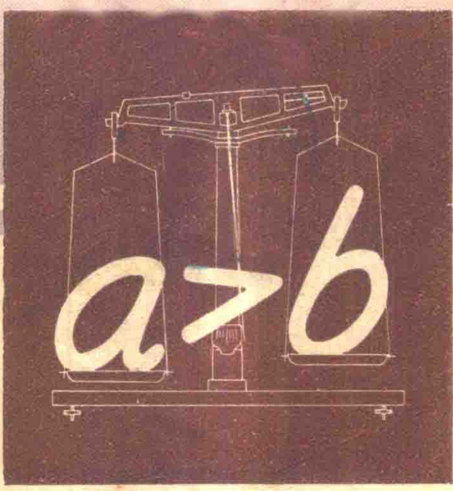
蘇聯青年科學叢書

不等式

科羅夫琴著



中國青年出版社

蘇聯青年科學叢書

不 等 式

中國青年出版社
一九五三年·北京

不　等　式

內容提要　一般高中代數教本裏已經講到'不等式'的基本性質和簡單的解法，本書就從這個基礎上更提高一步。它首先把不等式與級數結合起來，提供了一些重要的不等式，並用它們來解決許多關於極大極小的實際問題以及求收斂級數的極限值問題。它對於高中同學進一步學習高深數學，起了橋梁作用。

原本說明　書　名　НЕРАВЕНСТВА
著　者　П. П. КОРОВКИН
出版者　ТЕХГИЗ
出版地點及日期　МОСКВА, 1951

書號258　數理化23　32開本　33千字　70定價頁

著　者　蘇聯 科 羅 夫 金
譯　者　許　　　　　槑
出版者　中國青年出版社
青年·開明聯合組織
北京西總布胡同甲50號
發行者　中國圖書發行公司
印刷者　北京新華印刷廠分廠

印數 9,501-19,500　一九五二年八月第一版
每冊定價1,900元　一九五三年八月第三次印刷

譯者的話

我國高級中學的代數學教本中，對於不等式大都祇講到一次不等式的基本性質，而舊有流行的參考書籍都偏於解決艱深的、不切實際的難題，如上野清的大代數學講義便是典型的例子．這一類的參考書一方面對於數學成績好的同學容易養成好高騖遠、鑽牛角尖或捨本逐末的習慣；另方面對於數學基礎較差的同學往往造成不良影響，更視數學如畏途，望而卻步．

蘇聯科羅夫琴 (П. П. Коровкин) 同志所著的'不等式'小册子，說理明暢，深入淺出，活潑生動，與受有英美資本主義思想影響的刻板文章式的數學書籍有基本精神上的差異．凡是對於高中代數學學習得較好的同學都能夠看得懂．該書從求一數的'整數部分'講起，首先將不等式與級數結合起來；再一步引進了我們已知道的算術中項、幾何中項(即等差中項、等比中項)等． 從這個大家熟悉的基礎上推論到諸數若干次冪的中項的一般情形，從諸正數的幾何中項小於該諸數的算術中項這一事實，證明了另一個應用更廣的定理：$(1+x)^{\alpha} \geqslant 1+\alpha x$ (這定理的詳情請閱正文)．然後應用這定理解決了許多極大、極小的實際問題，以及求收斂級數極限值問題．書中穿插着許多有趣味的練習題，較難題目的解決方法都給予了

提示，書後並附有練習題的解答. 科羅夫琴同志特別親切的告訴我們：獨立的解決問題比依賴題解要強得多.

這本小册子不僅充實了高中同學所讀不等式、極大、極小與級數的內容，而且對於同學們進一步學習高深的數學起了很好的橋樑作用. 同時給予我國中學程度數學書籍的作者們以很好的啓發與借鏡. 譯者才疏識淺，深感未能傳達原文的精神，尚望國內讀者，尤其是青年同學們，提出寶貴的意見，予以批評指正.

許 琛 一九五一年十一月

原　　序

在中學的數學課程中，同學們學習了不等式的性質及怎樣解簡單的一次和二次不等式的方法.

在這本小册子裏，作者不再講到不等式的重要性質；僅對同學們一方面提供一些重要的不等式，這些不等式在高等數學中都是有用的；另方面利用不等式來計算一些極大值、極小值與極限值的問題.

全書中提供 62 個例題，其中 36 個的重要解決步驟都寫出來了，還有 26 個例題分配在第一、第四及第五節的末尾當作練習；它們的解法附在書末.

同學們自己獨立的去設法解決一些難題，無疑是比解決許多容易的題目能得到更多的益處. 因此，我們建議同學們最好不要先看書後的解答，而自己獨立的去解決這些練習題. 如果能用作者提示的解法以外的其他方法來解這些問題，那就更加可貴了.

П. П. 科羅夫琴

目　　錄

一 求數的整數部分

如果有一數 x，那末不超過 x 的最大整數，叫做 x 的整數部分，通常用 $[x]$ 來表示.

按照上述的定義，$[x]$ 既不超過 x，故 $[x]\leqslant x$；而 $[x]$ 又是小於 x 的最大整數，故必須適合不等式 $[x]+1>x$.

因此，$[x]$ 是一個整數，他適合條件

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

例如，從下列各不等式

$$3<\pi<4,\quad 5<\frac{17}{3}<6,\quad -2<-\sqrt{2}<-1,\quad 5=5<6,$$

可以得到

$$[\pi]=3,\quad \left[\frac{17}{3}\right]=5,\quad [-\sqrt{2}]=-2,\quad [5]=5.$$

〔例 1〕 求 $x=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 的整數部分.

〔解〕 已知

$$1\leqslant 1\leqslant 1,\qquad 0.7<\sqrt{\frac{1}{2}}<0.8,$$

$$0.5<\sqrt{\frac{1}{3}}<0.6,\quad 0.5\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}}\leqslant 0.5,$$

$$0.4<\sqrt{\frac{1}{5}}<0.5$$

(開平方時準確到小數點後第一位，左右兩限值相差 0.1)．上

述諸式左右兩端各相加，可得

$$1+0.7+0.5+0.5+0.4<x<1+0.8+0.6+0.5+0.5,$$

即 $3.1<x<3.4$，故得 $[x]=3$.

〔例 2〕 求

$$y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

的整數部分.

〔解〕 此例與上例不同之處，祇在於項數的增多. 上例祇有 5 項，此例有 1000000 項. 將這一百萬項中每項的兩限值羅列出來，然後再求和，實際上是太繁瑣而辦不到的.

爲了要解這個問題，我們且來研究 n 項的和:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

爲了求此和的整數部分，必須要證明不等式

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}. \qquad (1)$$

因爲 $$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

及 $$\sqrt{n+1}>\sqrt{n},$$

故得 $$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

這證明了 (1) 式左端的不等式；同樣可以證明右端的不等式.

在 (1) 式中順次設 $n=2, 3, 4, \cdots\cdots, n$，便得

$$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2,$$

$$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},$$

$$2\sqrt{5}-2\sqrt{4}<\frac{1}{\sqrt{4}}<2\sqrt{4}-2\sqrt{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

諸式左右兩端各相加，在所得的和上各加 1，便得

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1$$
$$<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \qquad (2)$$

因爲 $2\sqrt{2}<3$，又 $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$，故從 (2) 式得

$$2\sqrt{n}-2$$
$$<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \qquad (3)$$

在 (3) 式中令 $n=1000000$，便得到

$$2\sqrt{1000000}-2$$
$$<y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<2\sqrt{1000000}-1,$$

即
$$1998<y<1999.$$

由此得 $[y]=1998$.

〔例 3〕 證明不等式

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

〔解〕 令 $y=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{100}{101}$.

因爲 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, ……, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$,

故 $x<y$, 而

$$x^2<xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101}.$$

取不等式兩端的平方根，乃得

$$x<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}.$$

練　習　題

1. 證明不等式

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}$$
$$<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}.$$

2. 證明不等式

$$1800<\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<1800.02.$$

3. 求 $[50z]$ 的值，式中

$$z=\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

答 $[50z]=90000$.

4. 用數學歸納法證明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

5. 證明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{12}.$$

二 幾個重要不等式及其應用

本節中將證明一些重要的不等式，利用這些不等式可以解決更多的問題.

從不等式 $(x_1-x_2)^2\geqslant 0$ 得到 $x_1^2+x_2^2\geqslant 2x_1x_2$，等號在 $x_1=x_2$ 時適用，並且僅在 $x_1=x_2$ 時適用.

設 x_1 及 x_2 是兩個正數，以兩者的乘積除上述不等式的兩端，得

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geqslant 2. \tag{4}$$

利用 (4) 式立刻可以證明若二正數的積是 1，則兩者的和必不小於 2.

設 $xy=1$，則 $y=\frac{1}{x}$. 在 (4) 式中，若設 $x_1=x$，$x_2=1$，便有 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，即 $x+y\geqslant 2$.

現在來證明下述的定理：

〔定理 1〕 **若 n 個正數的積是 1，則此 n 數的和必不小於 n.**

這定理的另一種敍述是這樣：若 $x_1x_2x_3\cdots\cdots x_n=1$，則 $x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n\geqslant n$，在 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ 不全相等時，$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n>n$.

〔證〕 用數學歸納法來證明.

對於兩個正數 ($n=2$), 定理 1 已知是眞確的.

設這定理在 $n=k\geqslant 2$ 時仍眞確, 卽當 $x_1x_2x_3\cdots\cdots x_k=1$ 時,

$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k\geqslant k.$$

我們必須證明這定理在 $n=k+1$ 時也眞確, 卽設

$$x_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots x_k\,x_{k+1}=1,$$

而且 $x_1>0, x_2>0, x_3>0, \cdots\cdots, x_k>0, x_{k+1}>0$, 則

$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1}\geqslant k+1.$$

設 $$x_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots x_k\,x_{k+1}=1,$$

則必有兩種可能情形, 卽

(1) 所有的乘數 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_k, x_{k+1}$ 都相等, 卽

$$x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_k=x_{k+1}.$$

(2) 不是所有的乘數都等於 1.

在第一種情形, 所有的乘數都等於 1, 它們的和是 $k+1$, 卽

$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1}=k+1.$$

在第二種情形, 在這個乘積 $x_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots x_k\,x_{k+1}$ 內必定有一個乘數大於 1, 一個乘數小於 1 (若所有的乘數都小於 1, 則其積也必小於 1).

假設這二數是 $x_1<1$, 及 $x_{k+1}>1$, 則乘積可以寫成

$$(x_1\,x_{k+1})x_2\,x_3\cdots\cdots x_k=1.$$

令 $y_1=x_1\,x_{k+1}$, 則得

$$y_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots x_k=1.$$

這是 k 個正數的乘積等於 1，故按假設，它們的和必不小於 k，

$$y_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k\geqslant k.$$

但

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1}\\&=(y_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k)+x_{k+1}-y_1+x_1\\&\geqslant k+x_{k+1}-y_1+x_1=(k+1)+x_{k+1}-y_1+x_1-1.\end{aligned}$$

因爲 $y_1=x_1x_{k+1}$，故得

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1}\\&\geqslant(k+1)+x_{k+1}-x_1x_{k+1}+x_1-1\\&=(k+1)+(x_{k+1}-1)(1-x_1).\end{aligned}$$

因爲 $x_1<1$，但 $x_{k+1}>1$，故 $(x_{k+1}-1)(1-x_1)>0$，由此得

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1}\\&\geqslant(k+1)+(x_{k+1}-1)(1-x_1)>k+1.\end{aligned}$$

到這裏，定理 1 已證明完畢.

〔例 1〕 設 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ 都是正數，證明

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n,$$

等號在 $x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n$ 時適用，並且僅在這時適用.

〔解〕 因爲 $\dfrac{x_1}{x_2}\cdot\dfrac{x_2}{x_3}\cdots\cdots\dfrac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\dfrac{x_n}{x_1}=1,$

故按照定理 1，就能得所要證明的不等式. 這不等式顯然在

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\cdots\cdots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n}{x_1}=1,$$

即在 $x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n$ 時能變爲等式；並且僅在這時才能變爲等式.

〔例 2〕 證明不等式

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2.$$

〔解〕 令

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

因爲等式右端兩項的積等於 1, 故這兩項的和不小於 2. 僅在 $x=0$ 時, 這和才等於 2.

〔例 3〕 設 $a>1$, 證明

$$\log_{10} a+\log_a 10\geqslant 2.$$

〔解〕 因爲 $\log_{10} a\cdot\log_a 10=1$, 故

$$\log_{10} a+\log_a 10=\log_{10} a+\frac{1}{\log_{10} a}\geqslant 2.$$

〔例 4〕 證明不等式

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

〔解〕 用 x^2 除上式左端的分子與分母, 就得

$$\frac{x^2}{1+x^4}=\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}.$$

因 $\frac{1}{x^2}\cdot x^2=1$, 故 $\frac{1}{x^2}+x^2\geqslant 2$, 由是得

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

〔定義〕 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 是 n 個正數, $g=\sqrt[n]{x_1 x_2\cdots\cdots x_n}$ 叫做這 n 個正數的幾何平均數, $a=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}$ 叫做

這 n 個正數的算術平均數.

〔定理 2〕 **許多正數的幾何平均數不大於它們的算術平均數.**

若數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 不全相等時,則它們的幾何平均數小於它們的算術平均數.

〔證〕 從等式 $g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$ 得 $1=\sqrt[n]{\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\cdots\cdots\frac{x_n}{g}}$,

或 $\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\cdots\cdots\frac{x_n}{g}=1$. 因爲 n 個正數的積等於 1,故它們的和不小於 n (定理 1), 於是得 $\frac{x_1}{g}+\frac{x_2}{g}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{g}\geqslant n.$

這不等式的兩端以 g 乘再以 n 除,就得

$$a=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\geqslant g.$$

在 $\frac{x_1}{g}=\frac{x_2}{g}=\cdots\cdots=\frac{x_n}{g}=1$, 卽 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=g$

時,並且僅在這時才能適用等號,成 $a=g$. 如果這 n 個數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 不全相等,則 $a>g.$

〔例 5〕 相交於長方體的一頂點的三稜長度之和爲一定時,哪一種長方體的體積爲最大?

〔解〕 令 $m=a+b+c$ 表相交於一頂點的三稜長度之和, $V=abc$ 表長方體的體積,則

$$\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}=\frac{m}{3},$$

故 $V\leqslant\frac{m^3}{27}$. 等式在 $a=b=c=\frac{m}{3}$ 時,並且僅在這時適用,因此體積最大的長方體是立方體.

〔例 6〕 證明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n\geqslant 2. \tag{5}$$

〔解〕 從定理 2，得

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}$$
$$<\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n}=\frac{(n+1)n}{2n}=\frac{n+1}{2}.$$

上式兩端各取 n 次乘方，便得 (5) 式.

〔定義〕 如果有一數是

$$c_\alpha=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

那末這數叫做是 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 等數的 α **次的冪平均數**. 有幾種特殊的冪平均數，像

$$c_1=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

叫做 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的算術平均數；

$$c_2=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

叫做 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的**平方平均數**；

$$c_{-1}=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

叫做 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的**調和平均數**.

〔例 7〕 證明，若 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 都是正數，又 $\alpha<0<\beta$，則

$$c_\alpha\leqslant g\leqslant c_\beta. \tag{6}$$

這就是說，負指數的冪平均數不大於幾何平均數，正指數的冪