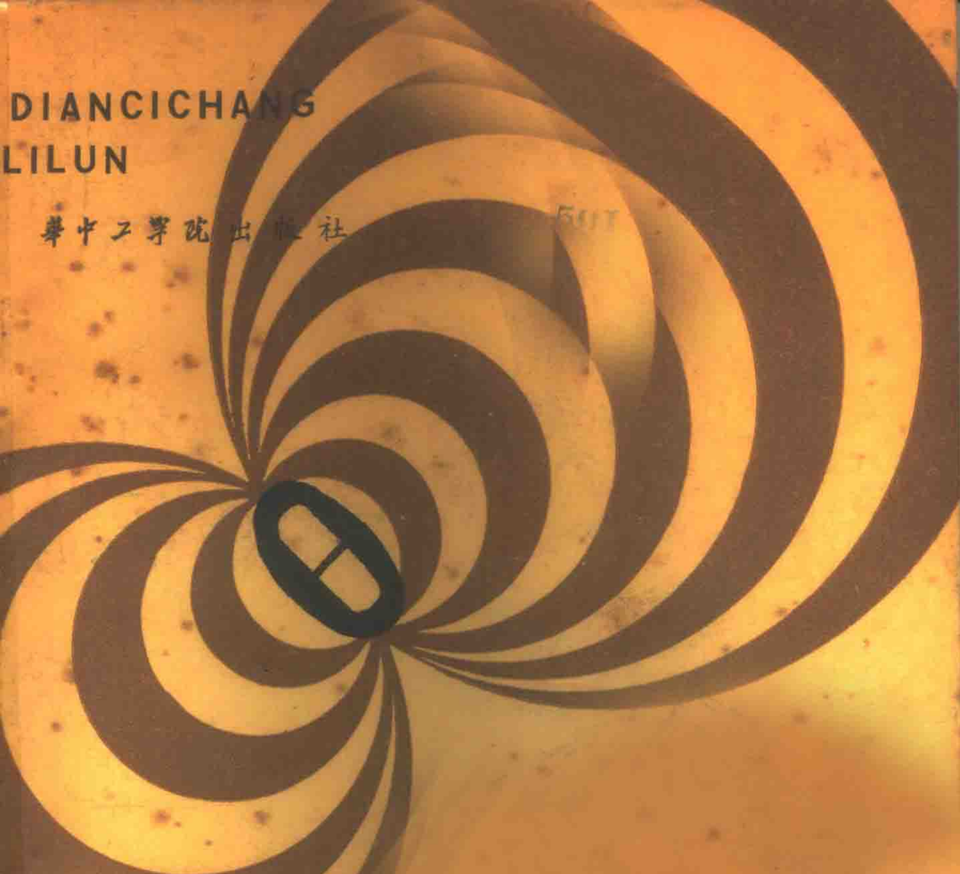
DIANCICHANG
LILUN

华中工学院出版社



王为民 主编

电磁场理论

电 磁 场 理 论

王为民　主编

华中工学院出版社

内 容 简 介

电磁场理论是在物理电磁学的实验定律的基础上，深入研究电磁场的性质和规律，以便从理论上解决电磁场的正演问题和反演问题的基本理论。

全书共四章，分别阐述静电场、恒定电流场、恒定磁场及交变电磁场的基本理论。书中编有各类例题和习题，书末附有矢量分析的重要公式。

本教材可作为高等院校应用地球物理专业及电力、电子类专业电磁场理论课程的试用教材，也可供有关工程技术人员参考。

电磁场理论

王为民　主编

责任编辑　姜新祺

•

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所发行

华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

•

开本：787×1092　1/32　印张：9.625　字数：213,000

1986年10月第1版　1986年10月第1次印刷

印数：1—5,000

统一书号：15255—081　定价：1.60 元

序　言

电磁场理论是应用地球物理专业、电力类专业及电子类专业的一门重要基础理论课。它的任务是在物理电磁学的基础上，深入研究电磁场的规律和求解方法，从理论上解决电磁场的正演和反演问题。

本书是为高等院校应用地球物理专业、电力类专业及电子类专业编写的教学用书，它也可供有关科技人员参考。编者希望读者在学完本书后能掌握电磁场的基本理论和典型求解方法，为学习后续课程或进一步深入学习电磁场理论打下必要而充实的基础。

全书采用国际单位制。为了帮助读者掌握主要内容，提高分析问题和解决问题的能力，书中编有各类例题和习题。书末附有矢量分析的重要公式，以便查阅。

本书由王为民主编，前三章由王为民编写，第四章由戚长鹦编写，李春祥、于光生两同志也参加了编写工作。

本书初稿于一九八三年十一月经全国工科物理教材编审委员会评审，并推荐作为试用教材出版。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不当之处，欢迎广大读者批评指正。

编者

1985年8月于长春地质学院

目　录

第一章　静电场

相对于观察者为静止的电荷所产生的电场是静电场。静止电荷与它的静电场是紧密联系、不可分割的。本章在实验定律的基础上，系统而深入地研究静电场的性质、方程和典型求解方法，从而可由已知电荷分布求电场分布（称正演问题），或从已知电场分布求电荷分布（称反演问题）。

本章可分为四部分内容：在库仑定律的基础上研究真空中静电场的基本方程和电势的微分方程；研究电介质中静电场的基本方程和不同介质分界面上的边界条件；系统研究静电场的求解方法；研究引力场与静电场的相似性。

静电场的研究有助于对其它场的研究和理解，因此本章是整个电磁场理论的重要部分。

§1.1　真空中静电场的基本方程

本节在库仑定律基础上研究静电场的通量规律和环流规律，并利用矢量分析理论导出真空中静电场的基本方程。

一、库仑定律与电场强度

库仑定律是实验结果的概括。它指出：$Q(\xi,\eta,\zeta)$处的点电荷q对$P(x,y,z)$处的点电荷q_0的作用力为

$$\boldsymbol{F}=K\frac{q_0q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

式中$\boldsymbol{r}$是Q到P的矢径。本书以$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$代表直角坐标系中的单位矢量，则

$$\boldsymbol{r}=(x-\xi)\boldsymbol{e}_x+(y-\eta)\boldsymbol{e}_y+(z-\zeta)\boldsymbol{e}_z$$

常数K与各量的单位有关，在国际单位制中，r、F与q的单位分别为米、牛顿与库仑，在真空中，$K=1/4\pi\varepsilon_0=9\times10^9$米/法，$\varepsilon_0$称为真空的介电常数，其值为

$$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\text{法/米}$$

因此，在真空中的库仑定律的矢量形式可表为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0q}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1.1}$$

库仑定律给出了两点电荷之间作用力的数值与方向，但并未说明作用力的物理本质。历史上，对库仑定律所反映的两点电荷之间作用力的物理本质有两种不同的解释：一种观点认为电荷之间的作用力是直接的超距作用；另一种观点则认为电荷之间的作用力是通过场来传递的。虽然在静电情况下，由两种观点所得出的计算结果相同，但在电荷变化的情况下，由超距作用观点所得出的结论与实际不符，而由场的观点得出的结论才与实际相符。这即表明，两电荷间的相互作用力是通过场来实现的。场是一种特殊物质，我们把电荷周围空间存在的这种特殊物质称为电场。电场的一个重要特性是对场中的其它电荷产生力的作用，人们引入电场强度来描述电场的这一重要特性。

设在电场中某点放一带正电的试验电荷q_0，电场对它的作用力为$\boldsymbol{F}$，则电场强度(简称场强)定义为

$$\boldsymbol{E}=\lim_{q_0\to0}\frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \tag{1.1.2}$$

电场强度是一个矢量，它的方向为试验电荷所受到的电场作用

力的方向，它的大小相当于单位正电荷所受到的力的大小。在国际单位制中，场强的单位为伏/米(或牛顿/库仑)。一般情况下，$\boldsymbol{E}$是一个空间坐标的函数，在直角坐标系中

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z$$

根据库仑定律和场强的定义，得到点电荷q的场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1.3}$$

静电场的计算遵循迭加原理。根据迭加原理，点电荷系的场强为

$$\boldsymbol{E}=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1.4}$$

电荷体密度为$\rho(\xi,\eta,\zeta)$的分布电荷所产生的场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{r}}{r^3}dV \tag{1.1.5}$$

式中积分区域为电荷分布的区域。

一般若已知电荷分布，就可根据上式计算场强。但当空间有介质或导体时，由于介质和导体上的电荷分布是未知的，无法由积分法计算场强。因此，为了求出场强的分布，必须在库仑定律基础上研究静电场的性质，导出静电场的基本方程。

二、静电场的通量规律与散度规律

人们在研究流体力学的过程中，得到了一套研究矢量场的数学方法。一个矢量场的性质可用该矢量场的散度规律和旋度规律来确定。静电场是矢量场，研究它的散度和旋度规律，就可确定它的性质。下面先研究静电场的散度。

(一) 通量与散度的概念

通量和散度的概念最初是在研究流体中引入的。流体中各

点流速$\boldsymbol{v}$不同，构成了流速场。在流速场中，单位时间内通过某曲面的流量称为该曲面上的流速场通量。设流体密度等于1，则任一曲面元$d\boldsymbol{S}$上的通量为

$$d\Phi = \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

某一曲面S上的通量Φ是所有面元上的通量$d\Phi$之和，用定积分表示则为

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

闭合曲面S上的通量则为

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.1.6}$$

流速场的通量与它的"源头"有一定关系。如果我们在场域中任取一点P，并用一个很小的闭曲面S把它包围起来，即取P点的一个小邻域ΔV，那么流速场$\boldsymbol{v}$在S上的通量与ΔV比值的极限值$\lim\limits_{\Delta V\to 0}(\oint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S})/\Delta V$等于单位时间内从$P$点附近的单位体积中流出(流进)的流体质量。它是一个标量，称为流速场$\boldsymbol{v}$在P点的散度，用$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$表示，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1.1.7}$$

$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$的意义是明显的：如果$\mathrm{div}\boldsymbol{v}>0$，则它表示有流体从$P$点流出，因此$P$点必是流速场的源头；反之，如果$\mathrm{div}\boldsymbol{v}<0$，则它表示有流体进入$P$点，$P$点必是流速场的尾闾，或称负源头；如果$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$，则它表示既无流体从$P$点流出又无流体进入$P$点，流体只可能在$P$点经过，因此$P$点既非源头也非尾闾。由此可见，$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$的数值表明了流速场的源头及尾闾的分布。

散度的意义可推广到电磁场及其它矢量场中去，虽然这时散度不再具有流体质量的意义，但在确定该矢量场的源头分布

方面仍然起着同样的作用。总之，div$\boldsymbol{A}$表明矢量场$\boldsymbol{A}$的“源头特性”。

应当指出，散度的定义与坐标系的选择无关，因此，不论取何种坐标系计算，所得结果是相同的。在直角坐标系中，div$\boldsymbol{A}$的计算式为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.1.8}$$

由上式可见，散度是矢量场沿矢量分量方向的空间变化率。在其它坐标系中散度的计算式可查阅附录。

如果div$\boldsymbol{A}$在区域V内是可积函数，则由散度定义，可证明矢量分析中常用的散度定理为

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}dV=\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.1.9}$$

此定理表明：某矢量场的散度在空间V内的积分等于该矢量场在V域边界面S上的通量。将此定理用于物理问题，就可把任一空间域中的物理情况和该域边界上的物理情况联系起来。

（二）电场强度的通量规律

根据库仑定律和迭加原理可得出下述重要规律：通过处于真空静电场中的任意闭曲面S的电场强度的通量，等于曲面内电荷的代数和Σq_i与ε_0的比值，而与曲面外电荷无关。用公式表示即为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i \tag{1.1.10}$$

上述规律称为真空中静电场的高斯定理。它可证明如下：

设任意闭曲面S内有点电荷q，则S上的场强通量为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega$$

式中$d\Omega$是面元$d\boldsymbol{S}$对q所张的立体角。因任意闭曲面对面内任

意点所张立体角为4π，故得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

若点电荷 q 在闭曲面外，则闭曲面对面外任意点所张立体角为零，故面外电荷在闭曲面上所产生的场强通量为零。

当闭曲面S有i个点电荷时，根据迭加原理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_S \boldsymbol{E}_1\cdot d\boldsymbol{S}+\oint_S \boldsymbol{E}_2\cdot d\boldsymbol{S}+\cdots+\oint_S \boldsymbol{E}_i\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}(q_1+q_2+\cdots+q_i)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

如果体电荷密度函数为ρ的电荷分布在区域V内，则有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \qquad (1.1.11)$$

式中S是V的边界面，右端积分是V内的总电荷，与V外电荷无关。

综上所述，高斯定理的结论成立。

高斯定理是描述电场状态的一个重要的规律，应从以下几方面加深理解：

1）高斯定理是在库仑定律基础上得到的描述电场区域特性的规律。

2）对于具有高度对称性的电场，利用高斯定理，可以很方便地求出场强分布；但对于一般电场，这个规律只能确定任意闭曲面上的场强通量，而不能由它求出场强分布。

3）把高斯定理用于两种介质的分界面上，便可导出静电场的法线分量的边界条件（见§1.5）。

（三）静电场的散度规律

高斯定理表述了电场的区域特性，为了细致地反映各点场强的空间变化率与电荷体密度之间的关系，还必须研究电场在

各点的定域化特性，即必须研究电场的散度规律。

利用散度定理(1.1.9)式，将高斯定理(1.1.11)式的面积分变换为体积分，得

$$\int \mathrm{div}\boldsymbol{E}dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho dV$$

上述等式对任意大小和形状的体积均成立，因此，等式两端的被积函数必然处处相等，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad(1.1.12)$$

上式即是真空中静电场的散度规律。它指出：在真空的静电场中，任意点场强的散度与该点电荷体密度成正比，而与其它各点的电荷分布无关。

静电场的散度规律的物理意义是：若$\rho>0$，则$\mathrm{div}\boldsymbol{E}>0$，这表明电力线起源于正电荷；若$\rho<0$，则$\mathrm{div}\boldsymbol{E}<0$，这表明电力线终止于负电荷；若$\rho=0$，则$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0$，这表明电力线在无电荷处不会中断。

三、静电场的环流规律与旋度规律

要确定一个矢量场，除了应掌握它的散度规律外，还必须掌握它的旋度规律。

(一)环流和旋度的概念

我们先以流速场为例来说明。在流速场中，速度矢量$\boldsymbol{v}$沿任一条闭合曲线的线积分$\oint_l\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$称为流速场的环流。如果流速场中存在一条闭合的流线，我们取这条流线作为回路l，则$\oint_l\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}>0$；如果在流速场中不存在闭合流线，则任取一闭合回路$l$，必然有$\oint_l\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}\equiv0$。由此可见$\oint_l\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$的数值表明

流速场中的流线是否闭合的性质。这虽是由流速场得出的结论，但对于电磁场或其它矢量场，当采用力线来描述时，上述结论推广后显然也是适用的。

为了细致地描述矢量场在各点的定域化特性，还须在环流的基础上引入旋度的概念。设P为矢量场$\boldsymbol{A}$中的一点，通过P点作一小平面ΔS，它的边界构成小回路l，任意指定l的绕行方向，并按右手螺旋法则确定小平面ΔS的正法线的单位矢量$\boldsymbol{n}$。此时环流$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$不仅与所取平面$\Delta S$的位置及大小有关，且与$\boldsymbol{n}$的方向有关。在所有环流值中，有一最大值$\oint_l^{(m)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$，当环流值达到这个最大值时，$\boldsymbol{n}$为一确定方向，用$\boldsymbol{n}^{(m)}$表示。在流速场中，$\boldsymbol{n}^{(m)}$就是流体旋转的轴线。根据环流的上述特性，矢量场$\boldsymbol{A}$在$P$点的旋度定义为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}^{(m)}\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l^{(m)}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S} \qquad (1.1.13)$$

$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$表明矢量场$\boldsymbol{A}$的“涡旋特性”，它的方向为$\boldsymbol{n}^{(m)}$的方向，它的数值等于极限值

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l^{(m)}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

应当指出：旋度的定义和散度的定义一样，与坐标系的选择无关，因此不论取何种坐标系计算，所得结果是相同的。在直角坐标系中，旋度的计算式为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z \qquad (1.1.14)$$

由上式可知，旋度的每一分量是矢量场在垂直于矢量分量方向的空间变化率。在其它坐标系中的旋度计算式可查阅附录。

如果$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$在曲面$S$上是一可积函数，根据旋度定义，则可证明矢量分析中常用的斯托克斯定理，即

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{1.1.15}$$

此定理表明，矢量场在闭合回路l上的环流等于该场的旋度在以l为边界所作的任意曲面上的通量。将此定理用于物理问题，就可把在任一闭合回路上的物理情况和以该回路为边界的任一曲面上的物理情况联系起来。

（二） 静电场的环流规律

在静电场中，环流$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$具有明确的物理意义，它表示将单位正电荷沿闭合回路绕一周，静电场所作的功。在点电荷q的电场中

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_l \frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{l}}{r^3}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_l d\left(\frac{1}{r}\right)\equiv 0$$

因为任意静电场都可看作是由很多点电荷的静电场迭加的结果，所以上述结论对于任意静电场均正确，即在任意静电场中，场强沿任意闭合回路的环流恒等于零。

对静电场的这种环流规律，应从以下几个方面加深认识：

1）此规律是在库仑定律基础上得到的静电场沿任意闭合回路所表现出的特性。它是能量守恒定律在静电场中的必然结果，因为电荷在静电场中沿任意闭合回路绕一周回到原处时，一切都恢复原状，按能量守恒定律，电场作功必然为零。

2）从电力线方面看，此规律表明：在任意静电场中，决不会形成闭合形状的电力线。

3）将此规律用于两种介质的分界面上，便可导出静电场

的切线分量的边界条件(见§1.5)。

(三) 静电场的旋度

由斯托克斯定理得

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}\equiv 0$$

上式中,由于l是任意闭曲线,S是以 l 为边界的任意 曲 面,不管积分区域如何选择,上述积分恒等于零,因此被积函数必处处恒为零,即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\equiv 0 \tag{1.1.16}$$

由此可知静电场是无旋场。

四、结　　论

根据以上的分析,真空中静电场的性质和规律可概括为下面两个方程,即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0$$

这两个方程称为真空中静电场的基本方程组,其积分形式为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$$

真空中静电场的基本方程组是在库仑定律的基础 上 导 出的,它表明静电场是有散无旋场,它反映的物理图象是:电荷是静电场的源头或尾闾;电力线起于正电荷而止于负电荷,不形成闭合回线,也不中断。

为了方便,人们引入纳布拉(nabla)算符,即

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

它既是一个微分算符，又是一个矢量算符。∇与$\boldsymbol{E}$的标积$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$就等于$\mathrm{div}\boldsymbol{E}$，$\nabla$与$\boldsymbol{E}$的矢积$\nabla\times\boldsymbol{E}$就等于$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}$。利用此算符，真空中静电场的基本方程组可表述为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0 \tag{1.1.17}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{1.1.18}$$

例 设半径为a的球内分布着体密度函数为$\rho(r)$的电荷，已知球内场强$\boldsymbol{E}=E_r\boldsymbol{e}_r=(r^3+Ar^2)\boldsymbol{e}_r$，式中$A$为常数，求$\rho(r)$及球外的电场强度。

解 如采用球坐标系，则该场强方向与$\boldsymbol{r}$方向相同，与θ、α无关，故

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^5+Ar^4)$$

$$=5r^2+4Ar=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

解得球内体电荷密度为

$$\rho(r)=5\varepsilon_0r^2+4A\varepsilon_0r$$

因球内电荷分布具有球面对称性，故球外电场必定也是球面对称的，因此，可得

$$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=4\pi r^2E$$

而球内总电荷为

$$q=\int_V\rho dV=\int_0^a\rho\cdot 4\pi r^2dr$$

$$=4\pi\varepsilon_0(a^5+Aa^4)$$

由高斯定理可得

$$\boldsymbol{E}=\frac{a^5+Aa^4}{r^2}\boldsymbol{e}_r\quad(r\geqslant a)$$