前　言

高等数学是最重要的基础课之一。它是学习后继课及从事科学研究的基础，也是报考研究生必考的科目。面对浩如烟海的高等数学习题，广大学生普遍迫切要求一本与教材适应的教学参考书。本书就是与高等院校数学教材(同济第四版《高等数学》)相配套的辅导教材，紧密结合教学实际。

本书主要选材于教材中较难及易错的习题，国家教委试题库的题，还有一些研究生考题和其他具有代表性、综合性的典型题。书中侧重将高等数学诸多问题进行了系统的归类分析和求解，注重分析解题思路，详细介绍了各类题的解题方法和技巧，一题多解及适当的注解。本书难易适中，既能帮助学生解决学习教材中遇到的困难，又能使学生广泛接触一些新题型、新方法，拓宽知识面，更重要的是归类掌握解题方法，达到举一反三、触类旁通的目的。书后附有国家教委试题库的全真模拟试题，还选编了近几年的研究生入学试题及答案。因此，本书是工科院校学生不可缺少的学习及复习资料，也可作为报考研究生的复习参考书，或教师讲授习题课的讲义。

本书共分 14 章，参加本书编写的有谢彦红(第 1,14 章)，王江(第 2,4 章)，李扬(第 3 章)，赵志华(第 5,6 章)，王一女(第 7,8 章)，洪宗友(第 9,12 章)，韩世迁(第 10,13 章)，董昭洋(第 11 章)。该书在编写出版过程中，得到了东北大学出版社的大力支持，在此表示最诚挚的谢意。由于编者水平有限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者帮助指正。

编　者

2000 年 5 月

目　　录

1 函数、极限与连续

本章首先复习函数的定义、性质和几个常用的初等函数. 然后重点研究数列、函数的极限. 极限是高等数学中最重要的概念之一, 也是建立诸如导数、定积分、重积分和级数等概念的基础与工具, 极限的方法是微积分中处理问题的最基本方法. 最后, 讨论函数的连续性, 以及如何利用连续性的性质证明命题.

1.1 内容提要

1.1.1 主要定义

(1) 函数的定义(定义域、对应法则, 分段函数).

(2) 函数的特性(有界性、单调性、奇偶性、周期性).

(3) 基本初等函数(定义、性质、图形): 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

(4) 反函数, 复合函数(复合函数的分解).

(5) 初等函数: 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成并用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

(6) 数列极限的定义(ε-N 定义、几何意义).

(7) 函数极限的定义(ε-δ 定义、ε-X 定义、左极限、右极限、几何意义).

(8) 无穷小的定义.

(9) 无穷大的定义(M-δ 定义、M-X 定义, 无穷大与无界的区别及联系).

(10) 渐近线(水平渐近线、铅直渐近线)(参见第3章).

(11) 无穷小之间的比较:高阶无穷小、低阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小、k 阶无穷小.

(12) 函数在某点连续、间断的定义,间断点的分类.

(13) 函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续的定义.

1.1.2 主要定理与公式

(1) 极限(数列、函数)的惟一性、有界性、有序性(不等式的性质).

(2) 极限的局部保号性.

(3) 极限的四则运算法则.

(4) 极限的存在准则:夹逼准则(数列、函数极限),单调增(减)有上界(下界)的数列必有极限.

(5) 两个重要极限.

(6) 无穷小的性质:在同一过程中的有界函数与无穷小之积仍为无穷小,有限个无穷小之积或之和仍为无穷小.

(7) 无穷小与函数极限的关系定理,无穷小与无穷大的关系定理.

(8) 等价无穷小代换定理.

(9) 函数极限与函数的左极限、右极限的关系.

(10) 闭区间上连续函数的性质(最值性、有界性、介值性、零点定理).

1.1.3 其他重要结论

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\ (|q|<1)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\ (a>0)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ (n 为自然数).

(2) 若 $\lim\varphi(x)=0$, 则 $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

(3) 若 $\lim\varphi(x)=0$, 则 $\lim[1+\varphi(x)]^{1/\varphi(x)}=\mathrm{e}$. 类似地, 若

$\lim\varphi(x)=\infty$，则 $\lim\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

(4) 若 $\lim f(x)=A>0$，$\lim g(x)=B$，则 $\lim f(x)^{g(x)}=A^B$.

(5) 当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

(6) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & ,n=m\\ 0 & ,n>m\\ \infty & ,n<m\end{cases}.$$

(7) 初等函数在其定义区间内都是连续的.

1.2 典型例题分析

1.2.1 函数

1.2.1.1 函数的定义域

函数的定义域一般按下列步骤确定：①利用基本取值范围建立不等式组，常见的基本取值范围：$\sqrt{x}\Rightarrow x\geqslant0$；$\frac{1}{x}\Rightarrow x\neq0$；$\log_a x\Rightarrow x>0$；$\log_x a\Rightarrow x>0$，$x\neq1$；$\arcsin x$ 或 $\arccos x\Rightarrow|x|\leqslant1$；②解不等式组，确定公共解即为定义域.

【例 1.1】 求函数 $f(x)=\arcsin\frac{x+2}{3}+\sqrt{\sin\pi x}$ 的定义域 D.

【解】 由反三角函数、根号的基本取值范围可知，

$$\begin{cases}\left|\frac{x+2}{3}\right|\leqslant1\\ \sin\pi x\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant1\\ 2k\leqslant x\leqslant2k+1\ (k\in Z)\end{cases},$$

故 $D=\{x\mid x=-5$ 或 $-4\leqslant x\leqslant-3$ 或 $-2\leqslant x\leqslant-1$ 或 $0\leqslant x\leqslant1\}$，

或表示为 $D=\{-5\}\cup[-4,-3]\cup[-2,-1]\cup[0,1]$.

【例 1.2】 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2}+\ln(2x^2-x)$，求 $f(x)$的定义域.

【解】 由根号、分母、对数的基本取值范围可知，

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ x\neq 0\\ 2x^2-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ x\neq 0\\ x<0\text{ 或 }x>\dfrac{1}{2}\end{cases},$$

故 $f(x)$的定义域为$[-1,0)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]$.

【例 1.3】 函数 $y=\sin(\arcsin x)$与函数 $y=x$ 是否表示同一函数，并说明理由.

【解】 $y=\sin(\arcsin x)$与 $y=x$ 不表示同一函数.

因为 $y=\sin(\arcsin x)$的定义域为$[-1,1]$，而 $y=x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，故两者不表示同一函数.

【例 1.4】 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$，问：①$f(x^2)$；②$f(\sin x)$；③$f(x+a)$ $(a>0)$；④$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域各是什么?

【解】 ①由题意知，$0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow |x|\leqslant 1$，故$f(x^2)$的定义域为$[-1,1]$；

②由已知，$0\leqslant\sin x\leqslant 1\Rightarrow 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ $(k\in Z)$，故 $f(\sin x)$的定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

③由已知，$0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow -a\leqslant x\leqslant 1-a$，故 $f(x+a)$ $(a>0)$的定义域为$[-a,1-a]$；

④由 $f(x)$的定义域可知，$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$

(可画数轴分析).

【注】 要想确定此不等式组的公共解，需讨论 a：

(ⅰ)当 $1-a\geqslant a>0$ 时，即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，解得 $a\leqslant x\leqslant 1-a$；

(ⅱ)当 $1-a<a$ 时，即 $a>\frac{1}{2}$，不等式组无解.

因此，若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，定义域为 $[a, 1-a]$；

若 $a>\frac{1}{2}$，则函数无处有定义.

1.2.1.2　函数的运算

函数的运算包括求反函数、函数的表达式.

【例 1.5】　求 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数 $\Phi(x)$，并指出 $\Phi(x)$ 的定义域.

【分析】　欲求 $y=f(x)$ 的反函数，可将 x 与 y 记号互换，再解出 y 即可.

【解】　记 $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$，则 $\sqrt{1+y^2}+y=e^x$ 且 $\sqrt{1+y^2}-y=e^{-x}$，解得

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

故反函数 $\Phi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

【例 1.6】　设 $\Phi(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数，求 $f(x-2)$ 的反函数.

【解】　令 $x=f(y-2)$，则 $\Phi(x)=\Phi[f(y-2)]=y-2$，即 $y=2+\Phi(x)$，故 $f(x-2)$ 的反函数为 $2+\Phi(x)$.

【例 1.7】　求 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq0)$ 的反函数. 又问当 a，b，c，d 满足什么条件时，该反函数与直接函数相同?

【解】　令 $x=\frac{ay+b}{cy+d}$，则 $y=\frac{dx-b}{a-cx}$ 为反函数.

此处所给条件 $ad-bc\neq0$ 是因为原来函数可以写成 $y=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c(cx+d)}$，此式当 $ad-bc=0$ 时，$y=\frac{a}{c}$(常数)，而常数没有反函

数.

若反函数与直接函数相同，即

$\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{dx-b}{a-cx}$，由恒等式得

$$\begin{cases}-ac=dc\\ a^2-bc=d^2-bc\\ ab=-bd\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c(a+d)=0\\ a^2-d^2=0,\\ b(a+d)=0\end{cases}$$

解得 $a+d=0$ 或者 $b=c=0$，$a=d\neq0$，故当 $a+d=0$ 或 $b=c=0$，$a=d\neq0$ 时，反函数与直接函数相同.

【例 1.8】 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $(x\neq1)$，求 $f\{f[f(f(x))]\}$.

【分析】 求多层复合函数时，一般从最内层开始向外一层层复合.

【解】 因 $f(f(x))=f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x$，

故 $f[f(f(x))]=f(x)$，从而 $f\{f[f(f(x))]\}=f\{f(x)\}=x$.

【例 1.9】 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$ $(x\neq0)$，求 $f(x)$.

【分析】 只需将 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 的表达式化成 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 的函数就可以了，当然定义域也要相应地变动.

【解】 因 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}$，

故 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$，由已知，$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)>0$，应有 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}>0$，则 $|x|>\sqrt{2}$，因此，$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$，$|x|>\sqrt{2}$.

【例 1.10】 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，试求 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$之值，$a$，$b$，$c$ 为常数.

【分析】 此题若按先后次序计算将很麻烦，应将第 1，4 项及第 2，3 项合并同类项，整理后再合并.

【解】 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$

$$\begin{aligned}&=f(x+3)-f(x)-3[f(x+2)-f(x+1)]\\&=a[(x+3)^2-x^2-3(x+2)^2+3(x+1)^2]+\\&\quad b[(x+3)-x-3(x+2)+3(x+1)]\\&=0.\end{aligned}$$

【例 1.11】 若 $f(x)$是二次多项式，并适合 $f(a)=f(b)=0$ $(a\neq b)$，$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=M$，求 $f(x)$.

【分析】 由条件，先待定二次多项式 $f(x)$，再由条件求出待定系数.

【解】 由 $f(a)=f(b)=0$，故设 $f(x)=A(x-a)(x-b)$，又由 $M=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=A\left(\dfrac{a+b}{2}-a\right)\left(\dfrac{a+b}{2}-b\right)$，得

$$A=\frac{-4M}{(b-a)^2},$$

所以 $f(x)=-\dfrac{4M}{(b-a)^2}(x-a)(x-b)$.

【例 1.12】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

【分析】 求分段函数的复合函数时，要边求表达式边注意复合后的取值范围.

【解】 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1\Rightarrow e^x<1\Rightarrow x<0\\ 0, & |g(x)|=1\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0,\\ -1, & |g(x)|>1\Rightarrow e^x>1\Rightarrow x>0\end{cases}$

故
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0;\\ -1, & x>0\end{cases}$$

又
$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e^{1}, & |x|<1 \\ e^{0}, & |x|=1, \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases}$$

故
$$g[f(x)]=\begin{cases} e, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1. \\ 1/e, & |x|>1 \end{cases}$$

【例 1.13】 举例说明“分段函数一定不是初等函数”这种说法不对.

【分析】 所谓分段函数，就是分段表达的函数，因此，分段函数与初等函数没有因果关系. 实际上，$f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 就是分段函数，但是，它就是由 $f(t)=\sqrt{t}$，$t=x^2$ 复合得到的，可见，此分段函数是初等函数. 当然，大部分分段函数不是初等函数.

1.2.1.3 函数的特性

【例 1.14】 判断 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ $(-1<x<1)$的奇偶性.

【解】 由奇偶性定义知

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^x}{1+e^x}\left(-\ln\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x),$$

所以 $f(x)$为偶函数.

【例 1.15】 设 $f(x)=\begin{cases} \Phi(x), & -1\leqslant x<0 \\ \sqrt{x-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$，求 $\Phi(x)$，使 $f(x)$在$[-1, 1]$上是奇函数.

【解】 对一切 $x\in[-1, 0)$，有 $-x\in(0, 1]$，由题意，$\Phi(x)=f(x)=-f(-x)=-\sqrt{-x-x^2}$,

所以
$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x-x^2}, & -1\leqslant x<0\\ \sqrt{x-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

【例 1.16】 证明定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

【分析】 先待定一个奇函数和一个偶函数，再由奇偶条件求出两个待定函数.

【证明】 设$f(x)$为定义在$(-l,\ l)$上的任意已知函数，$F(x)$和$G(x)$分别为待定的奇函数、偶函数.

由题意，
$$f(x)=F(x)+G(x) \qquad ①$$
因$F(-x)=-F(x)$，$G(-x)=G(x)$，则
$$f(-x)=-F(x)+G(x) \qquad ②$$
由①，②解得：
$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$
$$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$
经验证，$F(x)$为奇函数，$G(x)$为偶函数，且$f(x)=F(x)+G(x)$.

1.2.2　极限

极限理论是微积分理论的第一块基石，极限方法是贯穿高等数学始终的基本方法，因此如何计算极限就显得十分重要了，下面将极限问题归类求解.

1.2.2.1　利用恒等变形求极限

恒等变形是求极限过程中最常用的基本方法. 所谓恒等变形，是指分子或分母有理化；同除以分子、分母的最高次项；因式分解；三角公式等.

【例 1.17】 计算数列极限：

①$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a^n+3(-b)^n}{2a^{n+1}+3(-b)^{n+1}}$ $(a>b>0)$；

②$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n^2+4n-5}-(n-1)]$.

【解】 ①原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3\left(-\dfrac{b}{a}\right)^n}{2a-3b\left(-\dfrac{b}{a}\right)^n}=\dfrac{1}{a}$ (因$\left|-\dfrac{b}{a}\right|<1$)；

②原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4n-5-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+4n-5}+(n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-6}{\sqrt{n^2+4n-5}+(n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6-\dfrac{6}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}-\dfrac{5}{n^2}}+1-\dfrac{1}{n}}=3$.

【例1.18】 求下列极限：

①$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(2x+1)^2+(3x+1)^2+\cdots+(10x+1)^2}{(10x-1)(11x-1)}$；

②$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1}$.

【解】 ①原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2+\cdots+\left(10+\dfrac{1}{x}\right)^2}{\left(10-\dfrac{1}{x}\right)\left(11-\dfrac{1}{x}\right)}$

$=\dfrac{1^2+2^2+\cdots+10^2}{10\times11}=\dfrac{10\times11\times21}{6\times10\times11}=\dfrac{7}{2}$；

②原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{(4\cos x+1)(2\cos x-1)}{(\cos x+1)(2\cos x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{4\cos x+1}{\cos x+1}=2$.

【例1.19】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

【解】

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1+\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x/2}{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}\cdot 2=2.$$

【注】 此题还用了极限的四则运算法则和重要极限，因此，恒等变形的方法常常与其他方法综合运用.

1.2.2.2 利用无穷小的性质求极限

(1) 等价无穷小代换

等价无穷小代换是简化极限运算的很有效的方法. 首先要牢记一些常用的等价无穷小，其次要满足等价无穷小代换定理的条件才有相应的结论.

【例 1.20】 求下列极限：

①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x(1-\cos x)}{x\sin x^2}$；

②$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-e^{x})\ln(1+2x)}{1-\cos x}$；

③$\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin^2 x)^{1/\ln(1+\pi x^3)}$；

④$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

【解】 ①原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x^2}=1$；

②原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}(e^{2x}-1)\cdot 2x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\cdot 2x\cdot 2x}{\frac{1}{2}x^2}=8$；

③原式$=\exp\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x\sin^2 x)}{\ln(1+\pi x^3)}\right]$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin^2 x}{\pi x^3}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\pi x^2}\right] = e^{-1/\pi};$$

④原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \dfrac{1}{2}$.

【注】 使用等价无穷小代换时，加减关系一般不能代换，如此题，以为当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3} = 0$，很明显这个结果是错误的.

(2) 有界函数与无穷小之积

【例 1.21】 研究并确定下列极限：

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x+a}$;

② $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(1+x)-\sin\ln x]$.

【解】 ①原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+a} + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x+a}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{a}{x}} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+a}\cdot\cos x,$$

因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+a} = 0$，$|\cos x|\leqslant 1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+a}\cdot\cos x = 0$，所以原式 $=1$；

②原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdot\cos\left[\dfrac{1}{2}\ln(1+x)x\right]$,

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right] = 0$，$\left|\cos\left[\dfrac{1}{2}\ln(1+x)x\right]\right|\leqslant 1$，故原式 $=0$.

1.2.2.3 利用公式求极限

利用公式求极限需牢记一些常用公式，如两个重要极限及其变形，$\lim f(x)^{g(x)}$ 等.

【例 1.22】 求下列极限：

① $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}-1}$;

②$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\csc x-\cot x}{x}$;

③$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

【解】 ①原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}=1\times1=1$;

②(方法一)

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2};$$

(方法二)

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\frac{1}{2};$$

显然,等价无穷小代换的方法更快捷.

$$③原式=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\frac{1}{2}.$$

【例 1.23】 求下列极限:

①$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{2-n}$;

②$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+x-1}\right)^{x}$;

③$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x_0+x)+\ln(x_0-x)-2\ln x_0}{x^2}$ $(x_0>0)$.

【解】 ①原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1+1}{n-1}\right)^{2-n}$