骤在《〈测圆海镜〉的学术价值》中介绍。

2. 各卷内容简介

《测圆海镜》共 12 卷,卷一为理论基础,以下各卷均为算题。

卷一之首为圆城图式(如下页左图)。该图以一个直角三角形及其内切圆为基础,通过若干互相平行或垂直的直线,构成 16 个直角三角形。全书 170 题都是已知某些三角形边长,求圆径。为讨论问题方便,图 4 乙中用英文字母及阿拉伯数码表示。

圆城图式之后是“总率名号”和“今问正数”。总率名号给出图中各勾股形的名称:天地乾为通(或大)勾股形^①,天川西为边勾股形,日地北为底勾股形,天山金为黄广勾股形,月地泉为黄长勾股形,天日旦为上高勾股形,日山朱为下高勾股形,月川青为上平勾股形,川地夕为下平勾股形,天月坤为大差勾股形,山地艮为小差勾股形,日川心为皇极勾股形,月山泛为太虚勾股形,日月南为明

① 勾股形即直角三角形。