数学复习题解

(二)

——成人高考文理科复习丛书

北京师范学院出版社

成人高考文理科复习丛书

数学复习题解

(二)

成人高考复习丛书编写组编

成人高考文理科复习丛书

数学复习题解

(二)

SHUXUE FUXI TIJIE

成人高考复习丛书编写组编

•

北京师范学院出版社出版

(北京阜外花园村)

北京市新华书店发行　　国防出版社印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：11.875　字数：260千

1986年9月第二版　　1986年9月第一次印刷

印数：1—27,000册

统一书号：7427·056　　定价：2.50元

内 容 简 介

本书系理科复习用书的一部分，它包括反三角函数与三角方程、空间图形、极坐标与参数方程、数列极限，不等式证明、排列、组合、复数等内容。与文科复习大纲要求相同的内容，可使用本社出版的《数学复习题解》（一）。

本书在每一部分内容中，安排有内容提要、例题分析和练习题。内容提要力求简明扼要，系统全面，重点突出；例题分析指出了解题的思路、方法和技巧，并且适合读者自学；练习题分为基本练习题和综合练习题，基本练习题主要是对基础知识进行训练，综合练习题则侧重能力的培养，同时附有提示与答案。

本书还安排了理科总复习，它包括基本练习题和综合练习题两部分。基本练习题有填充题和选择题两种形式，主要是复习本书所列内容的基础知识。在综合练习题中，前三个综合练习主要是将本书所列内容进行综合使用，后三个综合练习是全面复习理科复习大纲要求的全部内容。

本书在最后还附有1986年全国成人高等学校招生统一考试理工农医类数学试题及答案。

本书由乔家瑞、李兰田、任中文编写。北京师范学院数学系胡杞审阅。

前　　言

北京师范学院出版社去年底出版了《成人高考文科复习丛书》，受到读者欢迎。为此，我社决定根据国家教委1987年公布的《全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》，修订再版这套丛书，并将原16开版本改为32开，以方便读者使用。同时，为满足不同科目考生的需要，又补充编写了理科用各分册，成为《成人高考文、理科复习丛书》。丛书共包括政治（文理通用）、语文（文理通用）、数学（一）（文理通用）、数学（二）（理科用）、物理（理科用）、化学（理科用）、历史（文科用）、地理（文科用）八个分册。文科部分五分册，理科部分六分册。

本丛书的特点是内容简练，重点突出，易懂易学。它根据目前成人高校统一招生考试的要求，总结了历年的经验，从成人学习的特点和实际出发，注重基本知识的掌握和能力的培养。既注意知识的系统性，又突出应用知识、解答问题的技能技巧训练。如《历史》、《地理》分册，以历年高考主要题例为主，并增加了今后统一高考的规范化、系列化题例，答案简练明确，便于读者掌握。《语文》、《政治》分册，除思考题、练习题外，每部分还有内容提要。《数学》、《物理》、《化学》等分册的例题分析中，还着重介绍了解题的思路、方法和技巧。

本丛书由北京教育学院、北京师范学院及北京市中学各方有经验的教师编写和审校，因而使质量得到保证。它可供

全国各类成人高校考生自学使用，也可作为成人高考补习班的教材。书中错误和不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

编　者

1986.9.

目　　录

第一章　反三角函数与三角方程

I　反三角函数

一　反三角函数的概念

1　反正弦函数

在代数中我们知道，对应法则只有是一对一的函数 $y=f(x)$才存在反函数。

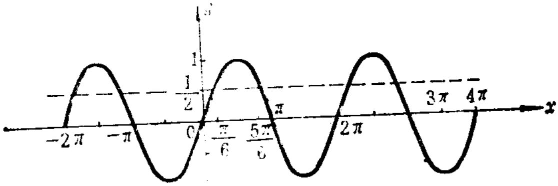
例如，函数$y=x^2$在定义域$(-\infty,\ \infty)$上没有反函数，因为对应法则，"平方"不是一对一的(如±3都和9对应)；当把函数$y=x^2$的定义域限制在$[0,\ \infty)$或$(-\infty,\ 0]$时，用同样的对应法则，"平方"就成了一对一的，这时函数$y=x^2$的反函数是$x=\sqrt{y}$或$x=-\sqrt{y}$.

在三角函数中，我们已经学过正弦函数$y=\sin x$和它的图象（图1—1），对于x的每一个值y都有唯一确定的值和它对应。

例如，对于$x=\frac{\pi}{6}$，有$y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$和它对应；反之，$y$在$[-1,\ 1]$上的每一个值，$x$都有无数多个值与它对应。

例如，对于$y=\frac{1}{2}$，x就有$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，… 等无数多个值和它对应。显然，函数$y=\sin x$在$(-\infty,\ \infty)$上不存在反函数。但是，当我们把定义域限制在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right.$，

$\left.\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 及 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（其中$k\in Z$）时，这里每一个闭区间都是正弦函数的单调区间，在这样的每一个闭区间上，函数$y=\sin x$就存在反函数。



图—1

一般地，为了应用上的方便，通常我们都是在上述那些单调区间中，选择包括所有锐角的那个闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，来定义反正弦函数。

函数$y=\sin x$ $\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的反函数叫做反正弦函数，记作$y=\arcsin x$.

2　反余弦、反正切、反余切函数

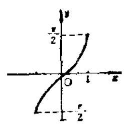
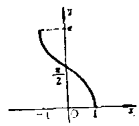
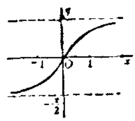
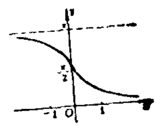
用类似研究反正弦函数的方法，规定如下：

（1）余弦函数$y=\cos x(x\in[0,\ \pi])$的反函数叫做反余弦函数，记做$y=\arccos x$.

（2）正切函数$y=\mathrm{tg}x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$的反函数叫做反正切函数，记做$y=\mathrm{arctg}x$.

（3）余切函数$y=\mathrm{ctg}x(x\in(0,\ \pi))$的反函数叫做反余切函数，记作$y=\mathrm{arcctg}x$.

二 反三角函数的图象和性质

名称	反正弦函数	反余弦函数	反正切函数	反余切函数
函数式	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\mathrm{arctg}\,x$	$y=\mathrm{arcctg}\,x$
定义域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,\ \infty)$	$(-\infty,\ \infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\ \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\ \pi)$
图象				
性质	$\sin(\arcsin x)=x$	$\cos(\arccos x)=x$	$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)=x$	$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,x)=x$
	$\arcsin(-x)=-\arcsin x$	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	$\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}\,x$	$\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}\,x$

特别要注意：

$\arcsin(\sin x)=x$不一定就是正确的，因为x可能不在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内；若$x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内，则$\arcsin(\sin x)=x$是正确的。

如 $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$；

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}\neq\frac{5\pi}{6}.$$

例1 把下列等式写成反正弦函数形式：

(1) $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$； (2) $\sin\frac{\pi}{2}=1$；

(3) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

分析：因为$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{2}$、$-\frac{\pi}{2}$都属于$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以它们都有反函数。

解 (1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$;　　(2) $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$;

(3) $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

例2 求下列各式的值：

(1) $\arcsin\frac{1}{2}$;　　(2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

(3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;　(4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(5) $\operatorname{arctg}(-2)$.

解 (1) 因为在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

所以$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$;

(2) 因为在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$,

所以$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$;

(3) 因为在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$;

(4) 因为在$[0, \pi]$上$\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\pi}{4}$；

(5) 因为在$(-90°, 90°)$上$tg(-63°26')=-2$，

所以$arctg(-2)=-63°26'$，

例3 下面各题 的 解法对吗？为什么？

(1) $\sin(\arcsin\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}$；

(2) $\arcsin(\sin\frac{3\pi}{5})=\frac{3\pi}{5}$；

(3) $\arccos(-x)=-\arccos x$；

(4) $\cos(\arcsin x)=\pm\sqrt{1-x^2}$.

分析：在反三角函数的运算过程中，必须注意定义域和值域。本题正是由于忽略了定义域或者是忽略了值域，因而得出了错误的结论。

解 (1) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$是错误的，由于忽略了$-1\leqslant x\leqslant 1$，本题中$\sin(\arcsin\frac{\pi}{3})$的值不存在；

(2) $\arcsin(\sin\frac{3\pi}{5})=\frac{3\pi}{5}$是错误的，由于忽略了$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，本题的正确解法应当是：

$$\arcsin(\sin\frac{3\pi}{5})=\arcsin(\sin\frac{2\pi}{5})=\frac{2\pi}{5};$$

(3) $\arccos(-x)=-\arccos x$是错误的，本题的正确解法应当是：$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$；

(4) $\cos(\arcsin x)=\pm\sqrt{1-x^2}$是错误的，由于 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，而在此区间内余弦值非负，所以，正确的答案应当是：$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

例4 求下列各式的值：

(1) $\sin(\arcsin\frac{1}{2})$；　(2) $\sin[\arcsin(-\frac{1}{2})]$；

(3) $\cos(\arccos 0.2556)$；(4) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}1)$；

(5) $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{6})$；(6) $\arccos(\cos\frac{11}{6}\pi)$

解 (1) $\because\ x=\frac{1}{2}\in[-1,\ 1]$

$\therefore\ \sin(\arcsin\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$；

(2) $\because\ x=-\frac{1}{2}\in[-1,\ 1]$

$\therefore\ \sin[\arcsin(-\frac{1}{2})]=-\frac{1}{2}$；

(3) $\because\ x=0.2556\in[-1,\ 1]$

$\therefore\ \cos(\arccos 0.2556)=0.2556$；

(4) $\because\ x=1\in(-\infty,\ \infty)$

$\therefore\ \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=1$；

(5) $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{6})=\arcsin(-\frac{1}{2})$

$=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$；

(6) $\arccos(\cos\frac{11}{6}\pi)=\arccos[\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})]$

$=\arccos(\cos\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}$.

从例 4 中可以看出$\sin(\arcsin x)=x$，必须是$x\in[-1, 1]$，然而$\arcsin(\sin x)$不一定等于x，而是等于在区间$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上和$x$有相同的正弦值的一个值。

例5 求下列各式的值：

(1) $\cos(\arcsin\frac{3}{5})$；(2) $\mathrm{tg}(\arccos x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$；

(3) $\sin[2\arcsin(-\frac{3}{5})]$；

(4) $\sin[\arccos(-\frac{2\sqrt{2}}{3})]$；

(5) $\mathrm{tg}(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$.

分析：在解有关求反三角函数值的问题时，一定要把三角函数的定义域和值域先考虑充分，然后再根据有关的性质解题。

解 (1) 令$\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$，那么$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

由$\alpha\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$知，$\cos\alpha\geqslant 0$，于是$\alpha$为第一象限角，

所以$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$，

即 $\cos(\arcsin\frac{3}{5})=\frac{4}{5}$；

(2) 设$\arccos x=\alpha$，那么$\cos\alpha=x$，

由$\alpha\in[0,\ \pi]$，得$\sin\alpha\geqslant 0$，于是当$x>0$时，α在第一象限，当$x<0$时，α在第二象限。所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

即 $\operatorname{tg}(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$；

(3) 设$\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\alpha$，那么$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，

由 $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，得$\cos\alpha\geqslant 0$，于是$\alpha$为第四象限角。

所以$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$。

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25},$$

即 $\sin\left[2\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]=-\dfrac{24}{25}$；

(4) 设$\arccos\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\alpha$，那么$\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

由$\alpha\in[0,\ \pi]$，知$\sin\alpha\geqslant 0$，于是α为第二象限角。所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3},$$

即 $\sin\left[\arccos\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\right.$

(5) 设$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha$，那么$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由 $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$，得$\cos\alpha\geqslant 0$，

$$\therefore\quad \cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3},$$

即 $\quad \operatorname{tg}(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$

说明：上面第（5）题也可以用下面的方法解

$$\operatorname{tg}(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

例6 求$\cos[\arccos\frac{4}{5}+\arccos(-\frac{5}{13})]$的值

解 设$\arccos\frac{4}{5}=\alpha$，那么$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha$是第一象限的角，

设$\arccos(-\frac{5}{13})=\beta$，那么$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta$是第二象限的角。

即 $\alpha\in[0,\ \pi]$和$\beta\in[0,\ \pi]$。则

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-(-\frac{5}{13})^2}=\frac{12}{13},$$

$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{56}{65}.$$

即 $\cos\left(\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)=-\frac{56}{65}.$

例7 在直角$\triangle ABC$中，已知斜边c，一条直角边是a，求用反正弦表示a边所对的锐角A.

分析：根据锐角三角函数的定义易知，$\sin A=\frac{a}{c}$，而本题中a、c所表示的$\frac{a}{c}$并不是特殊的三角函数值．所以角A只能用反正弦表示。

解 根据三角函数定义可知 $\sin A=\frac{a}{c}$，

由于 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$而$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\subset\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

$\therefore\quad A=\arcsin\frac{a}{c}.$

例8 用反正弦表示适合于下面各式的x：

(1) $\sin x=\frac{2}{3}$；　　(2) $\sin x=-\frac{\sqrt{5}}{4}$；

(3) $\sin x=a$，$(|a|<1)$

分析：根据反正弦函数的概念，已知某正弦函数值，可以求其角，但其角并不是唯一确定的，因适合条件的角可以找出无穷多个，为此必须写出通值。

解 (1) 由于$\sin x=\frac{2}{3}$，因此，x可能在Ⅰ或Ⅱ象限。

如果x在第Ⅰ象限，则$x_1=2k\pi+\arcsin\frac{2}{3}$，

如果x在第Ⅱ象限，则$x_2=(2k+1)\pi-\arcsin\frac{2}{3}$；