直尺作图

科学普及出版社

51.23 131

直 尺 作 图

(数学通俗讲話第25册)

〔苏〕 A. C. 斯莫尔茹夫斯基著
王 联 芳 譯
秦 元 勋 校

科 学 普 及 出 版 社
一九六三年·北京

內 容 提 要

这本小册子討論单用一把直尺或同时借用某种輔助图形能解决的一些作图問题。由于这个緣故，本书也研究射影几何的某些基本概念。

本书可供中学高年級学生、师范学院或大学的低年級学生以及中学数学教师参考。

总号：042

直尺作图（数学通俗讲話第25册）

ЛИНЕЙКА В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ

著　者：〔苏〕А. С. 斯莫高尔茄夫斯基
譯　者：王联芳
校　者：秦元勛
出版者：科学普及出版社
（北京市西直門外郝家灣）
北京市書刊出版業營業許可証出字第112號
发行者：新华书
印刷者：五三五工

开　本：787×1092 1/32　　印张：2
1963年11月第1版　　字数：30,000
1963年11月第1次印刷　　印数：9,890

統一书号：13051·022
定　价：0.23元

序

关于直尺和圓規的作图能力問題，也就是关于用这两种古典的几何作图工具在二者并用或单独使用情况下，能解决問題的范圍問題，直到十九世紀才完全研究清楚。在那个时候以前，有一些数学家还认为直尺和圓規是万能的工具，将二者并用，就能順利地解决任何作图問題①。这样的观点在几何学的发展史上起了有害的影响；它导致了一概以直尺、圓規的偏見来求解任何作图上的問題，甚至达到了这样的地步：在許多場合下，竟消耗大量的精力于探索不存在的解法上，其中例如化圓为方問題；三等分角問題；二倍立方問題②。

研究单用一把直尺来完成作图，是由于透視理論的发展和在大区域的地面上作图的需要而引起来的；因为使用开口大的圓規在大区域地面上作图在技术上作不到，可是借用标杆的配置便容易达到作直綫的目的。

本书要介紹的，就是单用一把直尺能解决的最典型的作图問題。值得注意的是，如果在作图的平面上事先画好了一定的輔助图形(例如二平行直綫或二相交圓)，那么，直尺的运用效果就会大为增强。这些情况也是本书所要探討的。

---

① “作图問題”和在“作图上的問題”二术語为同义語。

② 这里通常說的是下列各問題：1)已知一圓的半徑，求作一正方形，使其面积等于該圓的面积，2) 三等分一已知角；3)已知一立方体的一边，求作一新的立方体，使后者的体积为前者的二倍。

第一个和第三个問題不能用尺規解决已被証明。第二个問題用这两种仪器只能解决一些特殊情况下的問題，例如当已知角为直角时。

我們的叙述将遵循綜合几何的方法，即避免应用带有算术和代数性质的方法。全书只有开头的几节与我們希望的叙述簡化这个原則稍有不符。

我們发現，根据綜合几何方法証明定理或解决問題，往往有很优美、很新穎的特点。我們希望讀者在这本小册子中能找出許多足以証实这句話的例子。

請讀者注意§18，这一节証明了单用直尺不可能作两个画好的非同心圓的二圓心，假如这二已知圓沒有公共点的話。大家知道，“不可能性的証明”大多数是数学的难題，并且通常是出自非凡的机智的匠心的。我們想，讀者会对列入証明之一的上述那一节的內容感到兴趣。

目　　次

序 …………………………………………………………………… 1

第一章　綜合几何和射影几何的某些定理 ………………………… 1

§1. 平面上的无穷远元素 ……………………………………… 1

§2. 关于圆的对称 ……………………………………………… 3

§3. 点关于圆的羃。二圆的根軸，三圆的根心 ………………… 6

§4. 直綫束和圆束 ……………………………………………… 9

§5. 重比 ………………………………………………………… 11

§6. 一直綫上四点及一綫束中四直綫的調和配置 ……………… 13

§7. 完全四角形的調和性 ……………………………………… 15

§8. 圆錐曲綫 …………………………………………………… 16

§9. 圆錐曲綫的极性 …………………………………………… 18

§10. 白朗松定理和巴斯加定理 ………………………………… 21

第二章　直尺几何作图 …………………………………………… 25

§11. 某些直綫形的直尺作图 …………………………………… 25

§12. 与圆錐曲綫有关的直尺作图 ……………………………… 27

§13. 已知二平行直綫的直尺作图 ……………………………… 32

§14. 已知一平行四边形或一正方形的直尺作图 ……………… 36

§15. 已知一圆及其圆心的直尺作图 …………………………… 37

§16. 已知一圆的圆心及其一弧的直尺作图 …………………… 43

§17. 屬于一已知圆束中的圆上点的直尺作图 ………………… 45

§18. 关于用直尺作圆心的不可能性 …………………………… 49

§19. 用直尺能作二已知圆的圆心的情况 ……………………… 51

§20. 关于用直尺作多个圆的圆心問題 ………………………… 55

第一章 綜合几何和射影几何的某些定理

§1. 平面上的无穷远元素

以下我們約定，每条直綫（无穷远直綫例外。关于无穷远直綫，我們下面再談）有一个而且仅有一个无穷远点，这个无穷远点也在平行于这条直綫的所有其他直綫上。我們还約定，相交于有限距离的二直綫的无穷远点互不相同。

根据这項約定，我們可以相信，任意二直綫都相交，而且只交于一点；如果二直綫平行，它們的交点将是无穷远点。

其次，我們把一平面上所有的无穷远点的集合叫做无穷远直綫。等一下我們就会相信这个定义的合理性。

我們所以要引进无穷远点和无穷远直綫的概念，是由于本书中所討論問題的性质而决定的。这种概念能使我們避免用一系列的定理来說明一些例外情况的这种复杂性。如果不运用这些概念，說明这些問題的确是很麻煩的。另一方面，这种概念和我們現在要讲的射影程序有直接关系：

假定巳知平面 α，α 上有一点A，α 外有一点P。設直綫PA与不通过点P的平面 β 相交于一点B，点B叫做点A在平面 β 上的**射影**。直綫PA叫做**投射直綫**，点P叫做**射影中心**，β 叫做**射影平面**。仿此，若二直綫和射影中心都在一平面上，也可考察直綫在直綫上的射影。

如果在平面 α 上巳知一图形F，那么，把F上的所有点从中心P投射到平面 β 上来，就得到一图形 Φ，Φ 叫做图形F的射

影。特别的情况，直綫的射影还是直綫。

射影中心P也可以是无穷远点，这时所有的投射直綫互相平行。

射影程序可任意重复多少次。例如，由不在平面β上的中心Q把上述的图形Φ投射到不通过Q的一个平面γ，得到一图形ψ，ψ也叫图形F的射影。如平面α重合于平面γ，则F及其射影ψ就在一个平面上。

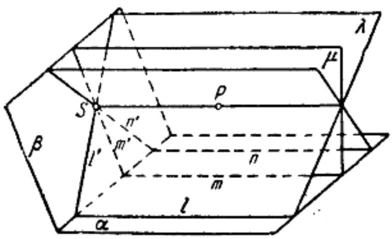

图 1

現在考虑一个特别情况，設在平面α上已知二平行綫$l//m$(图1)。包含l和射影中心P的平面λ，同时也包含直綫l上各点的所有投射直綫。平面λ与平面β的交綫l'是直綫l在β上的射影。同样，包含m和P的平面μ与平面β的交綫m'是直綫m在平面β上的射影。

若是平面α与β不平行而射影中心P在有限的距离，则直綫l'与m'交于一点S，$PS//\alpha$。若是平面α上还給出另一直綫n，n平行于l和m，则n在平面β上的射影n'也通过点S。

我們认为点S是直綫l，m和n的公共无穷远点的射影是自然的。明确些講，我們所以要引进无穷远概念，是因为沒有这个概念，在考虑作为直綫l，m，n的射影l'，m'，n'时，势必要把点S除掉，由于在平面α上它沒有原形。

不难設想，平面α上所有的无穷远点在平面β上的射影的集合是在平面β上通过点S且平行于平面α的直綫。从这里显

而易見，为什么我們要把这里所述的集合列入所謂无旁远直綫之类。

根据上面引进的立論，不难作出，例如象棋盘的射影，如果知道它的边界 ABCD 的射影的話(图 2)。

我們說，在透視画上的直綫，一般地說，是相交的。同样的表現手法也常見于風景画或插图上(参看图 3)。

研究几何图形射影性质的科学，也就是研究几何图形射影不变的性质的科学，叫做射影几何学。本书中将列举一些射影几何的定理。

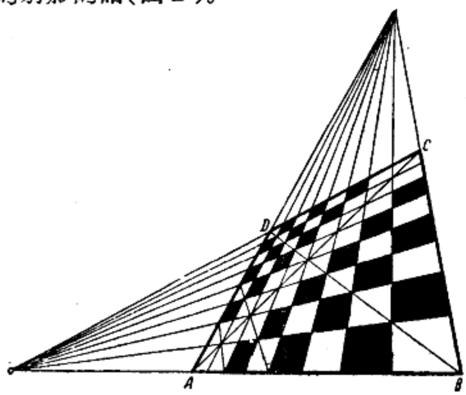

图 2

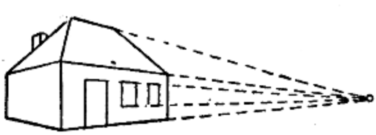

图 3

最后我們指出，我們有时把直綫看成是半徑无旁大的圓，其圓心在此直綫的垂綫上的无旁远点。

§2. 关于圓的对称

在这一节和下两节里，我們討論在我們的叙述里起着輔助作用的关于圓的某些定理。

假定已知圓 $\varkappa$，其半徑为 r，其圓心为 K。假定有与点 K 不同

的另一点 A。在射綫 KA 上选擇一点 A′，使綫段 KA 和 KA′ 的乘积等于圆 $\varkappa$ 半徑的平方：

$$KA \cdot KA' = r^2 \qquad (1)$$

我們約定說，点 A 和 A′ 是关于圓 $\varkappa$ 的对称点。

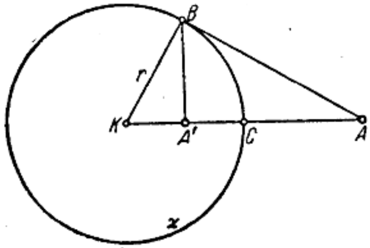

图 4

如果二点 A, A′ 之一在圓 $\varkappa$ 外，則另一必在圓 $\varkappa$ 內，反之也对。例如，从不等式 $KA' < r$ 中，考慮到条件(1)，則得出 $KA > r$。如果点 A 或 A′ 落在圓 $\varkappa$ 上，則 A 和 A′ 将重合。

今考慮图 4，其中的 AB 是圓 $\varkappa$ 的切綫，BA′ 是 KA 的垂綫。因为三角形 KAB 是直角三角形，那么，

$$KA \cdot KA' = KB^2 = r^2,$$

所以 A 和 A′ 关于圓 $\varkappa$ 是对称点。由此自然得到由已知点 A 作点 A′ 的方法，也得到由已知点 A′ 作点 A 的方法。

設綫段 AA′ 交圓 $\varkappa$ 于点 C，并命 $A'C = a$，$CA = b$。則 $KA' = r - a$，$KA = r + b$。由(1)式得

$$(r+b)(r-a) = r^2,$$

因此

$$b - a = \frac{ab}{r}. \qquad (2)$$

若让点 C 和 A 固定，r 无限增大，則在极限的情形下圓 $\varkappa$ 轉变为垂直于 CA 的直綫 CD。这时从(2)式得

$$b = a,$$

因而点 A 和 A′ 的位置是关于直綫 CD 的对称点，这样，在所討論的极限情形下，关于圓的对称一变而为关于直綫的对称①。

定理 1　如果圓 λ 通过关于圓 $\varkappa$ 对称的两点 A 和 A′，則 $\varkappa$ 和 λ 相互直交。

所謂二圓相互直(正)交，是說它們相交于直角，也就是过它們的交点的切綫(也可以說，过二交点的半徑)相互垂直②。

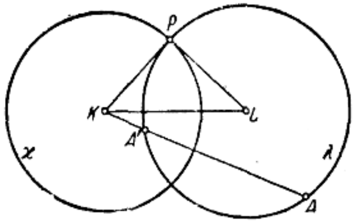

图 5

設 K 和 L 分别是二圓 $\varkappa$ 和 λ 的圓心，P 是二圓交点之一(图 5)。因为 KP 是圓 $\varkappa$ 的半徑，則(1)式可写作：$KA \cdot KA' = KP^2$。应用从圓外一点所作割綫綫段的乘积定理，知 KP 就是圓 λ 的切綫，由此可以断定，已知二圓半徑 KP 和 LP 相互垂直，因而此二圓相互垂直。

定理 2　如果圓 $\varkappa$ 和 λ 相互直交，通过圓 $\varkappa$ 的圓心 K 且与 λ 相交的直綫，交出二交点，則此二交点关于圓 $\varkappa$ 对称。

利用图 5 中的記号，旣然知道圓 $\varkappa$ 和 λ 相互直交，則 KP 应是圓 λ 的切綫。設过 K 的直綫，与 λ 交于点 A 和 A′。則

$$KA \cdot KA' = KP^2.$$

由于綫段 KA 和 KA′ 的乘积等于圓 $\varkappa$ 半徑 KP 的平方，因此点 A 和 A′ 关于圓 $\varkappa$ 对称，幷已由定理得証。

---

① 借此可以說明上述"关于圓的对称"一語的来源。

② 如果二相交圓之一退化为直綫，則此直綫通过第二圓的圓心，这一点容易証明。

§3. 点关于圓的羃。二圓的根軸，三圓的根心

假定已知圓 $\varkappa$,其半徑为 r,圓心为 K。再假定有一点 A,A 与K的距离为 d。数值

$$\sigma=d^2-r^2 \qquad (1)$$

叫做点A关于圓 $\varkappa$ 的羃。

考虑下面三种情形:

1) A在圓 $\varkappa$ 外。如此 $d>r,\sigma>0$。在这种情形下,数值 σ 等于由点A所引圓 $\varkappa$ 的切綫綫段的平方,或者也可以說,等于由圓 $\varkappa$ 外点A所引圓 $\varkappa$ 的二割綫綫段之积(图 6)。

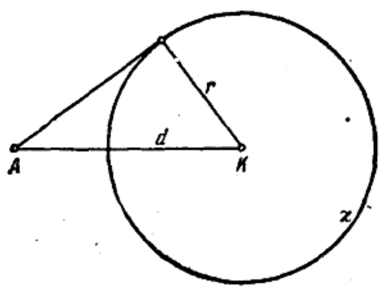

图 6

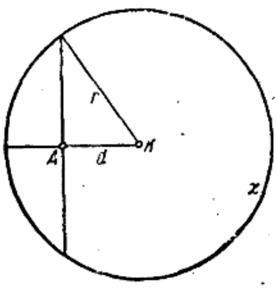

图 7

2) A在圓 $\varkappa$ 上,这时 $d=r,\sigma=0$。

3) A在圓 $\varkappa$ 内,这时 $d<r,\sigma<0$。数值 σ 等于过点A所作圓 $\varkappa$ 的最短弦之半的平方,并取負号;或者也可以說,等于过点A所作的圓 $\varkappa$ 的任意弦被A分成的二綫段之积,取負号(图 7)。

引理 如果从二定点A,B到一点M的距离的平方之差是一常数,則点M的軌迹 τ 是一条垂直于直綫 AB 的直綫。

設直綫 AB 上的一点 N 和这条直綫外的一点M是軌迹 τ 上的两点。綫段 AB 和 AN 之长分别記以 a 和 x。

依照条件，

$$AM^2-BM^2=c, \quad (2)$$

其中 c 是已知常数值，并且

$$x^2-(a-x)^2=c。$$

从最后的等式得

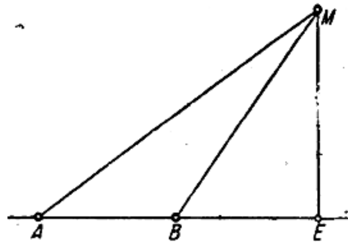

图 8

$$x=\frac{a^2+c}{2a}.$$

由此可以断定，在直綫 AB 上，有且只有一个屬于軌迹 τ 上的点。

作 ME⊥AB(图 8)。則

$$AM^2-AE^2=EM^2=BM^2-BE^2,$$

因此，

$$AM^2-BM^2=AE^2-BE^2,$$

于是由(2)，应有

$$AE^2-BE^2=c.$$

这就意味着，点 E 和 N 必重合在一起。所以 τ 是过点 N 且与直綫 AB 垂直的直綫，而这正是要証明的。

定理 3　关于二已知圓等羃的点的軌迹是一条垂直于二圓連心綫的直綫。

設 r_1 和 r_2 是二已知圓的半徑，d_1 和 d_2 是所求軌迹上的点与二圓心的距离。則从(1)得

$$d_1^2-r_1^2=d_2^2-r_2^2.$$

据此，

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2. \qquad (3)$$

这式的右方是一常数，应用上述引理，即知定理 3 的正确性。

所說的点的軌迹叫做二已知圓的根軸。

二相交圓的根軸通过它們的交点，因为这二交点的每一点关于已知圓的每一圓的羃等于零。

二相切圓的根軸是过切点的公切綫。

如果二圓沒有公共点，那么它們之中的每一圓都不能与根軸有公共点，否则这二圓都要通过这点。

定理 4　圓 μ 和 ν 的根軸（如二圓相交，不算它們的弦）**是直交于 μ 和 ν 的圓的圓心的軌迹。**

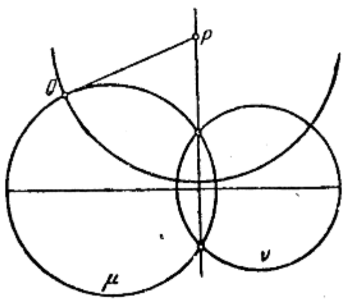

图　9

在圓 μ 和 ν 的外部并在二圓的根軸上取一点 P（图 9）。則从 P 作 μ 和 ν 的諸切綫相等，由于 P 关于已知二圓有等羃。設 PQ 是这些切綫中的一条。显然以 P 为中心以 PQ 为半徑的圓与圓 μ 和 ν 相直交。另一方面，从与 μ 和 ν 相直交的任意圓的圓心 M 所作的二圓的切綫綫段必等于直交圓的半徑，所以点 M 关于 μ 和 ν 的羃相等，因而 M 在已知二圓的根軸上。

如果圓 μ 和 ν 有公共圓心 N，則这二圓的直交圓退化为通过点 N 的直綫。因为直綫的“圓心”是无穷远点（参看 § 1），因此定理 4 使我們有理由可以断言：两个同心圓的根軸应該认为是无穷远直綫。也不难相信，在有限距离处任何一点，不能在二同心圓的根軸上。事实上，就此点而言，等式(3)的左方等于零，但

其右方不等于零。

定理 5　三圓的三对根軸，或者交于一点，即所謂三圓的根心，或者重合在一起。

事实上，二根軸的公共点关于三圓之中的每一圓有相同的冪，因此它也在第三根軸上。特別地，由此推出，若二根軸重合，第三根軸也必同它們重合，即三圓有同一根軸。

如果三圓的圓心在一直綫上，則它們的根軸平行；因此三条根軸或者相交无穷远点，或者重合。

§4.　直綫束和圓束

一平面上通过同一点的直綫的集合叫做**直綫束**，这点叫做**綫束的中心**。显然，通过一平面上的每一点，只要这点不同于束的中心，能作一条且只能作一条属于此束的直綫。

有公共根軸的圓的集合叫做**圓束**，这条根軸叫做**圓束的根軸**。

特別地，与一已知圓同心的圓的集合可做成一个以无穷远直綫为根軸的圓束，同时通过平面上每一点只可作这束中的一个圓（它們的公共中心可看成縮小为一点的圓）。

如果从二非同心圓之一的圓心作二圓根軸的垂綫，則根据定理 3，此直綫将过第二圓的圓心。由此得出結論：圓束中的各圓有相同的連心綫。

从定理 4 可导出，对圓束中二圓直交的圓，对圓束中的每一圓都直交。

二圓 μ 和 ν 永远决定一圓束。今証明，通过平面上任一点 P，但 P 不同于二已知圓上的点，也不同于二圓根軸上的点，必可作这束中的一圓。假定二已知圓非同心，可分为三种情况来看。

1）圓 μ 和 ν 相交于两点 A，B。所求的圓将通过 A,B,P,

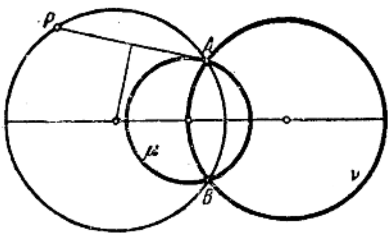

图 10

它的圆心在綫段AB的正中綫[1]上且在圆μ和ν的連心綫上。

在这种情况下的圆束称为**椭圆式的**。所有椭圆式圆束中的圆都通过这束中二圆的交点(图 10)。

2) 圆μ和ν相切于一点C。所求的圆与二已知圆在C相切,它的圆心是綫段CP的正中綫与圆μ和ν的連心綫的交点。

这样的圆束叫做**抛物綫式的**(图 11)。

3) 圆μ和ν沒有公共点。作一与μ和ν直交的圆$\varkappa$，并取一点P',使P'为P的关于圆$\varkappa$的对称点(图12)。所求的圆ξ的圆心是PP'的正中綫与圆μ和ν的連心綫的交点。事实上,由定理1，圆ξ直交于圆$\varkappa$,因此由圆$\varkappa$的圆心K向圆μ,ν和ξ所作的切綫相等。

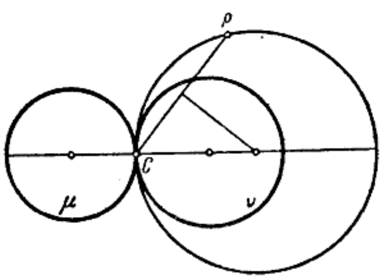

图 11

如点P和P'重合,PP'的正中綫将是从P对圆$\varkappa$的切綫。如P是圆$\varkappa$和圆μ与ν的連心綫的交点,则圆ξ退化为点P。

在上述情况下,圆束叫做**双曲綫式的**。在双曲綫式圆束中,不存在有公共点的圆。

① 自一綫段中点所作的垂綫叫做此綫段的正中綫。

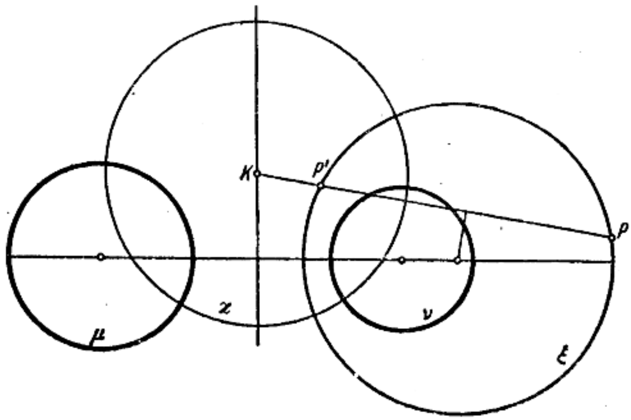

图 12

§5. 重　比

考虑直綫 l 上一綫段 AB 和一点 C，在此直綫外有一点 P (图13)。直綫 PA, PB, PC 分别标以 a, b, c；角 PAB 和 PBA 分别标以 α, β；角 APB 标以(a,b)，等等。

利用正弦定理，得

$$AC = CP\frac{\sin(a,c)}{\sin\alpha},\qquad CB = CP\frac{\sin(c,b)}{\sin\beta}.$$

由此，

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\sin(a,c)}{\sin(c,b)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \tag{1}$$

按(1)式計算比 AC:CB 时，应該考虑到綫段和角的方向：如果二綫段的方向一致，則取相同的符号，如果相反，取相异的符号。对于角也可作相仿的約定。因此，若 C 在 A, B 之間，則 AC:CB>0，若 C 在直綫 AB 上的綫段 AB 之外，則 AC:CB<0。