

5(3)32

873153

0683

塑性力学

严宗达 编著



32

天津大学出版社

塑性力学

严宗达 编著

天津大学出版社

1988.9.

内 容 提 要

本书依据国家教育委员会工程力学专业教材委员会制订的基本要求编写。内容分十一章：绪论，应力状态和应变状态，塑性本构关系，简单桁架的弹塑性分析，梁的弹塑性弯曲，柱体的弹塑性扭转，轴对称问题，理想刚塑性体的平面应变问题，平面应力问题，理想刚塑性体的极限分析，结构的极限分析。各章末附有习题及参考答案。书中收入了三个附录：下标表示法及求和约定，特征线概念，简单加载定理的证明。书末附有参考文献。

本书由国家教育委员会工程力学专业教材委员会推荐出版，可供工程力学专业本科生、非力学专业研究生作为教材使用。也可供有关工程技术人员参考。

塑 性 力 学

严宗达 编著

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092毫米¹/₁₆ 印张：19³/₈ 字数：480千字

1988年8月第一版 1988年8月第一次印刷

印数：1—3000

ISBN 7—5618—0029—7

O·7

定 价：3.25元

序 言

自第二次世界大战以后数十年间,塑性力学得到了迅速发展,逐步成为力学领域的一个重要分支。它已经在结构设计、机械加工、岩土力学等多种工程领域得到广泛应用。塑性力学已成为一门独立的课程,在许多高等院校中作为一些专业本科生或研究生的必修课或选修课开出。本书依据国家教育委员会工程力学专业教材委员会制订的基本要求编写,可供工程力学专业本科生,非力学专业研究生作为教材使用,也可供有关工程技术人员参考。如与其他有关塑性力学的专题教材相配合,也可以作为力学类专业研究生教材。

本书分十一章:绪论,应力状态和应变状态,塑性本构关系,简单桁架的弹塑性分析,梁的弹塑性弯曲,柱体的弹塑性扭转,轴对称问题,理想刚塑性体的平面应变问题,平面应力问题,理想刚塑性体的极限分析,结构的极限分析。书中收入了三个附录:下标表示法及求和约定,特征线概念,简单加载定理的证明。每章末附有习题及参考答案,书后列有参考文献。

由于各校塑性力学课程学时多少很不一致,在本书目录上画有*号的内容可以删去不讲或留给学生自学。

在本书编写过程中,作者力图吸收国内外现有教材的优点,并反映我国学者在塑性力学领域中的工作成果,也包括作者的有关成果。但限于水平,一定还有许多不足之处,作者热忱欢迎广大读者提出宝贵意见。

在本书编写过程中,承兄弟院校及天津大学力学系有关教师提出诸多建议,作者深致谢意。

作 者

1987年7月

目 录

第一章 绪论	(1)
§1.1 弹性与塑性	(1)
§1.2 塑性力学	(1)
§1.3 塑性力学学科的形成与发展	(2)
§1.4 基本试验资料	(3)
§1.5 简化模型	(7)
第二章 应力状态和应变状态	(9)
§2.1 应力状态	(9)
(一)应力张量及其分解, 应力不变量	(9)
(二)几种特定截面上的应力	(12)
(三)三维应力圆, 表示应力状态特征的参数	(15)
§2.2 应变状态	(17)
(一)应变张量及其分解, 应变不变量	(17)
(二)几种特定截面上的应变	(19)
(三)表示应变状态特征的参数	(21)
§2.3 应变率张量及应变增量张量	(21)
(一)应变率张量	(21)
(二)应变增量张量	(22)
§2.4 运动方程及平衡方程	(24)
习题	(24)
第三章 塑性本构关系	(27)
§3.1 概述	(27)
§3.2 屈服条件的一般形式	(28)
§3.3 应力空间与屈服曲面	(28)
§3.4 Tresca屈服条件	(35)
§3.5 Mises屈服条件	(37)
§3.6 Tresca及Mises屈服条件的实验验证	(39)
*§3.7 其他形式的屈服条件	(42)
§3.8 加载曲面和加载准则	(47)
§3.9 简单加载和复杂加载	(48)
§3.10 强化条件	(49)
§3.11 Drucker公设	(56)
§3.12 流动理论 (增量理论)	(58)
§3.13 形变理论 (全量理论)	(69)
§3.14 流动理论与形变理论的关系	(71)

§3.15 Ильющин公设	(77)
习题	(79)
第四章 简单桁架的弹塑性分析	(82)
§4.1 理想弹塑性材料的简单桁架	(82)
§4.2 强化材料的简单桁架	(86)
§4.3 不同加载路径对桁架应力和变形的影响	(88)
习题	(92)
第五章 梁的弹塑性弯曲	(94)
§5.1 纯弯曲	(94)
§5.2 横向弯曲	(101)
§5.3 梁受弹塑性弯曲时的挠度计算	(107)
§5.4 弯曲与拉压的联合作用 (偏心拉压)	(114)
*§5.5 强化材料梁的斜弯曲	(121)
习题	(125)
第六章 柱体的弹塑性扭转	(128)
§6.1 基本方程	(128)
§6.2 圆柱体和圆筒体的弹塑性扭转	(131)
§6.3 任意截面柱体的弹塑性扭转 理想弹塑性材料	(136)
§6.4 任意截面柱体的扭转 强化材料	(146)
习题	(150)
第七章 轴对称问题	(152)
§7.1 基本方程	(152)
§7.2 厚壁圆筒受内压	(155)
§7.3 旋转圆盘	(161)
*§7.4 拉伸试件颈缩部分的应力分析	(168)
习题	(170)
第八章 理想刚塑性体的平面应变问题	(173)
§8.1 基本方程	(173)
§8.2 滑移线	(175)
§8.3 Hencky应力方程	(176)
§8.4 速度场 Geiringer速度方程 速度端图	(179)
§8.5 滑移线的几何性质	(183)
§8.6 两种简单滑移线场	(186)
§8.7 边界条件	(187)
§8.8 基本边值问题及数值算法	(189)
§8.9 应力间断线和速度间断线	(193)
§8.10 单边均匀受压的楔体	(198)
§8.11 刚性平头冲模的压入	(202)
§8.12 圆孔周围的轴对称滑移线场 厚壁圆筒	(205)

§8.13 带切口板条的拉伸	(206)
*§8.14 定常的塑性流动——板条的拉拔	(211)
*§8.15 拟定常塑性流动——楔体的压入	(215)
*§8.16 完全解的条件	(220)
习题	(222)
*第九章 平面应力问题	(224)
§9.1 基本方程	(224)
§9.2 按Mises屈服条件求解	(226)
§9.3 按Tresca屈服条件求解	(234)
§9.4 轴对称平面应力问题	(237)
§9.5 具有圆孔的薄片在均匀内压作用下的弹塑性平衡	(239)
§9.6 具有圆形切口的板条受拉伸	(243)
习题	(245)
第十章 理想刚塑性体的极限分析	(246)
§10.1 基本概念	(246)
§10.2 虚功率原理	(247)
§10.3 下限定理	(249)
§10.4 上限定理	(250)
§10.5 上下限定理的应用	(251)
习题	(259)
第十一章 结构的极限分析	(262)
§11.1 基本概念	(262)
§11.2 超静定梁和刚架极限分析的上下限定理	(263)
§11.3 超静定梁和刚架的极限分析	(265)
§11.4 板极限分析的基本方程	(270)
§11.5 圆板轴对称弯曲时的极限荷载	(275)
§11.6 多边形板的极限荷载	(281)
*§11.7 方板的极限荷载	(284)
*§11.8 结构安定性的基本概念	(286)
习题	(290)
附录 I 下标表示法及求和约定	(293)
附录 II 特征线概念	(296)
附录 III 简单加载定理的证明	(298)
参考文献	(300)

第一章 绪 论

§ 1.1 弹 性 与 塑 性

物体受到外力作用后就产生变形。若外力不大,则在外力除去后变形可以全部恢复,物体仍保持原有的形状和尺寸。这种性质称为材料的弹性,这种可以全部恢复的变形是弹性变形。这时称物体处于弹性状态。将当外力超过一定限度,则物体将产生不可恢复的变形。在物体某些部分内,任意点上的应变将不随应力的消失而恢复。这种变形不可恢复的性质称为塑性,不随应力消失而恢复的那部分变形称为塑性变形。在加载过程中,物体的一部分产生塑性变形时,称该部分已进入塑性状态,同时将该部分称为物体的塑性区,未进入塑性状态的区域则为弹性区。

在生活和工程中产生塑性变形的例子十分普遍。如工艺品中的泥塑就是利用粘土的塑性加工成的。轧钢则是利用钢的塑性将钢坯轧制成各种型钢和钢板。在结构物和机械部件中的凹角、小孔附近或裂纹尖端处,由于应力集中,在不大的外力作用下即常常可产生塑性变形。由于使用目的不同,对待塑性变形有两种态度。一种是希望产生塑性变形以达到加工的目的,如泥塑、轧钢以及金属的各种压力加工。而另一种是在结构物或机械部件中希望尽量不产生或只产生有限度的塑性变形,以保证部件的正常工作和安全使用。不管哪一种情形都需要知道塑性变形产生的规律——它与外力和应力的关系。掌握了这种规律,一方面可以计算出在某一压力加工工艺中需要施加多大的压力,另一方面可以充分利用材料的潜力,避免把物体中任一部位出现的塑性变形作为危险的标志,从而给出虽有局部的塑性变形但又能保证安全适用的合理设计。这些方面的需要促进了塑性力学学科的产生和发展。

§ 1.2 塑 性 力 学

塑性变形具有和弹性变形不同的一些特点。由于塑性变形不可恢复,致使塑性应变和应力之间不再有一一对应的关系。塑性变形不仅与当前的应力状态有关,还和加载的历史有关。例如直接加载至某一应力状态,与加至远超过这一应力状态再卸载至该应力状态,所产生的塑性变形是不同的。此外,进入塑性状态后,应力与应变(或应变率)之间不再保持线性关系,而呈非线性关系。

由于以上特点,在塑性力学中不存在象弹性力学中的广义虎克定律那样简单的应力应变关系。所以塑性力学所要研究的内容就不能象弹性力学那样只研究物体上作用的外力与所产生的应力和变形之间的关系。塑性力学的研究内容应包括: (1) 建立在塑性状态下应力与应变(或应变率)之间的关系。这种关系在简单拉伸时可以直接由实验得出,但在复杂应力状态下却相当复杂,要以大量实验资料为基础作出必要的假设以得到相应的理论。(2) 研究物体受有外力而进入塑性状态后产生的应力和变形,包括研究在加载过程中的每一时刻,物体各点的应力和变形以及确定物体上已进入塑性状态区域的范围(弹性区与塑性区的界限)。有时根据需要还可以绕过加载过程中应力与变形的变化而直接去求物体达到极限状态

(塑性变形无限制发展, 物体已达到它对外力的最大承载能力) 时的荷载, 即极限荷载。这种研究方法通常称为极限分析。

本书以韧性金属材料 (即在破坏前产生较大塑性变形的金属材料, 如低碳钢、铝合金、黄铜等) 为主要研究对象, 其中部分基础理论也可以作为对岩土、钢筋混凝土结构等塑性性质研究的重要基础。

在塑性力学中通常采用和弹性力学中类似的基本假设, 即认为材料是均匀连续的, 在进入塑性状态前为各向同性 (特别说明时除外); 物体承受荷载之前处于没有初应力的自然状态。此外, 在本书中不考虑时间因素对变形的影响 (如弹性后效、蠕变等), 而且只限于考虑在常温下和缓慢变形的情形, 所以也忽略温度和应变速度对材料性质的影响。

塑性力学是材料力学、结构力学、弹性力学各门课程的后继课程。它在力学中属于固体力学的一个分支, 也是连续介质力学或流变力学的重要组成部分。

本书中只包括塑性力学的基本内容, 包括应力分析与应变分析, 塑性本构关系, 简单弹塑性问题, 理想刚塑性的平面应变及平面应力问题以及结构的极限分析等内容, 至于一些更专门的问题如塑性本构关系的进一步研究, 塑性力学中的变分原理, 塑性动力学和塑性稳定等均有另书分专题论述, 本书不再涉及。

§ 1.3 塑性力学学科的形成与发展

对于金属塑性力学的研究始于1864年, 在那一年Tresca公布了若干冲压和挤压的初步实验报告, 并提出了最大剪应力屈服准则。在1870年和1872年St. Venant曾应用这一屈服准则计算了圆柱体受扭转或弯曲而处于部分塑性时的应力和受内压的圆管处于完全塑性时的应力。他还建立了在平面应变问题中联系应力与应变的方程组, 并且认识到在应力和总塑性应变之间没有一一对应的关系, 进而提出最大剪应变率的方向随时都与最大剪应力方向重合的假设。1871年Levy基于St. Venant的概念提出了三维问题中应力与塑性应变率之间的关系, 但在当时没有引起人们的注意。

此后数十年内塑性力学的发展十分缓慢, 基本上处于停滞状态, 直到20世纪初才重新有所发展。Guest通过拉伸和内压联合的薄管实验初步证实了Tresca所提出的最大剪应力屈服条件。1904年和1913年Huber和Mises各自独立地从数学上考虑提出了同样的屈服准则, 这一准则后来被Hencky解释为弹性剪切应变能达到某一临界值时开始屈服。Mises并且独立地提出了类似于Levy的方程。1909年Haar和Von Karman还由变分原理得到了塑性方程。

从上面的过程看, 自19世纪后半叶到20世纪初可以说是塑性力学从萌芽到初创的时期。

从第一次世界大战至第二次世界大战, 即从本世纪10年代至40年代期间塑性力学从理论到应用得到了较多发展, 可以说是塑性力学的奠基时期。

1923年Nadai同时用理论和实验的方法研究了柱体的扭转问题。1920年Prandtl证明了塑性平面应变问题是双曲线型的, 1923年Hencky提出了平面应变问题的一般理论和滑移线场的几何性质, 1930年Geiringer又提出了流动速度沿滑移线变化的方程。此后随着滑移线场理论的完善也不断扩大了应用, 解决金属加工中的许多具体问题。

在这一时期中还进行了许多实验研究, 著名的有1926年Lode的金属薄管在拉伸与内

压联合作用下的实验,证实了Levy—Mises建立的应力应变关系在一级近似下是准确的。1931年Taylor和Quinney的薄壁管拉扭实验更精确地证实了Lode实验结果指出的某些偏离。

1930年Reuss依照Prandtl早些时候提出的论点,建立了考虑弹性应变分量的应力应变关系,1932年和1933年Schmidt和Odquist分别提出了如何把强化效应加到Levy—Mises的方程组中去。这些推进使塑性力学的流动理论达到更为一般化的水平。

与此同时,Hencky于1924年从Haar和Von Karman的变分原理出发得到联系应力与应变的全量理论。1937年Nadai考虑了强化效应,建立了大应变情况下的应力应变关系。1943年Ильюшин提出了考虑强化的微小弹塑性变形理论并提出了简单加载定理和卸载定理,使得全量理论比较完整,便于应用。

这一时期的发展为塑性力学奠定了很好的理论基础并得到了相当广泛的应用,Hill的杰出著作《塑性数学理论》可以作为这一时期工作的很好总结。

从40年代末至60年代初期可以看作是塑性力学渐趋成熟的时期。在这一时期中随着生产的发展,塑性力学无论在理论上还是应用上都得到了更为迅速的发展。

1952年Drucker提出了关于材料强化的重要公设,并从稳定材料的定义出发,讨论了塑性势函数,证明了塑性应变率与屈服曲面的正交性,并提出了相关联的流动法则。1961年Ильюшин又提出在应变空间内的塑性公设,可以同时适用于稳定材料及非稳定材料。

在这一时期,极限分析的上下限定理的应用得到极大的进展。许多金属加工和结构分析中的实际问题得到令人满意的解答。我国钱令希、钟万勰等于1963年提出了极限分析的一般变分原理。

在强化材料本构关系中后继屈服面的数学描述除原有的等向强化模型外,1955年Prager提出的随动强化模型,能更好地反映Bauschinger效应。1949年Batdorf和Budiansky提出以晶粒滑移的物理概念为基础的滑移理论。1958年Naghdi等、1961年Ivey、1964年Mair等均进行了关于后继屈服面的实验验证。

从60年代后期开始可以认为塑性力学进入了进一步发展的新时期。这有两个主要标志:一是本构关系研究的进一步深入;另一个是随着数值计算方法的发展,电子计算机的应用进入塑性力学领域并在不断发展。

本构关系研究的一种趋势是加强了微观与宏观的结合,另外就是用不可逆热力学的观点探讨塑性本构关系。前者如开始于50年代而至今仍不断深入研究的林同骅(T.H.Lin)的滑移理论研究,后者如60年代以来Green、Naghdi等的内变量理论和Valanis的内时理论等。

由于塑性本构关系十分复杂,难以用简单的数学模型来描述,所以许多塑性力学实际问题的解决需要更多地依靠数值分析方法,如有限元法等。当前,数值方法在塑性力学中的应用正方兴未艾,已形成“计算塑性力学”这样的分支。

从目前塑性力学研究工作的迅速发展可以预见,在不太久远的将来它一定会以崭新的面貌在力学领域中呈现异彩。

§ 1.4 基本试验资料

(一) 简单拉伸与压缩试验

(1) 应力应变曲线

图1.1为低碳钢作简单拉伸试验得到的应力应变曲线。由试验中量测到与不同荷载 P 相对应的,试件指定标距内的伸长 Δl ,规定将试件上所受的轴向拉力 P 除以试件原始截面积 A_0 作为纵坐标的应力 σ ,即 $\sigma = \frac{P}{A_0}$ 。同时将伸长量 $\Delta l = l - l_0$ (l_0 为指定标距内的原长, l 为瞬时长)除以原长 l_0 作为横坐标的应变 ϵ ,即 $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$ 。所得 $\sigma - \epsilon$ 曲线实际上就是 $P - \Delta l$ 曲线在比例尺上的改变,二者形状完全相同。

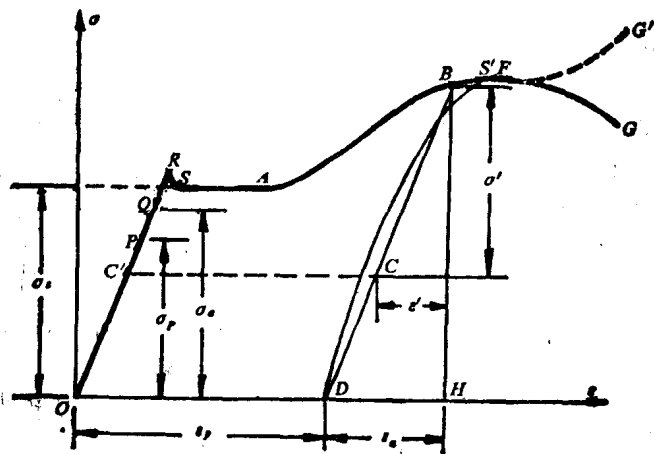


图 1.1

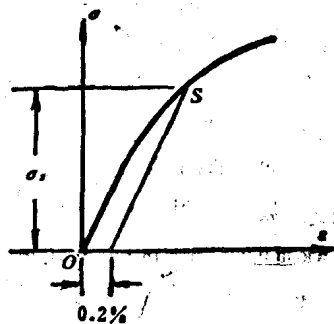


图 1.2

从图1.1的曲线可以看到下列现象:

(a) 在拉伸开始阶段, σ 和 ϵ 成正比关系,直至图中 P 点为止, OP 段为直线。在 OP 段内所产生的变形全部是弹性的,卸载后变形全部恢复。 σ_p 表示 P 点的纵坐标,称为比例极限。

(b) 应力超过比例极限以后,在一个不大的区段 PQ 以内,应力与应变已不再保持正比关系,但变形仍然是弹性的。这一区段的上端 Q 点的纵坐标,称为弹性极限,以 σ_e 表示。由于严格的弹性极限测定上的困难,常常规定以产生某一指定的微小残余应变的应力作为弹性极限。例如可以指定这一微小残余应变为0.01%或0.02%,对应的弹性极限分别以 $\sigma_{0.01}$, $\sigma_{0.02}$ 表示。

(c) 应力超过弹性极限,即进入塑性阶段以后,首先出现屈服现象,即当应力达到 R 点时曲线突然下降,至 S 点后保持一段相当长的几乎是水平的直线 SA 。在 SA 段内应力不再增加,而应变继续增长,这种现象称为屈服现象。对应于 R 点的应力称为上屈服极限,对应于 SA 段的应力称为下屈服极限。由于上屈服极限的值一般不稳定,常随试验条件而不同,下屈服极限的值却几乎不受试验条件的影响,所以一般忽略上屈服极限附近的凸出部分,而把下屈服极限称为屈服极限,以 σ_s 表示。

对于有些金属材料,没有明显的屈服阶段(如图1.2 $\sigma - \epsilon$ 曲线上没有水平段)。为了便于工程实用计算,常规定以产生某一指定的残余应变,例如0.2%时的应力作为屈服极限。

实际上,比例极限 σ_p 和弹性极限 σ_e 在数值上均与屈服极限 σ_s 相差不多,为了简化计算,常常认为三者都有相同的值 σ_s ,这样,可以认为材料在应力到达屈服极限 σ_s 以前是弹性的,而且应力与应变成正比。也就是在 $\sigma \leq \sigma_s$ 阶段,服从虎克定律 $\sigma = E\epsilon$ 。这里 E 是弹性模量,它

也是 $\sigma-\epsilon$ 曲线初始直线段的斜率。

(d) A点以后如欲继续产生变形, 则需继续加载, $\sigma-\epsilon$ 关系如曲线ABF, 这一阶段称为强化阶段。在这一阶段中, 任一点上曲线的斜率 $E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$ 称为强化模量, 其值一般低于弹性模量E。

在进入塑性阶段(即应力 $\sigma \geq \sigma_s$)以后, 设从任一点B处开始卸载, 则 $\sigma-\epsilon$ 曲线为通过B点且与初始直线段OP平行的直线BCD, 当全部应力卸完时即达到横坐标轴上的D点, 原来在B点时整个应变 ϵ 为OH, 卸载后DH段消失, 故DH段即为相应于B点的弹性应变 ϵ_e , 而残余应变OD段, 即为相应于B点的塑性应变 ϵ_p 。故有 $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$ 。同时可以看出, 卸载至任意点C时, 卸掉的应力 σ' 与恢复的应变 ϵ' 之间也应当服从虎克定律, $\sigma' = E\epsilon'$ (见图1.1)。由图1.1也可以看出BD线上的C点与OP线上的C'点具有同样的纵坐标, 也就是说受有同样大小的应力, 而其横坐标, 也就是产生的应变却完全不同。这也说明在塑性力学中应力和应变没有一一对应的关系。所产生的应变, 不仅和所受的应力有关, 而且和加载历史有关。

设从D点再重新加载。 $\sigma-\epsilon$ 曲线几乎完全沿原来的卸载直线DCB上升, 直至非常接近B点处才略有弯曲最后到达BF段上的一点S'(非常接近B点, 也可以近似地认为与B点重合)。这样可以看到, 经过一次塑性变形以后再重新加载的试件, 其弹性段增大了(图中S'点或B点高于S点), 屈服极限提高了(可以认为S'点或B点的纵坐标为重新加载时的屈服极限)。这种现象称为强化现象, 相当于S'点或B点的应力称为后继屈服极限。自S'以后再继续加载时将仍沿原来未经卸载的 $\sigma-\epsilon$ 曲线S'F前进。

(e) 图1.1中 $\sigma-\epsilon$ 曲线至F点后开始下降, 这意味着应力降低而应变仍可继续增长, 直至G点试件破坏。实际上这是由于在F点处试件已开始出现颈缩现象, 试件截面积A与原始截面积 A_0 相差甚大, 仍以 A_0 除P得到的已不是试件的真正应力。以瞬时截面积A去除P才可较真实地反映试件中的应力, 这时 $\bar{\sigma} = \frac{P}{A}$ 称为真应力。图1.1中的虚线FG'即表示在这一阶段真应力与应变之间的关系。

还应该指出, 当颈缩出现后, 在颈缩处实际上将产生三向应力状态, 同时在试件标距范围内的应变也是不均匀的, 即使这一虚线也不能完全真实地反映应力应变之间的关系。这一问题的详细分析可见本书§7-4。

(2) 自然应变

当变形较大时, 以原始标距长去除伸长量也不能完全正确地表示变形的程度。这就需要引入自然应变的概念。设 l_0 为原始长度, l 为瞬时长度, 则自然应变的瞬时增量定义为

$$d\epsilon = \frac{dl}{l}.$$

自然应变为

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right). \quad (1-1)$$

这里的 ϵ 也称为对数应变。容易证明它与工程应变 e (即通常定义的应变)的关系为

$$\epsilon = \ln(1 + e). \quad (1-2)$$

在小变形阶段 ϵ 与 e 几乎相等, 这可将(1-2)式的右侧按幂级数展开得到:

$$\epsilon = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \frac{\epsilon^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\epsilon^n}{n} + \dots \quad (1-3)$$

ϵ 很小时其高次方可以略去。随着应变的增加，两者的差别显著增大。

(3) 压缩试验 Bauschinger效应

为避免失稳现象，压缩试验须在短试件上进行。试验表明，对大多数金属在小变形阶段，压缩试验得到的 $\sigma-\epsilon$ 曲线与拉伸试验的 $\sigma-\epsilon$ 曲线基本一致。所以为了计算方便，就认为两者的弹性模量，屈服极限是相同的，如图1.3 (a) 所示。

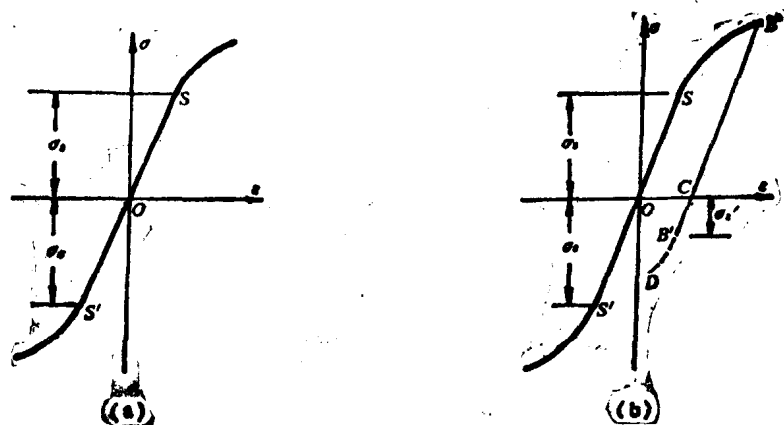


图 1.3

如果材料先受拉进入塑性阶段，例如到达图1.3(b) 中的 B 点，然后减少拉应力（卸载），随后再进行压缩（反向加载），则 $\sigma-\epsilon$ 曲线沿过 B 点与 OS 平行的直线 BC 下行，直至 B' 达到压缩屈服，此后即开始产生反向的（压缩）塑性变形（沿虚线 $B'D$ ）。显然， B' 所代表的压应力绝对值 $\sigma_{s'}$ 要小于未经预先拉伸试件的压缩屈服极限 σ_s (OS' 纵坐标的绝对值)。也就是说，具有强化性质的材料在经过拉伸进入塑性以后再卸载并反向加载时会导致压缩屈服极限的降低，这种现象称为Bauschinger效应。

(二) 静水压力试验

Bridgman通过大量静水压力试验得到下列结果：

(1) 关于体积变化

当各向均匀的压力达到15000大气压时，Bridgman根据试验结果得出压力 p 与单位体积变化的关系为

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{K} p \left(1 - \frac{1}{K_1} p \right) \quad (1-4)$$

式中， V_0 为初始体积； ΔV 为体积改变； θ 为单位体积变化（或称为体积应变）； K 为体积压缩模量； K_1 为派生模量。由试验得出 K_1 的值对铁为 $2.8 \times 10^4 \text{ MPa}$ ，对钢为 $2.7 \times 10^4 \text{ MPa}$ ，对铝为 $3.8 \times 10^4 \text{ MPa}$ ，所以在不太大的压力作用下，(1-4) 式右端括号内 $\frac{p}{K_1}$ 一项与1相比是一个很小的数，完全可以忽略，所以可以认为体积应变与 p 呈线性关系；

$$\theta = \frac{p}{K} \quad (1-5)$$

试验又表明，静水压力撤除后，体积变形基本上可以完全恢复，因而可以认为对一般金属体积应变完全是线性弹性的，静水压力不产生塑性变形。

(2) 对屈服极限的影响

Bridgman通过拉伸试验及附加有静水压力的拉伸试验表明，对一般金属，附加静水力对屈服极限没有明显的影响。因而可以认为静水压力与产生塑性变形无关，它对屈服极限的影响完全可以忽略不计。但对岩土等材料，这种影响较为显著，不能忽略。

§ 1.5 简化模型

在实际工程中应用的金属种类很多，它们的应力应变曲线有着各种不同的形式，为了便于研究，必须抓住它们的一些主要的实质性的特征，建立几种既能比较真实地反映材料的基本特性，又便于计算的简化模型。首先，可以依照有无明显的屈服阶段（图1.1中的水平直线SA）将材料分为理想塑性材料及强化材料两大类：

(一) 理想塑性材料

对有相当长屈服阶段（图1.1中SA水平线有相当长度）的材料可以假设这段水平线一直延伸直至破坏，而忽略后面的强化，这就得到图1.4 (a) 所示的理想弹塑性模型。对于这种模型，材料的应力应变关系为

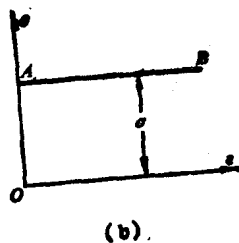
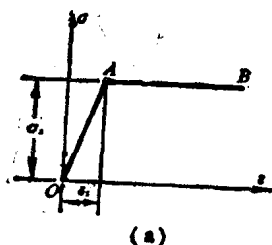


图 1.4

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{当 } |\varepsilon| \leq \varepsilon_s, \\ \sigma_s \operatorname{sgn} \varepsilon, & \text{当 } |\varepsilon| > \varepsilon_s. \end{cases} \quad (1-6)$$

式中 sgn 为符号函数

$$\operatorname{sgn} \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{当 } \varepsilon > 0, \\ -1, & \text{当 } \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (1-7)$$

如果所研究的问题具有比较大的塑性变形，因而弹性变形可以忽略时，即成为图1.4(b)所示的理想刚塑性模型。其应力应变关系为

$$\sigma = \sigma_s \operatorname{sgn} \varepsilon. \quad (1-8)$$

通常把符合这两种模型的材料统称为理想塑性材料。

(二) 强化材料

对没有明显屈服阶段的材料（如图1.2），不能将进入塑性状态以后的应力应变关系用

一条水平线来描述，根据曲线的形状可以采用以下几种模型：

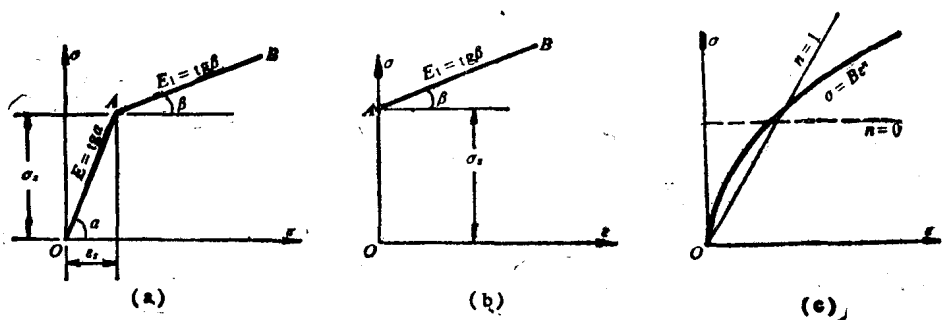


图 1.5

图1.5 (a) 所示为线性强化弹塑性模型，它的应力应变关系为：

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon, & \text{当 } |\epsilon| \leq \epsilon_s, \\ [\sigma_s + E_1(|\epsilon| - \epsilon_s)] \operatorname{sgn} \epsilon, & \text{当 } |\epsilon| > \epsilon_s. \end{cases} \quad (1-9)$$

如果可以忽略弹性变形，即成为图1.5 (b) 所示的线性强化刚塑性模型，其应力应变关系为：

$$\sigma = [\sigma_s + E_1(|\epsilon| - \epsilon_s)] \operatorname{sgn} \epsilon. \quad (1-10)$$

图1.5 (c) 所示为幂强化模型，它的应力应变关系为：

$$\sigma = B|\epsilon|^n \operatorname{sgn} \epsilon. \quad (1-11)$$

它的优点是将弹性变形和塑性变形统一起来表达，可以通过调整指数 n 来适当拟合实际应力应变曲线的形状。一般 $0 \leq n \leq 1$ ，当 $n=1$ 时 (1-11) 式成为直线方程 $\sigma = B\epsilon$ ，即成为弹性的虎克定律（这时的 B 就成为弹性模量 E ）。当 $n=0$ 时，(1-11) 式成为 $\sigma = B \operatorname{sgn} \epsilon$ ，即成为理想刚塑性模型（这时的 B 就成为屈服极限 σ_s ）。这种模型的缺点在于 $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = nB|\epsilon|^{n-1}$ ，当 $n < 1$ 时，原点处的斜率成为无穷大（与竖轴相切），这与实际情况不符。不过用于表示稍大变形时这种模型简单，运算方便。

对于任一种材料都要根据实际情况来决定选取哪种简化模型进行计算。

还有一些其他形式的简化模型，多失之繁复，这里不再一一列举。

第二章 应力状态和应变状态

§ 2.1 应力状态

(一) 应力张量及其分解、应力不变量

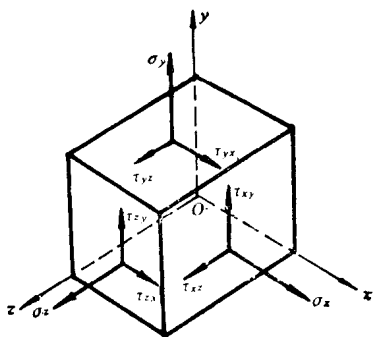


图 2.1

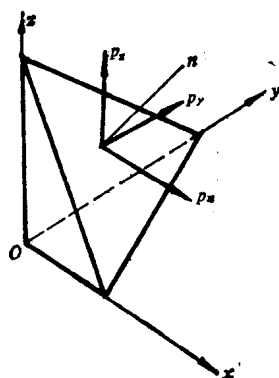


图 2.2

设取直角坐标系 x, y, z (图2.1), 则在物体内部任意点处的应力状态由九个分量决定。图2.1所示为各应力分量的正方向。现以 σ 表示正应力, 以 τ 表示剪应力。由剪应力互等定理知 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, 则独立的应力分量有六个。它们形成一个对称的应力张量

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}_0$$

如果用下标表示法, 则可以简写为 σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$)。在下标表示法中, 令 $x = x_1, y = x_2, z = x_3$, 则应力张量 (2-1) 可表示为*:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_0 \quad (2-1)$$

对比上面两种表示即可知道两者之间的对应关系。

由弹性力学的分析可知, 在物体中每一点上存在三个互相正交的主平面, 在其上只有正应力而没有剪应力, 其上的正应力称为主应力。为了求得主应力的值, 可考虑图2.2所示微元四面体的平衡。图2.2中的微元四面体是由三个坐标面和一个斜面所组成, 斜面的法线设为 n , 并设其方向余弦为 l_x, l_y, l_z , 或者简记为 l_i ($i = 1, 2, 3$)。斜面上的总应力 p 可以分解为沿三个坐标轴的分量 p_x, p_y, p_z 或简记为 p_j ($j = 1, 2, 3$)。若微元四面体斜面的面积为 dF ,

* 可参阅附录 I: 下标表示法及求和约定。

则该微元体三个坐标面的面积应分别为 $l_1 dF$, $l_2 dF$, $l_3 dF$,

故由微元四面体的平衡可得:

$$p_j = \sigma_{ij} l_i. \quad (2-2)$$

斜面上的正应力 σ_n 即为总应力 P 沿法线 n 方向的分量, 它应当等于各分量 p_j 沿 n 方向投影之和:

$$\sigma_n = p_j l_j. \quad (2-3)$$

以 (2-2) 式代入 (2-3) 式得斜截面上正应力公式:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{ij} l_i l_j \\ &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y l_2^2 + \sigma_z l_3^2 + 2\tau_{xy} l_1 l_2 + 2\tau_{yz} l_2 l_3 + 2\tau_{zx} l_1 l_3. \end{aligned} \quad (2-4)$$

斜截面上的剪应力 τ_n 可由下式求出:

$$\tau_n^2 = p^2 - \sigma_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2. \quad (2-5)$$

若此斜截面是一个主平面, 则其上剪应力为零, 总应力 p 即是主应力 σ , 且沿 n 的方向, 故每一 p_j 即应等于 σ 在该方向上的投影:

$$p_j = \sigma l_j. \quad (2-6)$$

将 (2-6) 式代入 (2-2) 式得对于方向余弦的一组齐次线性方程:

$$\sigma_{ij} l_i - \sigma l_j = 0, \quad (2-7)$$

各方向余弦之间有关系:

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = l_i l_i = 1, \quad (2-8)$$

故 l_1, l_2, l_3 不可能同时为零。因而 (2-7) 式中的系数行列式必等于零。即:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (2-9)$$

将 (2-9) 式左方展开, 得到 σ 的三次方程:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (2-10)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= -(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \\ &\quad - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

方程 (2-10) 一定有三个实根, 决定三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的值。显然, 这些根与坐标轴的选择无关。因而方程 (2-10) 的系数 I_1, I_2, I_3 一定也与坐标轴的选择无关。所以它们分别被称为应力张量 (2-1) 式的第一、第二、第三不变量。

以求得的任一个主应力值代入 (2-7) 式可见, 三个方程中只有两个是独立的, 再与 (2-8) 式联立即可解出此主应力所在的主平面方位。同法可得到另外两个主平面的方位。可以证明, 这三个主平面的方位是互相垂直的。

当 x, y, z 轴和三个主轴方向一致时: