

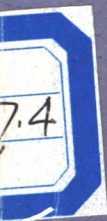
新世纪建筑工程系列丛书

结构中的应力波

吴斌 韩强 李忱 编著



科学出版社



新世纪建筑工程系列丛书

结构中的应力波

吴 斌 韩 强 李 忱 编著



科学出版社

2001

内 容 简 介

应力波理论是固体力学领域中一个非常活跃的研究课题,其研究成果在解决各类工程技术问题,如材料与管道检测、测桩以及科学试验中获得了广泛的应用。本书大致包括三方面内容,分别为应力波基础知识、材料动力学知识和杆系结构中的应力波。全书以特征线法作为重点,阐述应力波问题的基本概念和研究方法,引导读者迅速掌握动力学问题的研究方法,力图把读者领进这一研究领域的前沿阵地。

本书可供土建专业、材料专业、机械专业的科研人员、广大工程技术人员和高等院校相关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构中的应力波/吴斌等编著. -北京:科学出版社, 2001
ISBN 7-03-009130-2

I. 结… II. 吴… III. 应力波 IV. O347.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 02109 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 5 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2001 年 5 月第一次印刷 印张: 10
印数: 1—2 000 字数: 228 000

定价: 22.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前 言

在现代工程技术中,应力波理论一直是世人关注的研究课题。这一方面是由于在生产、军事、科学研究上要求对应力波传播起重要作用的地震现象、高速撞击、爆炸和武器效应以及冲击载荷作用下材料的动态性能和结构的动态响应等做出深入而准确的解释及分析,另一方面是由于应力波理论的研究内容和方法在现代连续介质力学及一般力学的数学方法中占有特别重要的地位,是促进学科发展的内在动力之一。另外,应力波知识的大量积累也开辟了应力波在现代工程、新技术研究开发和军事领域等方面应用的广阔前景,在武器效应、航空航天工程、矿山及交通机械、安全防护工程、地震监测、石油勘探、建筑工程等诸多领域都可以找到它的用武之地。应力波打桩、应力波探矿及探伤、应力波铆接等正在发展成为专门的技术。不仅如此,应力波的研究也会促使人们在缺陷的探测和表征、超声传感器性能的描述、声学显微镜的研制、残余应力的超声测定、声发射等技术领域发挥巨大潜力。同时,这些应用技术的开发、研究领域的扩大又反过来促进了应力波理论的深入研究。可以说,应力波理论是当前固体力学中极为活跃的前沿课题,是现代声学、地球物理学、爆炸力学和材料力学性能研究的重要基础。近年来,在应力波这一研究领域已经取得了大量卓有成效的研究成果,特别是计算机技术的不断发展和实验设备的不断完善,促进了人们在诸如一维复合应力波,二、三维应力波,非线性波及应力波导致的混沌现象等方面的探索。这些都极大地丰富和发展了经典波动理论,使之形成了更加完善的理论体系。

有关应力波理论和实验研究的文献浩如烟海,在国内,相关的著作也陆续出版了几部。本书在内容上由浅入深,读者只要具有大学数学基础便能顺利地阅读,同时立足于近代应力波理论的研究前沿,以最新科研成果启发读者开阔思路。本书大致包括三方面内容,分别为应力波基础知识、材料动力学知识和杆系结构中的应力波。全书以特征线法为重点,阐述应力波问题的基本概念和研究方法。作者力图使本书成为一本理论与应用并重的书,希望这本书能够帮助初次涉足这一领域的研究者少走弯路,在较短的时间内站在较高的起点上开展应力波理论的研究工作。

衷心感谢太原理工大学杨桂通教授和张善元教授多年来给作者的支持和帮助,同时向北京工业大学和华南理工大学交通学院、太原电力高等专科学校的领导表示感谢,他们提出的许多宝贵意见使本书增色不少,并对本书的出版给予了积极的支持。最后还要感谢国家自然科学基金委员会、北京市自然科学基金委员会、北京市科技新星计划办公室对本书提供的出版资助。

由于作者水平所限,书中定有不少缺点和错误,恳请读者批评指正。

目 录

前言

第一章 应力波理论概述	1
§ 1.1 研究背景和发展趋势	1
§ 1.2 弹性波的类型及性质	2
§ 1.3 求解弹性波传播的方法	3
第二章 波动方程及其通解	5
§ 2.1 弦横向振动的动力方程	5
§ 2.2 一维波动方程的行波法	7
§ 2.3 有界弦定解问题的解.....	11
第三章 直杆与板中的应力波	20
§ 3.1 杆中纵波的控制方程.....	20
§ 3.2 一维波动问题的特征线法.....	21
§ 3.3 刚性块对杆的纵向碰撞.....	29
§ 3.4 杆杆撞击时的弹性波.....	34
§ 3.5 弹性波和动力屈曲.....	37
§ 3.6 应力波的反射与透射.....	44
§ 3.7 应力波打桩.....	47
§ 3.8 层裂与痂片.....	49
§ 3.9 有限长杆的纵向振动.....	51
§ 3.10 Bernoulli-Euler 梁中的波	54
§ 3.11 Timoshenko 梁理论	58
§ 3.12 Hopkinson-Kolsky 杆实验技术	60
§ 3.13 无限平板中的纵波	63
§ 3.14 薄板的横向振动	64
第四章 杆系结构中弹性波的传播	73
§ 4.1 材料弹性常数的测定.....	73
§ 4.2 实验方法.....	74
§ 4.3 实验结果.....	75
§ 4.4 基本理论模型.....	86
§ 4.5 刚性结头的动力方程及相容条件.....	91
§ 4.6 边界处理与数值方法.....	94
§ 4.7 数值分析.....	97
第五章 壳体中的应力波	109

§ 5.1	壳体的基本方程与假设	109
§ 5.2	一类正交异性复合材料的物理方程	111
§ 5.3	任意旋转壳受轴对称冲击荷载作用的运动方程	114
§ 5.4	数值计算方法	116
§ 5.5	圆柱壳中的弹性波	120
附录 1		136
附录 2		140
1.	圆柱壳的运动方程及相容方程	140
2.	球壳的运动方程及相容方程	142
3.	圆锥壳的运动方程及相容方程	144
附录 3		147
参考文献		150

第一章 应力波理论概述

应力波理论多年来一直是固体力学领域中一个非常活跃的研究课题,其研究成果在各类工程技术问题和科学试验中获得了广泛的应用。弹性应力波理论就是研究应力波在弹性体中传播规律的科学。

§ 1.1 研究背景和发展趋势

在现代工程技术中,应力波理论越来越受到人们的重视。这一方面是由于在生产和军事技术上、在科学研究上要求对应力波传播起重要作用的地震现象、高速撞击、爆炸和武器效应以及冲击载荷作用下材料的动态性能和结构的动态响应等做出深入而准确的解释,另一方面也是由于应力波理论发展规律的需要,要求内容由浅入深,由简单到复杂,由特殊到一般。这样就由线弹性波的研究发展到大变形的非线性弹性波,由低压的弹性波和极高压的流体应力波的研究发展到弹塑性波和粘塑性波,由单纯波的研究发展到复合波,由连续波的研究发展到具有各阶间断的奇异面的传播如冲击波和加速度波等。应力波知识的大量积累开辟了应力波在自然探索和技术开发等方面应用的广阔前景,在武器效应、航空航天工程、矿山及交通机械、安全防护工程、地震监测、石油勘探、建筑工程等诸多领域都可以找到它的用武之地;应力波打桩、应力波探矿及探伤、应力波铆接等甚至正在发展为专门的技术。不仅如此,应力波的研究将会促使人们在缺陷的探测和表征、超声传感器性能描述、声学显微镜的研制、残余应力的超声测定、声发射等技术领域发挥其潜力。同时,这些应用技术的开发、研究领域的扩大又反过来促进了应力波理论的更深入研究。可以说,应力波理论是当前固体力学中极为活跃的前沿课题,是现代声学、地球物理学、爆炸力学和材料力学性能研究的重要基础。

随着科学技术的发展,大量新型、高强材料广泛应用于国防和民用工业的各个领域,使人们对杆、板、壳等基本结构单元在各类冲击载荷作用下的应力波问题更加关注,特别是计算机技术的不断发展和实验设备的不断完善,促使人们在诸如一维复合应力波,二、三维应力波,非线性波及应力波导致的混沌现象等方面进行探索。这些都极大地丰富和发展了经典波动理论,使之在理论上形成了更加完善的体系,同时其应用前景也更加广阔。目前,应力波理论从发展趋势上大致可以归纳为以下几个方面:

- 1) 进一步研究波和材料本构间的关系,分析各种已知本构关系的材料中波的特性,以及通过波的传播提供的信息来研究本构间的关系。这使波与连续介质力学、粘弹性力学、塑性力学等理论分支建立起了更加密切的联系。

- 2) 与细观力学和材料科学紧密结合起来,分析各种材料细观结构对波传播规律的影响,研究复合材料及各种新材料中波的传播规律。

- 3) 与现代破坏力学结合起来,研究波引起的失效和破坏的机理及其应用。这方面的研究已经并将继续深入到材料内部的非完善性(如裂纹、孔洞、夹杂等),从而和断裂力学、

损伤力学、地球物理学及冲击动力学中的具体问题结合起来,并成为其中不可缺少的部分。

4) 与实验力学相结合,建立固体力学中的反问题,利用波的特性,研究材料和介质的内部情况,推动无损检测、无损评估等有重大实际意义的实验技术的发展,并使其成为实验固体力学新原理、新方法、新技术的重要源泉。

5) 发展新的数学解析方法和数值计算方法,解决由于材料非线性或几何非线性引起的各种非线性波的传播问题。

关于结构中应力波理论和实验研究的文献浩如烟海,在本章中,作者只想就弹性波的类型、性质及基本理论和计算方法进行概述和总结。

§ 1.2 弹性波的类型及性质

1. 弹性波的分类

(1) 按物理实质分类。

波的基本类型有纵波 P 和横波 S。它们的速度分别为 V_p 和 V_s 。P 波的振动方向与传播方向平行, S 波的振动方向则与传播方向垂直。

(2) 按与界面的相互作用分类。

在与界面相互作用时,纵波 P 保持原来的意义。为了研究方便,把横波 S 分为两个分量或两种类型: SH 波和 SV 波。

(3) 按与界面相互作用形成的面波分类。

1) 表面波——与自由表面有关,常见的有: Rayleigh 波,出现在弹性半空间或弹性分层半空间的表面附近; Love 波,系由弹性分层半空间中的 SH 波叠加所形成。

2) 界面波——沿两介质的分界面传播,通常称为 Stonely 波。

(4) 按与介质不均匀性及复杂界面相联系的波分类。

1) 弹性波遇到一定形状的物体时,要发生绕射现象,并形成绕射波,或称为衍射波。

2) 弹性波遇到粗糙界面或介质内不规则的非均匀结构时,可能出现散射,并形成散射波。

(5) 按弥散关系 $c(k) = \omega(k)/k$ [$c(k)$ 和 $\omega(k)$ 分别是波数为 k 的简谐波的相速度和圆频率] 分类。

1) 如果 $\omega(k)$ 是实函数,且正比于 k ,则相速度 $c(k)$ 与波数 k 无关。这个系统是简单的,此时波动在传播过程中相速度不变,形状不变,故称这样的波动为简单波或者是非弥散非耗散波。

2) 如果 $\omega(k)$ 是关于 k 的非线性实函数,即 $\omega''(k) \neq 0$,则系统是弥散的。在此情况下不同波数的简谐波具有不同的传播速度。于是初始扰动的波形随着时间的发展将发生波形歪曲,这样的波称为弥散波。弥散波又分为物理弥散和几何弥散。前者是由于介质特性引起的,后者是由于几何效应引起的。

3) 如果 $\omega(k)$ 是复函数,则波的相速度由 $\omega(k)/k$ 的实部给出。在此条件下产生的波既有弥散效应又有耗散效应,称为耗散波。

2. 弹性波的基本性质

1) 弹性波具有一定的传播速度或走时曲线,有一定的传播路径即射线,在界面上要出现反射、折射与波形变换现象,从而改变其射线方向,这些称为波的运动学特性。

2) 弹性波具有一定的振幅、波形、极化方向、能量及频谱,在相互叠加时可能出现干涉现象,在传播过程中可能出现几何发散现象,当介质具有非理想弹性时会出现能量吸收现象,在界面上反射、折射与转换时强度要发生变化,这些称为波的动力学特性。

在某些情况下,弹性波还会出现频散特性,即波速为频率或波数的函数。频散现象只对非正弦波才有意义,因为它所包含的多种频率的正弦波在传播过程中要改变其形状。

§ 1.3 求解弹性波传播的方法

大量的波的传播问题都没有精确解,因此,根据问题难易程度及特点发展了各种相应的解析法、半解析法、近似数值解法等。在这里,着重介绍一些常见的方法。

(1) 波函数展开法。

该方法的思想是将位移场 u 分解成无旋场 $\nabla\phi$ 和旋转场 $\nabla\times\psi$,并分别满足相应的标量和矢量波动方程,这种分解的完整性证明由 Sternberg 给出。它的实质是一种分离变量解法,关键是如何求解标量方程与矢量方程。

这种方法适用于求解均匀各向同性介质中弹性波二维、三维问题和柱体、球体中的波传播问题。对于各向异性和不均匀介质,则因无法分离变量而难于采用此种方法。通常对于各向异性介质,用所有方向上平面波的叠加或其他方法找通解;而不均匀介质中的弹性波可用各种近似方法处理,如频率的倒幂的渐近展开、抛物型近似或几何射线理论以及射线法与有限差分法组成的混合法。

(2) 积分方程法。

如果研究的波动问题涉及扰动源,可用积分方程法求解。该法的数学基础是动力互易定理。积分方程表达式可以通过格林函数方法和变分方法推导而得,其实质是把域内问题转化为边界问题进行求解。求解问题的关键在于格林函数的确定。该方法对于求解均匀各向异性问题是有效的,对不均匀介质,因格林函数是未知的而不能求解。此方法是近似理论如有限元法和边界元法的基础。

(3) 积分变换法。

该法的思路是把原函数空间中难以求解的问题进行变换,化为函数空间较简单的问题去求解,然后进行逆变换最后得到问题的解。此法难点在于逆变换很难找到精确解。积分变换类型是多种多样的,常见的有 Laplace 变换、Fourier 变换、Hankel 变换,这一方法常用于求瞬态波动问题,对于非线性问题则无能为力。

(4) 广义射线法。

该法是研究层状介质中弹性瞬态波传播的有效方法,在地球物理学研究中有广泛的应用。其优点在于有明显的物理特征:它是将由波源发出而在某一瞬时到达接收点的波分解为直接到达、经一次反射到达、经二次反射到达……经 N 次反射到达(N 可由波传播的路径、瞬时 t 及波速确定)的波叠加而得,清晰地反映了瞬态波的传播过程。Pao 和

Gajewski对此法作过评论,Su 和 Pao 首先将此法用于研究有限梁中瞬态波的传播问题,滕宁钧等人采用这种方法研究了圆柱壳中的瞬态波问题。

(5) 特征线法。

所谓特征线,就是 (x,t) 平面(或者一般的自变量空间)内这样的曲线:在此曲线上,待求函数的导数值不确定,因而跨过此曲线时,导数可不连续。特征线法实质上是基于沿特征线的数值积分。

特征线法对研究应力波传播问题有特殊的意义,因为物体受短时强荷载作用时,其能量是沿特征线传播的,特征线实际上就是扰动传播或波前进的路线。找到了特征线,就有了问题的解,而且可以给出清晰的图像。特征线法对线性、非线性问题的研究都较为有效,它已成为应力波研究的经典方法。

R. Courant 和 D. Hilbert, A. Teffrey 和 T. Taniuti 先后建立了波传播广义特征线法的理论框架,并对某些波传播的问题成功地进行了应用。但这一理论的系统化、规范化和进一步的完善则是近 20 多年来随着复合应力波研究的深入开展才得以实现的。N. Cristescu, R. J. Clifton, T. C. T. Ting, L. E. Malvern 等一大批研究者在这一领域取得了重要成果,特别是 T. C. T. Ting 在复合应力波的研究方面更是做出了系统的、多方面的贡献。他不但成功地解决了一系列复合加载下复合应力波传播规律的问题,而且在此基础上总结和建立了弹塑性复合应力波的统一理论,使得特征关系、简单波解和弹塑性交界面的理论规范化并提高到一个新的水平。大体上说,特征线法有其独特的优点,理论体系便于应用在二维和三维波传播问题中,求解起来方便可靠,有较好的数值稳定性。

(6) 其他方法。

波动问题的不断发展,研究领域的不断扩大,问题复杂程度的不断提高,迫使人们研究更多、更新的方法,特别是用数值方法来解决相应的问题。目前应用较成熟的有 T-矩阵法、谱方法和波慢度法、反射率法、有限差分法、有限元法、边界元法、摄动法和小波变换法等等,它们都在各种具体问题的研究中发挥着作用。

第二章 波动方程及其通解

最简单的一维弹性动力学问题是弦线的横向振动。由于理想弦中排除了几何上的复杂性,因此,波动方程的建立具有鲜明的物理概念,问题求解过程所展示的数学技巧具有一定的普遍意义,波动方程的通解同样可以给出清晰的几何解释。可以说,通过对弦线一维简单系统动力问题的分析,能够展示许多弹性动力问题的共同特点。因而,本章随后几节将围绕弦线的横向振动问题展开详细的分析和讨论。

§ 2.1 弦横向振动的动力方程

考虑如图 2.1 所示的弦线,这是一个实际问题,如果考虑这一实际问题中众多的影响因素,问题将是十分复杂的。因此,需要作出一些符合实际的理想化的基本假设,将这一实际问题简化为一个合理的物理模型。首先假定弦线是一理想弦线,即由于弦很细,可将其视为质量的一维分布;其次弦很柔软,即弦没有抗弯能力,弦线内部互相作用的力是沿弦切向的张力。此外对弦线的运动做如下两点限制:

1) 弦线的平衡位置是 x 轴上的直线,弦线上各质点的运动方向发生在同一平面内,且与 x 轴垂直。

2) 振动是微小的,即 $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1$ 。

图 2.1 中, t 为时间, $u(x, t)$ 表示在 t 时刻 x 点处质点的位移, $\alpha(x, t)$ 为弦线上点 (x, u) 处切线与 x 轴的夹角, $T(x, t)$ 表示该点张力, $\rho(x, t)$ 表示该点的密度。因此我们有 $\operatorname{tg} \alpha(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, 在一

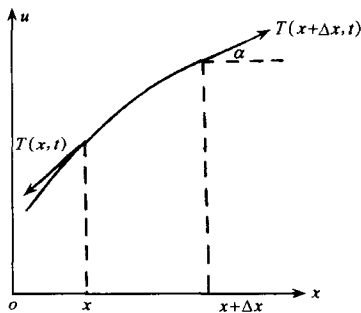


图 2.1 弦线横向振动模型

角近似意义下有

$$\cos \alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}} = \pm \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] \approx \pm 1 \quad (2.1.1)$$

$$\sin \alpha = \frac{\pm \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}} \approx \pm \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1.2)$$

不失其一般性,式(2.1.1)、(2.1.2)中前边的符号均取正号。在弦线内任取一微元 Δx 位于区间 $[x, x + \Delta x]$ 之间,发生振动后此微元小弧段的弧长是

$$ds = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx \approx \Delta x \quad (2.1.3)$$

式(2.1.3)表明振动过程中微元长度保持不变,因此可以看出弦线内张力和密度的大

小不随时间变化,即为 $T(x)$ 和 $\rho(x)$ 。假定 $F(x, t)$ 为弦线横向荷载密度,不计阻力和弦线重量的影响,考虑 x 方向弦线微段的平衡,可以得到

$$T(x + \Delta x) - T(x) = 0 \quad (2.1.4)$$

弦线微元横线动力方程是

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) \quad (2.1.5)$$

由式(2.1.4)不难发现, T 为一个常数,对于均匀弦线而言, ρ 也是一个常数,因此式(2.1.5)可以化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (2.1.6)$$

其中, $c^2 = \frac{T}{\rho}$, $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$, $c = \sqrt{T/\rho}$ 是弦中波速,式(2.1.6)即为弦线强迫振动方程。如果没有横向荷载的作用,则可以得到弦线的自由振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1.7)$$

这就是弦线的一维波动方程。为了确定 $t > 0$ 时刻弦线的运动规律,仅有波动方程是不够的,还需要知道 $t = 0$ 时刻即初始时刻弦线的运动状态,这种对初始时刻运动状态的数学描述称之为初始条件。初始条件由初始时刻弦线的位置和运动速度给定,

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

对于无限长弦,仅有初始条件就足够了;对于有限长的弦线,只要扰动尚未到达弦的端点,仍可将其视为无限长弦去处理,此时波动方程和初始条件构成了一个完整的初值问题。

在有限长弦线中,为了考察扰动到达弦线端点以后的运动情况,还需要给出端点应满足的条件,称之为边界条件。为了确定在弦线两端点 $x=0$ 和 $x=l$ 处的边界条件,需要考虑端点附近微元的运动方程。以端点 $x=0$ 处的边界条件为例进行说明。取弦线上 $[0, \Delta x]$ 段小微元,假定在端点 $x=0$ 处有一弹性系数为 k_1 的弹性支撑,此微元上所受的横向载荷为:端点 $x=0$ 处的弹性恢复力 $-k_1 u(0, t)$, 在 $x=\Delta x$ 处的弦线张力 $T \frac{\partial u(\Delta x, 0)}{\partial x}$, 外力 $F(0, t)\Delta x$, 因此我们可以得到

$$\rho \frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial t^2} \Delta x = -k_1 u(0, t) + T \frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x} + F(0, t)\Delta x \quad (2.1.9)$$

使 $\Delta x \rightarrow 0$ 可得

$$-k_1 u(0, t) + T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.1.10)$$

这就是在端点 $x=0$ 处的边界条件。如果在端点 $x=0$ 处还有外荷载 $\mu_1(t)$ 的作用,则边界条件是

$$-k_1 u(0, t) + T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = -\mu_1(t) \quad (2.1.11)$$

与此类似,不难建立端点 $x=l$ 处弦线的边界条件为

$$-k_2 u(l, t) - T \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\mu_2(t) \quad (2.1.12)$$

其中, k_2 是端点 $x=l$ 处弹性支撑的恢复系数, $\mu_2(t)$ 是作用于端点 $x=l$ 处的横向荷载。

如果 $\mu_1(t)=0, k_1 \gg T$, 则有 $u(0, t)=0$, 这是 $x=0$ 处为固定端的情形; 如果 $\mu_1(t)=0, k_1 \ll T$, 则有 $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}=0$ 是自由端的情形。类似地在端点 $x=l$ 处也有相应的情形。特别地对两端固定的情形有

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (2.1.13)$$

这样的边界条件称之为第一类齐次边界条件, 初始条件和边界条件统称为定解条件。定解条件和相应问题的微分方程称为定解问题。由物理模型建立的定解问题是否反映客观规律性, 需要依靠实践的检验, 但从数学上可以从 3 方面论证, 即定解问题的适定性。

定解问题的适定性是指定解问题解的存在性、惟一性和稳定性。存在性是指定解问题的解是否存在, 惟一性是指定解问题的解是否只有一个, 稳定性则是指当方程自由项或定解条件作微小变化时, 解的变化是否也是微小的。定解问题适定性的研究对于判定定解问题的合理性及其求解起着十分重要的作用。

对于特定的波动问题, 主要在于寻求满足定解条件的特解, 而不是去寻找满足微分方程的通解。一般而言, 微分方程的求解和其定解条件往往一开始就紧密地联系在一起了。

§ 2.2 一维波动方程的行波法

本节以无界弦线为例, 讨论一维无限长弦波动问题求解的行波法。无界弦自由振动的定解问题是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

作变量代换, 得

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

则波动方程可以化为如下形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.2.3)$$

通过两次积分可以得到方程的通解为

$$u = F(\xi) + G(\eta) \quad (2.2.4)$$

$$u = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (2.2.5)$$

通解式(2.2.5)中的函数 F 和 G 是具有两阶连续偏导数的任意函数, 这一通解是由 D'Alembert 得到的。函数 F 和 G 可以利用初始条件来确定。利用初始条件不难得到下述关系:

$$\left. \begin{aligned} F(x) + G(x) &= \varphi(x) \\ -F'(x) + G'(x) &= \frac{1}{c}\psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

利用式(2.2.6)第二式进行积分可以得到

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c} \int_a^x \psi(x) dx + k \quad (2.2.7)$$

其中, $k = F(a) + G(a)$ 为积分常数。结合式(2.2.6)第一式, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_a^x \psi(x) dx - \frac{k}{2} \\ G(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_a^x \psi(x) dx + \frac{k}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.8)$$

将上述两式中的 x 分别以 $x-ct$ 和 $x+ct$ 代替, 则有

$$\left. \begin{aligned} F(x-ct) &= \frac{1}{2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_a^{x-ct} \psi(x) dx - \frac{k}{2} \\ G(x+ct) &= \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_a^{x+ct} \psi(x) dx + \frac{k}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.9)$$

因此定解问题的通解可以最终表示为

$$\begin{aligned} u &= F(x-ct) + G(x+ct) \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x) dx \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

这一通解公式称为 D'Alembert 公式。由于波动问题的解可以表示为两个函数 $F(x-ct)$ 和 $G(x+ct)$ 之和, 而此两函数的具体形式完全由初始条件来确定。因此, 要阐明 D'Alembert 公式的物理意义, 只需要阐明这两个函数 $F(x-ct)$ 和 $G(x+ct)$ 的物理意义就可以了。

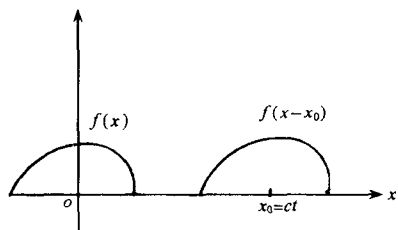


图 2.2 波传播特征

如果将一函数 $f(x)$ 的图形保持不变, 相对坐标原点右移 x_0 的距离如图 2.2 所示。移动后其表达式变为 $f(x-x_0)$ 。如果令 $x_0 = ct$, 则 x_0 点的移动速度为 $\frac{dx_0}{dt} = c$ 。此时, 函数 $F(x-ct)$ 的物理意义为: 弦线上质点振动所构成的外形函数 $F(x-ct)$ 是以常速度 c 沿 x 轴正方向传播的, 称之为右行波。与此类似, 形如 $G(x+ct)$ 的解就代表一个以速度 c 沿 x 轴负方向传播的左行波。

于是, D'Alembert 公式表示的解可以理解为由任意初始扰动引起的自由振动总是以行波的形式向左右两个方向传播, 其传播速度是常数 c , 这就是 D'Alembert 公式的物理解释。

由 D'Alembert 公式不难看出, 在 (x, t) 的解的数值仅依赖于 x 轴上区间 $[x-ct, x+ct]$ 内的初始条件, 而与 x 轴上其余点的初始条件无关。因此称区间 $[x-ct, x+ct]$ 为点

(x, t) 的依赖区间, 它是由通过点 (x, t) 的两条斜率为 $\pm \frac{1}{c}$ 的直线在 x 轴上所截得的区间, 如图 2.3 所示。图中的 $x-t$ 平面称为相平面或物理平面, 过相平面内任一点 $P(x, t)$, 作两条斜率为 $\pm \frac{1}{c}$ 的直线, 分别交 x 轴于 $A(\xi, 0)$ 和 $B(\eta, 0)$ 。显然, 对于右行波而言, 直线 AP 上各点的相位均相同, 且等于 A 点的 x 坐标值 ξ , 因此直线 AP 上各点的 F 值相同; 对于左行波, 沿直线 BP 也有类似的结论。由此有

$$\left. \begin{aligned} F(x - ct) &= F(\xi) \\ G(x + ct) &= G(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.11)$$

利用 D'Alembert 公式可以给出 P 点的 u 为

$$u(P) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2c} \int_A^B \dot{u}(x) dx \quad (2.2.12)$$

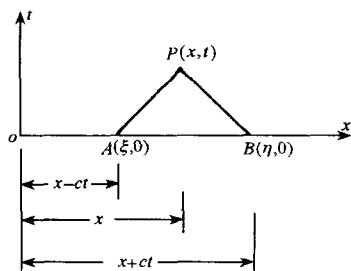


图 2.3 依赖区间示意图

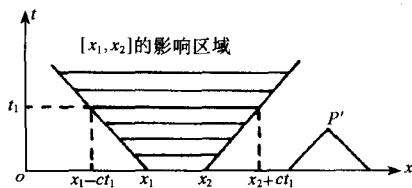


图 2.4 影响区域示意图

我们称区间 $[A, B]$ 为 P 点的依赖区间。同时不难发现, ΔPAB 中任意一点的 u 由 $[A, B]$ 上的初始值所决定, 于是称 ΔPAB 为区间 $[A, B]$ 的决定区域。若 x_1 和 x_2 是 x 轴上的两点, 过 x_1, x_2 分别作两条斜率为 $\pm \frac{1}{c}$ 的直线, 如图 2.4 所示。

根据上述讨论不难看出, 位于图中阴影区以外的任意一点 P' 的 u 值与区间 $[x_1, x_2]$ 上的初始值无关, 而阴影区内任意一点的 u 值则依赖于区间 $[x_1, x_2]$ 上初值的影响, 因此, 称图中的阴影区为区间 $[x_1, x_2]$ 的影响区域。如果 x_1, x_2 重合为一点, 则该点的影响区域为一个无限延伸的角形区域。由于波速 c 是有限的, 如果初值仅在 $[x_1, x_2]$ 上给出, 经过时间 t 后, 其扰动范围也是有限的, t 时刻受扰动的范围为

$$x_1 - ct \leq x \leq x_2 + ct \quad (t > 0) \quad (2.2.13)$$

根据上述分析可以发现, 相平面内的直线 $\xi = x - ct$ 和 $\eta = x + ct$ 在一维波动方程的解中起着重要的作用, 我们分别称为右行和左行特征线。当变化 ξ 和 η 的值时, 在相平面内给出的两族平行直线称之为特征线族。沿同一条右特征线上的 F 为常数, 沿同一条左特征线上的 G 为常数, 因此我们说扰动总是沿特征线传播的。

下面我们讨论一个具体问题, 从这一问题的讨论中可以清楚地看出波动问题的处理方法和特点。定解问题是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) &= \varphi(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a}h & 0 \leq |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.14)$$

图 2.5 是 $\varphi(x)$ 的图像。根据 D'Alembert 公式 (2.2.10), 可以得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)] \quad (2.2.15)$$

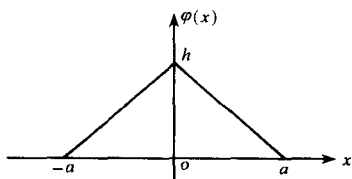


图 2.5 初始条件

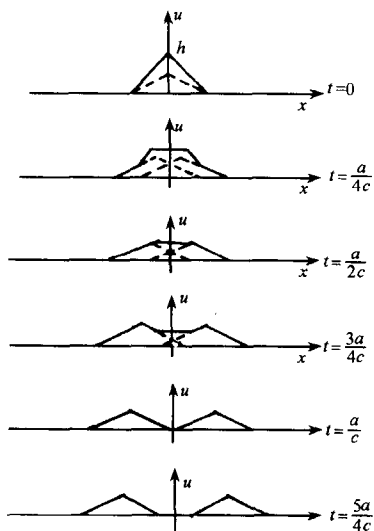


图 2.6 不同时刻弦线的波形图

右行波 $\frac{1}{2}\varphi(x-ct)$ 和左行波 $\frac{1}{2}\varphi(x+ct)$ 在初始时刻相重合, 其值为 $\frac{1}{2}\varphi(x)$ 。在时刻 $t(t > 0)$, 右行波的图形无畸变地向右移动了距离 ct , 左行波的图形则向左移动了距离 ct , 将左、右行波在时刻 $t_1, t_2, \dots$ 所移动的图形相叠加, 即得到在这些时刻弦线的波形图。下面依次对时刻 $t_k = \frac{ka}{4c} (k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 画出弦线的波形图, 如图 2.6 所示。

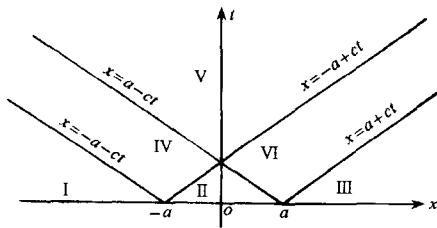


图 2.7 相平面各区域波形数学表达

为了利用表达式 $u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)]$ 写出 $u(x, t)$ 的数学表达式, 我们在 $(-a, a)$ 两端画出相应的特征线, 并研究它在相平面 (x, t) 上所划分的区域, 如图 2.7 所示。

首先讨论某时刻弦线波形的数学表达, 为此, 可以分为两种情况:

1) $0 < t < \frac{a}{c}$ 时。

若 x 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 单调变化时, 相平面上的点 (x, t) 依次通过区域 I、IV、II、VI 和 III

个区域。此时根据式(2.2.10),弦线波形可以表示为

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < -a-ct) \\ \frac{h}{2a}[a - |x+ct|] & (-a-ct < x < -a+ct) \\ \frac{h}{2a}[a - |x+ct|] + \frac{h}{2a}[a - |x-ct|] & (-a+ct < x < a-ct) \\ \frac{h}{2a}[a - |x-ct|] & (a-ct < x < a+ct) \\ 0 & (a+ct < x < \infty) \end{cases} \quad (2.2.16)$$

2) $\frac{a}{c} < t < \infty$ 时。

若 x 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 单调变化时,相平面上的点 (x,t) 依次通过区域 I、IV、V、VI 和 III 5 个区域。此时根据式(2.2.10),弦线波形可以表示为

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < -a-ct) \\ \frac{h}{2a}[a - |x+ct|] & (-a-ct < x < a-ct) \\ 0 & (a-ct < x < -a+ct) \\ \frac{h}{2a}[a - |x-ct|] & (-a+ct < x < a+ct) \\ 0 & (a+ct < x < \infty) \end{cases} \quad (2.2.17)$$

此外,也可以按照 x 等于常数的方法讨论弦线波形的数学表达。

§ 2.3 有界弦定解问题的解

考虑下述定解问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t > 0, x > 0) \\ u(0,t) &= 0 & (t \geq 0) \\ u(x,0) &= \varphi(x) & (x \geq 0) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \psi(x) & (x \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

其中,边界条件表示在 $x=0$ 的一端弦线是固定的,因此这是一个半无限长弦的波动问题。求解区域是 (x,t) 平面的第一象限。如果要求 $u(x,t)$ 在求解的区域直到边界上是连续的,就应设 $\varphi(0)=0, \psi(0)=0$, 否则端点 $x=0$ 将无法固定端的边界条件。于是可以将 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 延拓为 $-\infty < x < \infty$ 区间上的奇函数,这样一来 $x=0$ 端的边界条件可以自然得到满足。换言之,可以将上述初始条件改写为

$$u(x,0) = \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (x \geq 0) \\ -\varphi(-x) & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0) \\ -\psi(-x) & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2.3.3)$$