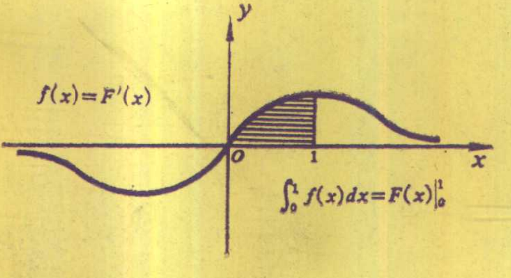
六年制重点中学高中数学课本

微积分初步

WEIJI FEN CHU BU



人民教育出版社

六年制重点中学高中数学课本（试用本） 微积分初步 全一册

六年制重点中学高中数学课本
（试 用 本）
微积分初步
全 一 册
人民教育出版社数学室编
*
人民教育出版社出版
天津教育出版社重印
天津市新华书店发行
天津新华印刷二厂印刷
*
开本787×1092 1/32 印张8.25 字数170,000
1983年12月第1版 1984年5月第1次印刷
印数00,001—50,000
书号 K7012·0548 定价 0.49元

一、本书是根据教育部颁发的《全日制六年制重点中学教学计划试行草案》编写的，供六年制重点中学高中三年级第一、三类型使用.

二、本书内容包括：极限；导数和微分；导数的应用；不定积分；定积分及其应用．学完这些内容，约需84课时．其中标有"*"号的内容，供学生选学.

三、本书的习题共分三类：练习，习题，复习参考题.

1. 练习　主要供课堂练习用.

2. 习题　主要供课内外作业用.

3. 复习参考题　在每章后配备 A, B 两组复习参考题．A 组题主要供复习本章知识时使用；B 组题略带综合性、灵活性，仅供学有余力的学生参考使用.

为了使教学更有针对性和灵活性，本书配备的练习、习题和复习参考题 A 组数量较多，便于教学时根据实际情况选用.

四、本书在编写过程中，曾参考了中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本(试用本)《数学》第四册的有关章节，大部分内容是以原来章节为基础编写的.

五、本书由人民教育出版社数学室编写．参加编写工作的有方明一、刘远图、曾宪源、于琛等．全书由于琛校订.

目　录

第一章　极　　限

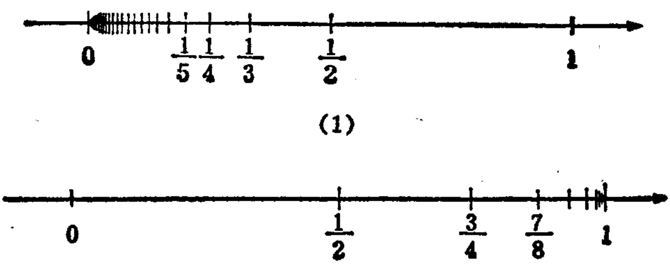
1.1　数列的极限

我们来考察下面两个数列：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \cdots; \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \cdots\cdots, 1-\frac{1}{2^n}, \cdots. \tag{2}$$

为了直观起见，我们把这两个数列中的前几项分别在数轴上表示出来(图 1-1)：



(2)

图　1-1

容易看出，当项数 n 无限增大时，数列(1)中的项无限趋近于 0，数列(2)中的项无限趋近于 1。

事实上，在数列(1)中，各项与 0 的差的绝对值如下页的表所示。

我们看到，无论预先指定多么小的一个正数 ε，总能在

项　号	项	这一项与 0 的差的绝对值
1	1	$\|0-1\|=1$
2	$\frac{1}{2}$	$\left\|0-\frac{1}{2}\right\|=\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\left\|0-\frac{1}{3}\right\|=\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\left\|0-\frac{1}{4}\right\|=\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\left\|0-\frac{1}{5}\right\|=\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{6}$	$\left\|0-\frac{1}{6}\right\|=\frac{1}{6}$
7	$\frac{1}{7}$	$\left\|0-\frac{1}{7}\right\|=\frac{1}{7}$
…	……	……

数列(1)中找到这样一项，使得这一项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 ε. 例如，如果取 $\varepsilon=\frac{1}{5}$，那么数列(1)中第 5 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 ε. 如果取 $\varepsilon=\frac{1}{100}$，那么数列(1)中第 100 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 ε. 在这种情况下，我们就说数列(1)的极限是 0.

同样，对于数列(2)，我们也可以列成下页的表.

可以看出，如果取 $\varepsilon=0.1$，那么数列(2)中第 3 项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于 ε；如果取 $\varepsilon=0.01$，那么第 6 项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于 ε. 就是说，无论预先指定多么小的一个正数 ε，总能在数列(2)中找到这样一

项　号	项	这一项与 1 的差的绝对值
1	$\frac{1}{2}$	$\left\|\frac{1}{2}-1\right\|=\frac{1}{2}\doteq0.5$
2	$\frac{3}{4}$	$\left\|\frac{3}{4}-1\right\|=\frac{1}{4}=0.25$
3	$\frac{7}{8}$	$\left\|\frac{7}{8}-1\right\|=\frac{1}{8}=0.125$
4	$\frac{15}{16}$	$\left\|\frac{15}{16}-1\right\|=\frac{1}{16}=0.0625$
5	$\frac{31}{32}$	$\left\|\frac{31}{32}-1\right\|=\frac{1}{32}=0.03125$
6	$\frac{63}{64}$	$\left\|\frac{63}{64}-1\right\|=\frac{1}{64}=0.015625$
7	$\frac{127}{128}$	$\left\|\frac{127}{128}-1\right\|=\frac{1}{128}=0.0078125$
…	……	……

项，使得这一项后面的所有项与 1 的差的绝对值都小于 ε. 这时，我们说数列(2)的极限是 1.

一般地，对于一个无穷数列$\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，无论预先指定多么小的正数 ε，都能在数列中找到一项 a_N，使得这一项后面所有的项与 A 的差的绝对值都小于 ε(即当 $n>N$ 时，$|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立)，就把常数 A 叫做数列$\{a_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A. \text{❶}$$

❶ lim 是拉丁文 limis (极限)一词的前三个字母，一般按英文 limit(极限) 一词读音. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 也可读作“limit a_n 当 n 趋于无穷大时等于 A”.

这个式子读作“当 n 趋向于无穷大时，a_n 的极限等于 A”。“→”表示“趋向于”，“∞”表示“无穷大”，“$n\to\infty$”表示“n 趋向于无穷大”，也就是 n 无限增大的意思。

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ 有时也可记作

$$当\ n\to\infty\ 时，a_n\to A.$$

从数列极限的定义可以看出，数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，是指当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 中的项 a_n 无限趋近于常数 A。

例1 已知数列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots.$$

(1) 写出这个数列的各项与 0 的差的绝对值.

(2) 第几项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 0.1？都小于 0.001？都小于 0.0003？

(3) 第几项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于任何预先指定的正数 ε？

(4) 0 是不是这个数列的极限？

解： 这个数列的项在数轴上的表示如图 1-2：

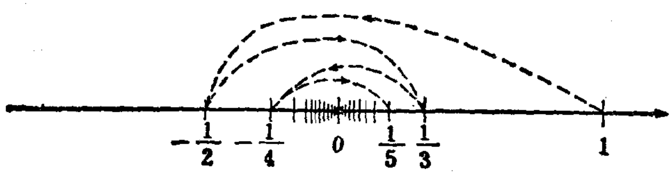


图 1-2

(1) 这个数列的各项与 0 的差的绝对值依次是

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots.$$

(2) 要使$\frac{1}{n}<0.1$，只要 $n>10$ 就行了。这就是说，第 10 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 0.1。

要使$\frac{1}{n}<0.001$，只要 $n>1000$ 就行了。这就是说，第 1000 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 0.001。

要使$\frac{1}{n}<0.0003$，只要 $n>3333\frac{1}{3}$就行了。这就是说，第 3333 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 0.0003。

(3) 要使$\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$就行了，因为所求的项数必须是正整数，因此设$\frac{1}{\varepsilon}$的整数部分是 N，那么第 N 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 ε。

(4) 从(3)可以知道，0 是这个数列的极限，记作：

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0.$$

例 2 已知数列

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots.$$

(1) 计算$|a_n-1|$。

(2) 第几项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于$\frac{1}{100}$？

(3) 第几项后面所有的项与 1 的差都小于任意指定的正数 ε？

(4) 1是不是这个数列的极限?

解: (1) $|a_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$.

(2) 要使$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{100}$,就是要使 $n+1>100$, 即 $n>99$,这就是说,第 99 项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于$\frac{1}{100}$.

(3) 要使$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, 就是要使 $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$, 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$,设$\frac{1}{\varepsilon}-1$ 的整数部分是 N, 那么第N项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于正数 ε.

(4) 从(3)可以知道,这个数列的极限是 1,记作:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

例 3 已知数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}\cdots.$$

(1) 计算$|a_n-0|$.

(2) 第几项后面所有的项与 0 的差的绝对值小于正数ε?

(3) 0是不是这个数列的极限?

解: (1) $|a_n-0|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}$.

(2) 要使$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$, 就是要使 $n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$. 设$\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$的整数部分是 N, 那么第N项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于正数 ε.

(3) 从(2)可以知道，这个数列的极限是 0，记作

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

例 4 求常数数列 $-7, -7, -7, \cdots$ 的极限.

解： 这个数列的各项与 -7 的差的绝对值都等于 0，所以从第 1 项起，这个绝对值就能够小于任意指定的正数 ε，因此这个数列的极限是 -7.

一般地，任何一个常数数列的极限都是这个常数本身，即

$$\lim_{n\to\infty}C=C \quad (C\text{ 是常数}).$$

应该指出，并不是每一个无穷数列都有极限. 例如，数列

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

就没有极限.

数列

$$-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$$

也没有极限.

练　习

1. 已知数列

$$\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$$

(1) 把这个数列的前 5 项在数轴上表示出来.

(2) 写出这个数列的各项与 0 的差的绝对值.

(3) 第几项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 0.1？都小于 0.01？都小于 0.0001？都小于任何预先指定

的正数 ε?

(4) 0 是不是这个无穷数列的极限?

2. 已知数列 $4-\frac{1}{10}, 4-\frac{1}{20}, 4-\frac{1}{30}, \cdots, 4-\frac{1}{10n}, \cdots$.

(1) 计算 $|a_n-4|$.

(2) 第几项后面的所有项与 4 的差的绝对值都小于 0.01? 都小于任意指定的正数 ε?

(3) 确定这个数列的极限。

1.2 数列极限的四则运算

前面我们看到，一些简单的数列可以从变化趋势找出它们的极限. 例如，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0, \qquad \lim_{n\to 0}C=C.$$

如果求极限的数列比较复杂，就要分析已知数列是由哪些简单的数列经过怎样的运算结合而成的，这样就能把复杂的数列的极限的计算问题转化为简单的数列的极限的计算问题. 因此，下面引入数列极限的四则运算法则(证明从略):

> 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, 那么,
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B;$$
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B;$$
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

特别地，如果 C 是常数，那么，

$$\lim_{n\to\infty}(C\cdot a_n)=\lim_{n\to\infty}C\cdot\lim_{n\to\infty}a_n=CA.$$

上面的数列极限的四则运算法则表明：**如果两个数列都有极限，那么，这两个数列的各对应项的和、差、积、商组成的数列的极限，分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商(各项作为除数的数列的极限不能为零)。**

例如，数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

与

$$2,2,2,\cdots,2,\cdots$$

的极限分别是 1 与 2，那么根据上面的运算法则，这两个数列的各对应项的和组成的数列

$$2+\frac{1}{2},2+\frac{2}{3},2+\frac{3}{4},\cdots,2+\frac{n}{n+1},\cdots$$

的极限是 3.

例 1 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}3a_n-\lim\limits_{n\to\infty}4b_n$

$=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n-4\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3\times5-4\times3=3.$

例 2 求:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+8}{4-n^2}$.

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

$$=5+0=5.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{n}-\dfrac{2}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{n}\right)=3-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$=3-2\times0=3.$$

(3) 当 n 无限增大时，分式$\dfrac{2n+1}{3n+2}$中的分子、分母同时无限增大，上面的极限运算法则不能直接运用．为此，我们将分式中的分子、分母同时除以 n 后求它的极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}}$$

$$=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+8}{4-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{8}{n^2}}{\dfrac{4}{n^2}-1}$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{8}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{n^2}-1\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}1}$$

$$=\frac{3-0+0}{0-1}=-3.$$

例 3 已知等比数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots,$$

求这个数列前 n 项的和当 $n\to\infty$ 时的极限。

解： 这个等比数列的公比是

$$q=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

根据等比数列前 n 项和的公式，得

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\\&=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\\&=1-0=1.\end{aligned}$$

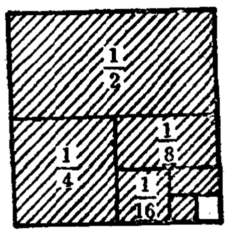


图 1-3

上述结果可从图 1-3 中看出，图 1-3 中各小矩形与小正方形面积的和（阴影部分）的极限等于大正方形的面积。

例 3 中的无穷等比数列有这样的特点：它的公比的绝对值小于 1.

一般地，设无穷等比数列

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-1}, \cdots$$

的公比 q 的绝对值小于 1，我们来求它的前 n 项的和当 n 无限增大时的极限.

无穷等比数列前 n 项的和是

$$S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-1}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n)\\&=\frac{a_1}{1-q}(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}q^n).\end{aligned}$$

因为当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$(证明较繁，本书从略)，所以，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}\cdot(1-0)=\frac{a_1}{1-q}.$$

公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列前 n 项的和当 n 无限增大时的极限，叫做这个**无穷等比数列各项的和**(注意：这与有限个数的和从意义上说是不一样的)，并且用符号 S 表示. 从上面知道，

$$S=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+\cdots=\frac{a_1}{1-q}.$$

例 4 求无穷等比数列 0.3, 0.03, 0.003, …各项的和.

解：∵ $a_1=0.3, q=0.1,$

∴ $$S=\frac{0.3}{1-0.1}=\frac{1}{3}.$$

例 5 将下列循环小数化成分数：

(1) $0.\dot{7}$;　　　　(2) $0.2\dot{3}\dot{1}$.

解: (1) 纯循环小数 $0.\dot{7}=0.777\cdots$ 可以写成

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots,$$

这里各项组成公比等于$\frac{1}{10}$的无穷等比数列, 因此,

$$0.\dot{7}=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{7}{9},$$

也就是说, $0.\dot{7}=\frac{7}{9}$.

(2) 混循环小数 $0.2\dot{3}\dot{1}=0.2313131\cdots$ 可以写成

$$\frac{2}{10}+\frac{31}{1000}+\frac{31}{100000}+\frac{31}{10000000}+\cdots,$$

这里从第 2 项起各项组成公比等于$\frac{1}{100}$的无穷等比数列, 因此,

$$0.2\dot{3}\dot{1}=\frac{2}{10}+\frac{\frac{31}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{2}{10}+\frac{31}{990}$$

$$=\frac{2\times 99+31}{990}=\frac{229}{990}.$$

练　习

1. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\frac{1}{3}$, 求下列极限: