高等学校教学用書

解析几何

JIEXI JIHE

江苏师范学院数学系編

人民教育出版社

高等学校教学用書

解析几何

JIEXI JIHE

江苏师范学院数学系編

人民教育出版社

本书的編写企图，主要是为高等师范院校数学系本科学生以及中学数学教师，作为教学用书的。針对着将来能够到中学里讲授解析几何的需要，本书具备着一定的深度和广度。并且解释比較詳尽，易学易懂。

理論联系实际，是本书的另一个特点。大部分基本概念都是联系着物理学而引进的。并且以运动为綱，讲述了軌迹和方程。通篇着重地說明，解析几何是从客观事物的概括提高到理論的成就。

在內容方面，先从矢量引进坐标，接着介紹平面上的軌迹，然后以自由度和軌迹的維等概念来討論軌迹和方程，从而过渡到空間軌迹的討論。在引进了坐标变换和不变量的基础上，展开一般二次曲綫和二次曲面的研究和分类。全书把平面和空間的教材密切結合，融为一体。

本书具有若干比較深入細致的部分。这是編者們多年来教学的心得与体会，这与其他解析几何教科书有所不同，这对于中学教师是有所帮助的。

本书用大小两种字体排印，便于灵活处理教材。

解　析　几　何

江苏师范学院数学系編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

崇文印刷厂印装　新华书店发行

統一书号 13010·851　开本 $850\times1168\ 1/32$　印张 $14\ 15/16$

字数 411,000　印数 00001—33,000　定价(6) ￥1.40

1960年9月第1版　1960年9月北京第1次印刷

序　言

这本书是在1958年教育大革命初期开始編写的，而定稿的时候则是在今年大鬧数学革命的时期。我們經过了1958年春的双反、交心运动，揭露了过去教学工作上存在着严重的脫离实际和脫离生产等現象，批判了形形式式的資产阶級个人主义，解放了思想，破除了迷信，树立了敢想敢做的風格。接着，学习了党的社会主义建設总路綫和党的教育方針，认識到数学必須联系生产实际，必須为社会主义建設服务；明确了我們今后的任务在于大力提高教学质量，而提高教学质量的关鍵是在于改革教学內容。經过反复务虛，我們一致认为在学习苏联教材的基础上，有必要編写一套更加切合中国实际的高等师范学校数学专业的教材以适应形势的需要。本书的編写就是在这样的思想指导下开始的。編写时，我們力求理論联系实际，适当提高水平，并写得易学易懂。初稿完成后，我們又經过了两次試用和修改；最近全国各地都提出了要大鬧数学革命，为使数学教学进一步貫彻多快好省的精神，为使数学研究更快赶上現代水平，更好为現代生产技术服务，我們再一次做了一些删改，完成了定稿工作。

本书的全部編写工作，是在系院党委及总支領导下，采取分工編写、集体討論、个人修改定稿的方法进行的。先由蔡介麗、毛振璿、金品、陆欽軾四位同志，根据集体討論的大綱，分工执笔，写成初稿。然后通过两次教学实踐，广泛征求了院內师生及院外兄弟学校的意見，再由蔡介麗同志执笔作了两次較大的修改而定稿。本书插图主要是由徐志鵬、安靜华两位同志繪制的。在最近修改定稿工作中，四年級同学高岳兴、黃长齡等同志也付出了不少的劳动。因此，这部教材是党委、教师、学生三結合的群众路綫的产品。事实証明，这种工作方法是完全正确的。

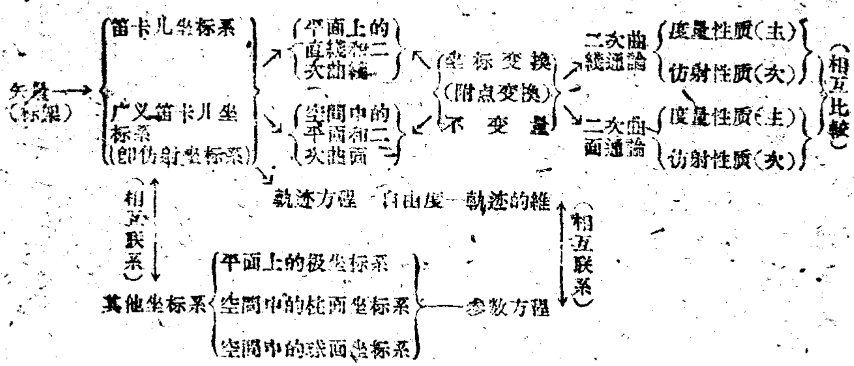
本书是为高等师范学校数学专业学生和中等学校数学教师而編写的。我們希望这本书能够成为他們比較合适的教学用书。由于解析几何是高等数学的开端，而今后又将是中学課程的一部分，所以作为未来的中学教师、高师数学专业的学生，对这門課程必須要有較深較广的知識和熟練的数学技能。因而我們要求把这本书写得既要便于初学，又要深入提高；既要符合中学口徑而又不是中学教材的翻版。因此，在內容方面，以度量性部分为主，又随时作好討論仿射性的准备，待条件成熟时，可以用較短的篇幅向仿射解析几何过渡，以資提高。

本书注意了理論与实际的联系。大部分基本概念都从具体实例引进，并且以运动为綱討論軌迹問題。这样，便說明了解析几何的各个部分都是反应着从具体到理論的精神。

为了要把这本书写得易学易懂，在說明方面力求清楚，插图也适当增加，以补說明之不足。我們的希望是，即使沒有学过解析几何的讀者，通过自学，掌握它也沒有多大困难。

全书正文用大小两种字体排印，使在必要时，仅讲大字部分，即可掌握全部教材的主要內容。这样可以更加多快好省地完成教学任务。而用小字排印的部分，仍可供讀者自学和参考之用。

本书的內容体系，可用下表来說明：



这里，我們把平面解析几何和空間解析几何交錯起来。这样做，一方面

是因为符合认識过程。另方面可以把平面解析几何和空間解析几何打成一片，使讀者能具有灵活的处理空間和平面問題的习惯和熟練技能，这对于培养一个中学数学教师說来是有好处的。

在第一章內，坐标系是从矢量引进的。这样，一方面可以和綫代数密切結合，使教材現代化；另方面可以引进广义笛卡儿坐标系——仿射坐标系，为过渡到仿射解析几何作好准备。此外，还可避免和中学教材重复，而又起着指导中学教材的作用。

我們考虑到目前的中等学校里尙未設置解析几何这門課程，因此把直綫和圓錐曲綫的教材仍然列为一章（第二章），以适应目前中学毕业生的水平。如将来中学毕业生都学过了解析几何，那时可将这章教材的一部或大部作为学生自学复习的材料，而只要把开始的直綫矢量方程（这是为联系矢量而設的）和直綫間的綫性相关加以讲授就行了。

正由于以上的原因，所以到第三章才詳細介紹"軌迹和方程"。这里我們用了"自由度"、"軌迹的維"等概念来討論平面曲綫的参数方程、极坐标方程、空間里的曲面方程及曲綫方程，并且从球面及柱面的方程引进了球面坐标和柱面坐标。这样，第三章的內容起着三种过渡作用：1° 从討論平面的軌迹向討論空間的軌迹过渡；2° 从軌迹的坐标方程向軌迹的参数方程过渡；3° 从笛卡儿直角坐标系向其他坐标系过渡（参数，从某种角度来看，也是坐标）。讀者掌握了这些知識之后，对解析几何已可作全面的鳥瞰而走上融会貫通的道路。

对于笛卡儿斜角坐标系之間的相互变换，在过去总被讀者认为难懂难記。但是，我們在第六章里以标架变换为重点，介紹了广义笛卡儿坐标变换之后，对这一类变换，就比較簡单而易于掌握了。并且通过这样的变换，从点和标架的相对运动着想，仿射变换便易于引进了。

本书最后的二次曲綫通論和二次曲面通論两章，可以供讀者参考而不必讲授。不过，假使有时間讲授的話，对于将来学习綫性代数里的

正交变换和二次型的化簡，更易理解。

我們考虑到今后的高中毕业生，将学过一些行列式和矩陣方面的初步知識。但目前，他們尚未具备这些知識。所以在本书內，把有关这方面基本知識列为附录。讲授时可根据具体情况适当地加以介紹。

在我們这部书里，还有些缺点。例如我們虽然努力做到了說明解析几何从实际中来，但是对解析几何如何回到实际中去为生产服务。这一点，却做得不够。另外在习题的安排上，由于定稿时間过于急促，也做得不够理想。凡此种种，都希望能在讀者的帮助下得到进一步的改进。

革命是不断地向前发展的，同时这本书又是在教学改革以前編写的，因而需要不断地修改，以适应客观形势的发展。不过为了目前教学上和参考上的需要，并为了征求更广泛的数学工作者的批評和意見，使本书更加完善，我們便大胆地让这部不够成熟的教材和讀者們見面了。

編者

1960年4月于江苏师范学院数学系

目　录

序　言 …… vii
第一章　点、矢量与坐标 …… 1
§ 1.1　有向綫段和有向直綫 …… 1
§ 1.2　矢量与数量 …… 2
§ 1.3　矢量加法 …… 5
§ 1.4　矢量减法 …… 9
§ 1.5　数量与矢量的乘积 …… 11
§ 1.6　矢量的分解・矢量間的綫性相关・矢量在軸上的射影 …… 16
§ 1.7　直綫上点的坐标 …… 26
§ 1.8　平面上点的坐标 …… 28
§ 1.9　空間里点的坐标——笛卡儿坐标・广义笛卡儿坐标 …… 32
§ 1.10　两个矢量的数性积 …… 40
§ 1.11　用射影(或坐标)表示数性积 …… 48
§ 1.12　矢量的矢性积 …… 49
§ 1.13　两矢量的矢性积与它們射影間的关系 …… 54
§ 1.14　有向三角形及其面积矢量 …… 56
§ 1.15　三个矢量的矢性数性积 …… 59
§ 1.16　混合积的射影表示 …… 62
§ 1.17　双重矢性积 …… 66
第二章　平面上一次曲綫和二次曲綫的初步知識 …… 70
§ 2.1　直綫的矢量方程 …… 70
§ 2.2　直綫的坐标方程 …… 76
§ 2.3　化直綫的一般方程为法式方程 …… 81
§ 2.4　直綫划分平面問題・二元一次不等式图解法 …… 86
§ 2.5　两直綫的相关位置——相交、平行和重合的条件・交点和交角的求法 …… 88
§ 2.6　直綫束、直綫間的綫性相关・三直綫的相互位置 …… 96
§ 2.7　有关直綫的应用問題 …… 106
§ 2.8　平面上笛卡儿直角坐标的平移和旋轉 …… 108
§ 2.9　质点运动和曲綫的参数方程 …… 111
§ 2.10　圓錐曲綫 …… 120
§ 2.11　圆及根軸 …… 132
§ 2.12　圓錐曲綫命名的由来 …… 141

第三章　軌迹和方程 ……………………………………………………144
§ 3.1　直綫上的点和实数的一一对应 ……………………………………144
§ 3.2　自由度 ……………………………………………………………145
§ 3.3　軌迹的[illegible] ……………………………………………………………149
§ 3.4　曲綫的参数方程 …………………………………………………150
§ 3.5　极坐标 ……………………………………………………………153
§ 3.6　曲面方程 …………………………………………………………169
§ 3.7　球面 ………………………………………………………………174
§ 3.8　柱面 ………………………………………………………………178
§ 3.9　空間曲綫的方程 …………………………………………………182
第四章　平面和直綫 ……………………………………………………186
§ 4.1　平面的矢量方程 …………………………………………………188
§ 4.2　平面的坐标方程 …………………………………………………190
§ 4.3　化平面的一般方程为法式方程 …………………………………195
§ 4.4　从已知平面的方程作出平面 ……………………………………198
§ 4.5　点与平面的相关位置 ……………………………………………200
§ 4.6　两平面的相关位置 ………………………………………………203
§ 4.7　直綫的标准方程 …………………………………………………206
§ 4.8　直綫的一般方程和平面束 ………………………………………208
§ 4.9　直綫和平面的相关位置 …………………………………………214
§ 4.10　三平面的相关位置以及平面族的綫性相关 ……………………215
§ 4.11　两直綫的相关位置 ………………………………………………223
§ 4.12　点与直綫的相关位置 ……………………………………………225
第五章　二次曲面的各种类型 …………………………………………229
§ 5.1　曲面的次数 ………………………………………………………229
§ 5.2　一般柱面 …………………………………………………………230
§ 5.3　錐面 ………………………………………………………………231
§ 5.4　旋轉曲面 …………………………………………………………233
§ 5.5　橢球面 ……………………………………………………………236
§ 5.6　旋轉双曲面 ………………………………………………………240
§ 5.7　单叶双曲面 ………………………………………………………241
§ 5.8　双叶双曲面 ………………………………………………………244
§ 5.9　橢圓拋物面 ………………………………………………………246
§ 5.10　双曲拋物面 ………………………………………………………248
§ 5.11　单叶双曲面上的直母綫 …………………………………………250
§ 5.12　双曲拋物面上的直母綫 …………………………………………260
第六章　坐标变换 ………………………………………………………265
§ 6.1　平面上广义笛卡儿坐标的坐标变换 ……………………………266

§ 6.2 平面曲綫的分类 ……269
§ 6.3 笛卡儿直角坐标系的平移、旋轉及曲綫方程的化简 ……271
§ 6.4 已知新軸方程求坐标軸的平移和旋轉公式 ……273
§ 6.5 二次曲綫的一般方程 ……275
§ 6.6 二次曲綫經过坐标軸平移后的方程 ……276
§ 6.7 二次曲綫經过坐标軸旋轉后的方程 ……280
§ 6.8 在平移和旋轉的坐标变换下二次曲綫的不变量 ……285
§ 6.9 二次曲綫在剛体运动里的不变量 ……289
§ 6.10 空間笛卡儿直角坐标系的平移 ……291
§ 6.11 空間笛卡儿直角坐标軸的旋轉 ……295
§ 6.12 尤拉角 ……301
§ 6.13 一般变换公式 ……303
§ 6.14 已知新坐标平面的方程(两两垂直的)求坐标变换 ……307
§ 6.15 在坐标軸的平移和旋轉下一般二次曲面的不变量 ……310
§ 6.16 空間中广义笛卡儿坐标系的坐标变换 ……317
§ 6.17 点的仿射变换 ……319

第七章 二次曲綫通論 ……326
§ 7.1 一般二次曲綫和直綫的相关位置 ……326
§ 7.2 二次曲綫的切綫 ……330
§ 7.3 二次曲綫的渐近綫 ……334
§ 7.4 直径——平行弦中点的軌迹 ……338
§ 7.5 二次曲綫的中心 ……342
§ 7.6 共軛直径和二次曲綫的軸 ……345
§ 7.7 中心二次曲綫方程的化简及不变量的应用 ……354
§ 7.8 拋物綫类方程的化简 ……362
§ 7.9 二次曲綫的分类 ……371
§ 7.10 二次曲綫的仿射性分类 ……373
§ 7.11 确定二次曲綫所需的条件 ……376
§ 7.12 二次曲綫族 ……377

第八章 二次曲面通論 ……379
§ 8.1 二次曲面的切綫和切平面 ……379
§ 8.2 二次曲面的径面 ……389
§ 8.3 二次曲面的主径面 ……392
§ 8.4 特征方程中根的研究 ……394
§ 8.5 二次曲面的中心 ……401
§ 8.6 二次曲面方程的化简 ……408
§ 8.7 二次曲面方程的討論和分类 ……410
§ 8.8 二次曲面的度量性分类和仿射性分类 ……425

附录 行列式和矩阵 ……430
§1 二阶行列式 ……430
§2 三阶行列式 ……431
§3 四阶以上行列式 ……440
§4 行列式的乘法 ……445
§5 一次方程組的解 ……450
§6 矩陣及其在討論一次方程組上的应用 ……453
§7 齐次一次方程組 ……459

第一章 点、矢量与坐标

前言 代数学与几何学的結合首先出現在解析几何里。而这种結合是从作为几何学的基本对象——点——与代数学的基本对象——数——的联系而开始的；其次，作为数学理論在客观世界里的具体实践，几何学和运动学、动力学通过了矢量的概念又結合起来。这就是本章所論述的点、矢量与坐标。在这里，我們一开始就討論矢量的性质，再从矢量出发先后建立了直綫上的坐标系、平面上的坐标系以及空間里的坐标系，在这个基础上，进一步再使作为动点軌迹的曲綫与变数的方程建立了联系。这样，在数学里引入了变数，于是运动与辯証法就进入了数学，从而推动了近代数学的发展。

§1.1 有向綫段和有向直綫

看作是“直綫上任意两点間的部分”的綫段，在不考察它的方向的时候，对于它的两个端点的次序是不加考虑的。也就是說，綫段 AB 与綫段 BA（图 1）是不加区分的。但是在現实世界中，对有些形象表現为綫段的事物，考察它們的方向是有实际意义的。例如，动点在直綫上的一段行程，就有必要考察这段行程的方向。对于直綫上两点所限定的綫段，如果我們确定这二点中的一点作为起点，而另一点作为終点，那末我們有下列定义：

定义 1.1.1 有确定的起点和終点的綫段，称它为有向綫段。从起点到終点的方向称为这有向綫段的方向。

为了表示有向綫段，我們規定把表示起点的字母写在前面，把表示終点的字母写在后面，并在这两个字母上面加一横。例如，定直綫 l 上的两点 A, B，把点 A 算作起点，点 B 算作終点的有向綫段表示为 $\overline{AB}$

(图 1)。有向綫段 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 是两个不同的有向綫段。

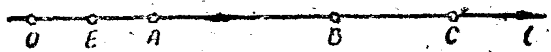


图 1

对于有向綫段所在的直綫，例如有向綫段 $\overline{AB}$ 所在的直綫 l，我們也可以把它的两个方向中的任一个规定为它的方向（例如，我們规定 l 的方向是由左到右的）。因而 l 便有了确定的方向。

定义 1.1.2 有确定方向的直綫，称它为有向直綫。

习惯上在有向直綫上画一矢号来标記它的方向（图 1）。标出了方向的直綫又可称之为軸。

綫段的长度是讀者在初等几何学里早已熟悉的概念。当我們选定了一个确定的綫段作为单位綫段时，所謂綫段的长度就是以单位綫段测量这綫段所得到的正数。我們知道如果单位綫段已确定的話，任何正数就都可以用一个綫段来表示。換句話說，在确定的单位綫段下，每一正数都可以看做是一个綫段的长度①。

§1.2 矢量与数量

在力学、物理学及其他在客观世界里所碰到的一些量，大致可以分为两类。有一些量象溫度、时間、质量、密度、功、綫段的长度、矩形的面积、长方体的体积等等，是由一个数来完全确定的。另一方面，有些量象位移、力、速度、加速度等，除了明确它們的数值外，还必須知道它們在空間里的方向，才能确定下来。我們把第一类型的量称为数量；而把第二类型的量叫做矢量。而有

定义 1.2.1 矢量是既有大小又有方向的量。

在数学里，要画出矢量时，我們用一个有定长的有向綫段在終点加上一个箭头来表示它。有向綫段的起点和終点，就叫做矢量的起点和

① 这里所討論到的問題的严格証明屬于几何基础。

終点。并且用 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ 等記号来記載它（把有向綫段記号上的一横加上一个箭头），有时用 $\vec{F}$, $\vec{M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 或者用黑体字母 **A**, **M** 等来表示（图2）。有向綫段的方向就是矢量的方向，而有向綫段的长度代表着矢量的数值，我們把它叫做矢量的模数，有时也称为矢量的长度。以后我們总是用 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 AB 表示 $\overrightarrow{AB}$ 的模数，$|\boldsymbol{M}|$ 或 M（也有用 m 的）代表矢量 $\boldsymbol{M}$ 的模数。其余的可以类推。模数为单位长的矢量叫做单位矢量。

顺便提醒一下，初学矢量的同学們，在处理有关矢量的問題时，往往考虑得不完全，或者說得不完全。一般的毛病，只是注意了长度而忘記了方向。因此在这里就需要特别强調指出：

“組成一个矢量共需二个要素——长度和方向”。如果仅仅知道其中之一，是不能确定一个矢量的①。

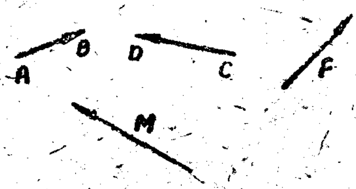


图 2

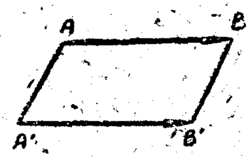


图 3

另外还有一点也需要注意的就是：

“必須区別矢量的起点和終点，如果把它們的地位对調了，我們就得到另外一个矢量”。这和有向綫段的意义是一致的。

我們再介紹两个矢量为相等的意义：

定义 1.2.2 把两个矢量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ 的起点 A 和 A' 終点 B 和 B' 分别联成两个綫段 AA' 及 BB'，如果 $AA'B'B$ 依次組成一个平行四边形，那么我們就說矢量 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$。

在刚体作平行移动时（例如火車在直綫軌道上作等速运动），刚体上各点 $A, B, C, \cdots$ 在同一时間內描画了矢量 $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\cdots$ 这

① 仅有一个例外情形，将在 § 1.9 中指出。

些矢量在定义 1.2.2 的意义下是相等的矢量(图 4)。并且其中任一个都可以用适当的平行移动使它和其中另一个预先指定的矢量相合。在力学中处理这类問題时，把这些矢量当做相同的，并且任意用这些矢量之一来表示刚体的这种运动，甚至可以把它們平移到另一个和它們相等的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的位置来表示刚体的运动。因此，表示刚体的平移时，矢量的起点可以取空間里的任意一点，这样的矢量叫做**自由矢量**。它有这样的一个特征:

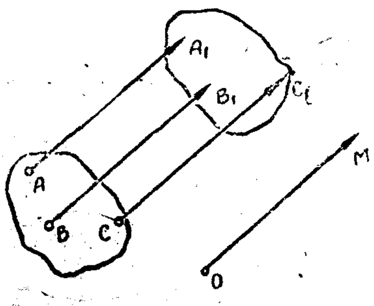


图 4

定义 1.2.3 自由矢量是可以任意作平行移动而仍然代表着和原来同一矢量的矢量。

换句話讲，在自由矢量的意义下，相等的矢量都看作同一的自由矢量。

今后除开特别声明而外所讲的矢量都是指着自由矢量而言。因此，选定某一点 O，便可很合适地把所有矢量都算做从这点出发，在这样的場合，我們就說: **把矢量归結到共同的起点**。

如果两个矢量(不以自由矢量为限)是平行的話(即矢量所在的直綫平行)，我們把它們看做自由矢量归結到共同的起点时，这两个矢量一定在同一条直綫上。同样，我們把平行于同一平面的三个或更多的矢量看做自由矢量，归結到共同的起点时，它們一定在同一平面上，因此我們要介紹共綫矢量和共面矢量的定义。

定义 1.2.4 几个在平行直綫上或同一直綫上的矢量，叫做**共綫矢量**。

定义 1.2.5 三个或三个以上平行于同一平面的矢量，叫做**共面矢量**。

显然，三矢量中若有二矢量是共綫的，这三矢量一定也是共面的。在这里我們再介紹两个共綫矢量有同方向的意义。

定义 1.2.6 如果我們把二个共綫矢量归結到共同的起点(这时两个終点一定和起点在同一直綫上)，而两个終点在起点的同一側时，我們便說这两个矢量是同方向的，如果两个終点在起点的异側，便是反方向的。

必須注意，仅仅两个共綫矢量始有同方向或反方向的可能。

显然，两个相等的矢量就是有同方向且同长度的矢量。如果把两个相等的矢量归結到共同的起点，那么終点也一定相合。

§1.3 矢量加法

在§1.2开始时我們已經提出，位移是一个矢量，譬如要全面地說出一个人走到那里去，一定要說出距离和方向来。例如，向着东方走三十里；向西南方走一里等等。另外，在客观世界里，有許多場合会碰到矢量和矢量結合的事实。例如某甲向东走三十里，然后向北走三十里，这两个位移結合的結果，便等于某甲向东北走了$\sqrt{30^2+30^2}=30\sqrt{2}$里，这是誰都知道的事实。从这些事实我們知道两个矢量，在这一类情况的結合下，还是一个矢量。从方才例子的图解(图5)启发我們在数学上作出矢量加法的定义。

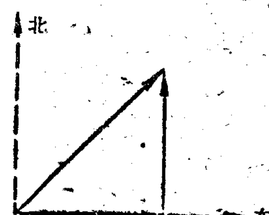


图 5

定义 1.3.1 两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 以下列方法得出一个新矢量时，叫做矢量的加法(图6)。

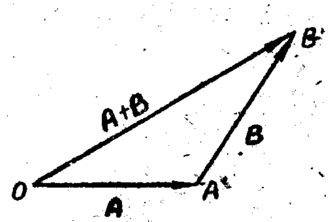


图 6

把矢量作平移，使第二矢量 $\boldsymbol{B}$ 的起点和第一矢量 $\boldsymbol{A}$ 的終点相合，象图6里 $\overrightarrow{OA'}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 一样，那么以第一

矢量 $\overrightarrow{OA'}$ 的起点为起点，以第二矢量 $\overrightarrow{A'B'}$ 的終点为終点，我們得到一个新矢量 $\overrightarrow{OB'}$，它是折綫 $OA'B'$ 的封閉矢量，矢量 $\overrightarrow{OB'}$ 就叫做矢量 $\boldsymbol{A}$ 及矢量 $\boldsymbol{B}$ 的和，記做 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。

定理 1.3.1　把二个矢量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 为邻边組成一个平行四边形 $OACB$，那么对角綫矢量 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$。

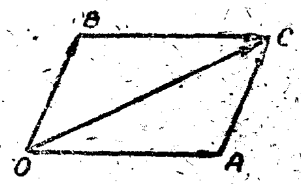


图 7

（証）矢量 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，所以根据加法定义

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$（証毕）

这就是力学里常用的平行四边形求合力的方法。

定理 1.3.2（加法的交换律）

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.$$

（証）把矢量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 归結到同一起点 O，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{A}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{B}$。在图 7 里 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，所以根据加法定义

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}.$$

定理 1.3.3（加法的結合律）

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).$$

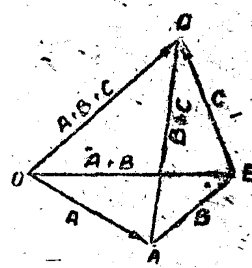


图 8

（証）根据加法定义，在图 8 里，可見

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})=$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}.$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OD}.$$

$$\therefore\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).$$

根据加法的交换律和結合律，我們可以得到有限个矢量求和的規則如下：

把求和的众矢量任意排为第一，第二，…等次序，以第一矢量的起