新世纪土木工程系列教材

有限单元法基础

王焕定　焦兆平　编　著

高等教育出版社

新世纪土木工程系列教材

有限单元法基础

王焕定　焦兆平　编著

高等教育出版社

内容提要

本书为新世纪土木工程系列教材之一，针对普通高校本科教学的要求编写而成，但考虑到部分重点高校的教学需要，文字教材和配书光盘内也安排了一些可供各类学校选学的内容。

全书分为七章，包括绪论、变形体虚位移原理、杆系结构单元和整体分析、弹性力学平面问题有限元、空间问题与轴对称问题以及弹性板壳有限元分析初步。从教学改革的角度考虑，为进一步改革课程体系和内容，其中杆系结构单元和整体分析是完全按有限单元法的思想、方法来讲解的。但也考虑到如果在结构力学课程中不开设矩阵位移法，使用本教材组织教学也完全可以达到结构力学对这部分内容的基本要求。对于已经开设过矩阵位移法的学校，从更好理解和掌握有限单元法思想的角度，教师可以自行取舍有关内容。

本教材配书光盘既有提供学有余力读者选学的内容，也有供读者结合原理、方法学习参考的教学源程序，还有供读者教学、工程应用都可使用的计算程序。

本书作为土木系列教材之一，尽量考虑了“大土木”的需要，同时可供交通、水利和工程力学专业本科教学使用，也可作为有关工程技术人员学习的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法基础/王焕定，焦兆平编著 .—北京：高等教育出版社，2002.8

ISBN 7-04-010684-1

Ⅰ.有… Ⅱ.①王… ②焦… Ⅲ.有限元法-高等学校-教材 Ⅳ.0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 045421 号

有限单元法基础

王焕定 焦兆平 编著

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京市鑫鑫印刷厂		
开　　本	787×1092 1/16	版　　次	2002 年 8 月第 1 版
印　　张	12.5	印　　次	2002 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	300 000	定　　价	22.90元（含光盘）

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

20世纪80年代以来，我国高等学校纷纷在土木、水利、交通工程和应用理论等专业的本科教育计划中，将有限单元法列为选修课。近20年计算机的飞速发展，20世纪80年代一台286的计算机要买一万元，而今一台奔腾Ⅲ、Ⅳ主频达到1G以上的台式计算机只有几千元钱，这就为计算机的普及提供了物质基础。另一方面，20世纪80年代虽开始有一些工程设计部门用计算机出图，但是普及程度很低。现在无论是单位还是个人，很少用图板出施工图。因此，作为21世纪土木、水利、交通工程等的工程技术人员，只会使用上市的商用软件作设计，根本不懂作为这些计算设计软件核心的有限单元法知识，应该是不能满足21世纪对人才的要求的。基于这样的思想，我们编写了一本集基本理论、原理、方法和程序应用等内容于一书的本科生教材。

本书内容分为七章，包括绪论、变形体虚位移原理、杆系结构单元分析、杆系结构整体分析、弹性力学平面问题有限元、空间问题与轴对称问题以及弹性板壳有限元分析初步。

教育部“高等教育面向21世纪的课程体系、教学内容改革的研究和实践”的研究项目。从课程体系、教学内容改革的角度考虑，结构力学课程中包含有矩阵位移法这一要求用计算机计算的必修内容，虽然这一安排有作为传统位移法的直接延拓，学生易于接受的优点，但是当开设有限单元法课程时，直接从弹性力学平面问题有限元分析入手，有限元精华的分片插值思想学生接受就不那么容易了。加之课程安排上的间隙，部分内容的遗忘，就更不利于更好地掌握有限单元法。为进一步改革课程体系和教学内容，同时考虑不同学校、不同教学计划安排都能使用本教材，从本书包含的各章内容可见，在介绍必要基础知识之后，完全按有限单元法的思想、方法安排了杆系结构单元和整体分析的内容。由于杆系结构本身就是由杆件连接而成的，将结构离散成杆件单元集合体是非常自然的。但是，为了建立单元的特性方程，还必须插值构造位移场，而对杆系单元来说，这种位移场又可用多种已掌握的知识得到。因此，通过简单、易理解的杆系问题来掌握有限单元法基本知识是有利的。但是，考虑到如果读者没有在结构力学课程中学习过矩阵位移法，使用本教材组织教学也必须达到结构力学对这部分内容的基本要求，以便对要报考研究生的读者，在不需要自学矩阵位移法的情况下也能完成矩阵位移法试题。对于已经开设过矩阵位移法的学校，从更好理解和掌握有限单元法思想的角度，是否介绍这部分内容，教师可以自行取舍。

本教材配书光盘既有提供学有余力读者选学的内容，也有供读者结合原理、方法学习参考的教学源程序，还有供读者在学习和工程应用中都可使用的计算程序，集原理、应用和部分扩展知识于一起，应该是便于读者学习的。

本书尽力考虑了面向大多数读者，尽可能深入浅出，力求做到概念清晰，层次分明，以便于学习，便于教学。全部内容都配有供学生用程序分析部分习题和作工程计算的教学程序，读者按一般Windows应用软件进行安装后，即可学会使用。软件也提供了在线帮助和少量例题(注意：在线帮助的内容光盘上都有相应的HTML格式文件，读者用Word for Windows打开阅读要比在软件

帮助和用浏览器观看来的清楚)。读者也可利用它们掌握程序的应用。近20年的教学实践经验表明,只学不练是学不好有限单元法的,阅读程序(最好自行编写或修改程序)、上机应用程序解算问题是十分必要的。

本书由哈尔滨工业大学王焕定教授、广州大学焦兆平教授主编。王焕定负责编写第二章,焦兆平负责编写第一章并提供部分应用程序,其他章节具体分工为:吴庆华:第三、四章;王荣辉第五章前半部分内容和第七章;孙作玉:第六章和第五章后半部分内容及光盘上的选学部分内容。本书由东南大学单建教授主审,单建教授审阅的认真、细致使作者感动,所提出的十分宝贵的意见和建议,对提高本书质量帮助极大,对此我们深表感谢。

本书得到了哈尔滨工业大学土木工程学院和广州大学的大力支持。在此,对两校的领导深表谢意。

限于作者的能力和水平,书中不当之处敬请读者和教师批评指正。

编著者

2001.7

目　录

第1章 绪　论

有限单元法最初作为结构力学位移法的发展，它的基本思路就是将复杂的结构看成由有限个单元仅在结点处联结的整体，首先对每一个单元分析其特性，建立相关物理量之间的相互联系。然后，依据单元之间的联系再将各单元组装成整体，从而获得整体特性方程，应用方程相应的解法，即可完成整个问题的分析。这种先化整为零，再集零为整和化未知为已知的研究方法，是有普遍意义的。

有限单元法作为一种近似的数值分析方法，它借助于矩阵等数学工具，尽管计算工作量很大，但是整个的分析是一致的，有很强的规律性，因此特别适合于编制计算机程序来处理。一般来说，一定前提条件下分析的近似性，随着离散化网格的不断细化，计算精度也随之得到改善。所以，随着计算机硬软件技术的飞速发展，有限单元分析技术得到了越来越多的应用，40年左右的发展几乎涉及了各类科学、工程领域中的问题。从应用的深度和广度来看，有限单元法的研究和应用正继续不断地向前探索和推进。

§1-1　有限单元法的分析过程

土木工程、岩土工程等学科中的弹塑性、粘弹性、粘塑性力学，水利、码头工程等的流体力学和流固耦合作用，交通工程等学科中的层状介质路面力学等都是力学学科的重要分支，其研究结果最终归结为求解数学物理方程边值或初值问题。但遗憾的是，这些学科传统的研究成果只对较为简单、规则的问题才能获得解析解答，大量的实际科学、工程计算问题，由于数学上的困难无法得到解决。

从有限单元法命名至今已经历了40年左右的发展，用有限单元法来解决问题，从理论上讲，无论是简单的一维杆系结构，还是受复杂荷载和不规则边界情况的二维平面、轴对称问题、三维空间块体等问题的静力、动力和稳定性分析，考虑材料具有非线性力学行为和有限变形的分析，温度场、电磁场，流体、液-固体、结构与土壤相互作用等工程复杂问题的分析都可得到满意的解决，而且其基本思路和分析过程是基本相同的。作为本科教材，本书将只介绍应用最广泛的、以结点位移作为基本未知量的“位移型有限元(简称**位移元**)”，讨论范围仅限于最基本的线弹性问题。

一、结构离散化

应用有限元法来分析工程问题的第一步，首先是将结构进行离散化。其过程就是将待分析

的结构(或更数学化一点也可称为求解域)用一些假想的线或面进行切割,使其成为具有选定切割形状的有限个**单元体**(注意单元体和材料力学中的微元体是根本不同的,它的尺度是有限值而不是微量)。这些单元体被认为仅仅在单元的一些指定点处相互连接,这些单元上的点则称为单元的**结点**。这一步的实质也就是用单元的集合体来代替原来待分析的结构。

为了便于理论推导和用计算程序进行分析,一般来说结构离散化的具体步骤是:建立单元和整体坐标系、对单元和结点进行合理的编号,为后续有限元分析准备出所必需的数据化信息。目前市面上有各种类型的有限元分析软件,一般都具有友好的用户图形界面和图形直观输入、输出计算信息的强大功能,使用者应用这些软件越来越方便。即便如此,使用这些大型软件的第一步仍需"建模"工作,即建立离散化模型和准备所需的数据。

二、确定单元位移模式

结构离散化后,接下来的工作就是对结构离散化所得的任一典型单元进行所谓单元特性分析。为此,首先必须对该单元中任意一点的位移分布做出假设,即在单元内用只具有有限自由度的简单位移代替真实位移。对位移元来说,就是将单元中任意一点的位移近似地表示成该单元结点位移的函数,该位移称为单元的**位移模式**或**位移函数**。位移函数的假设合理与否,将直接影响到有限元分析的计算精度、效率和可靠性。目前比较常用的方法是以多项式作为位移模式,这主要是因为多项式的微积分运算比较简单,而且从泰勒级数展开的意义来说,任何光滑函数都可以用无限项的泰勒级数多项式来展开。位移模式的合理选择,是有限单元法的最重要内容之一,所谓创建一种新型的单元,位移模式的确定是其核心内容。本书后续各章将结合具体的单元对其进行较详细的讨论。

不管哪类位移元,采用矩阵符号并建立相应的矩阵方程,单元中任意一点的位移矩阵 $\boldsymbol{d}$,均可用该单元结点位移排列成的矩阵。(称为**单元结点位移矩阵**)$\boldsymbol{\delta}^e$ 来表示:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e \tag{1-1}$$

式中:$\boldsymbol{N}$ 为**形函数矩阵**,其元素是坐标的函数。

三、单元特性分析

确定了单元位移模式后,就可以对单元作如下三个方面的工作:

1. 利用应变和位移之间关系即**几何方程**,将单元中任意一点的应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 用待定的单元结点位移 $\boldsymbol{\delta}^e$ 来表示,即建立如下的矩阵方程:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e \tag{1-2}$$

式中:$\boldsymbol{B}$ 为**变形矩阵**(也可称为**应变矩阵**),一般其元素也是坐标的函数。

2. 利用应力和应变之间关系即**物理方程**,推导出用单元结点位移 $\boldsymbol{\delta}^e$ 表示的单元中任意一点应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的矩阵方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\delta}^e \tag{1-3}$$

式中:$\boldsymbol{D}$ 为由单元材料弹性常数所确定的**弹性矩阵**,$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$ 一般称为**应力矩阵**,它的元素一般也是坐标的函数。

3. 利用虚位移原理或最小势能原理(对其他类型的一些有限元将应用其他对应的变分原理等)建立单元刚度方程

$$\boldsymbol{k}^e\boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{F}^e + \boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^e \tag{1-4}$$

式中:$\boldsymbol{F}^e$ 为**单元结点力矩阵**,它是相邻单元对所讨论单元产生的结点作用力所排列成的矩阵;

$\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^{e}$ 为作用在该单元上的外荷载转换成的、作用于单元结点上的**单元等效荷载矩阵**；$\boldsymbol{k}^{e}$ 由虚位移原理或最小势能原理推导所得，是将单元结点位移和单元结点力、单元等效结点荷载联系起来的联系矩阵，称为**单元刚度矩阵**。本书中不管什么问题的位移元，其计算公式一般均为：

$$\boldsymbol{k}^{e} = \int_{\Omega^{e}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d}\Omega \tag{1-5}$$

在积分式中 Ω^{e} 视所讨论的问题而异，对平面问题是单元的面积，对空间问题则表示单元的体积等。

在上述位移型有限元三个方面的工作中，从编制计算程序用计算机求解角度来说，核心工作是建立单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵。

四、按离散情况集成所有单元的特性，建立表示整个结构结点平衡的方程组

有了单元特性分析的结果，像结构力学中解超静定的位移法一样，对各单元仅在结点相互连接的单元集合体用虚位移原理或最小势能原理进行推导，可以建立起表示整个结构（实质上更确切地说是单元集合体）结点平衡的方程组，即**整体刚度方程**：

$$\boldsymbol{K\Delta} = \boldsymbol{P}_{\mathrm{d}} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{P} \tag{1-6}$$

式中：$\boldsymbol{K}$ 为**整体刚度矩阵**，$\boldsymbol{P}$ 为**整体综合结点荷载矩阵**（它包含**直接结点荷载** $\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}$ 与**等效结点荷载** $\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}$ 两部分），$\boldsymbol{\Delta}$ 为结构**整体结点位移矩阵**。通过所谓**直接刚度法**，可以用**“对号入座”**方式由各单元的单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵集成整体刚度矩阵和整体等效结点荷载矩阵。

该步计算细节取决于所求解的问题和所编制计算机程序的处理方法，对于一些问题将存在**坐标**（局部与整体）**转换问题**，对于一些问题还存在**位移边界条件**的引入，等等，作为绪论概述，这里不再赘述。

五、解方程组和输出计算结果

对本书所讨论的线弹性计算问题，整体刚度方程式（1－6）一般是一组高阶的线性代数方程组。由于**整体刚度矩阵具有带状**、**稀疏和对称**等特性，在有限元发展过程中，人们通过研究，建立了许多不同的存储方式和计算方法，目的是节省计算机的存储空间和提高计算效率。利用相应的计算方法，即可求出全部未知的结点位移。

求出结构全部结点位移后，利用分析过程中已建立的一些关系，即可以进一步计算单元中的应力或内力，并以数表或图形的方式输出计算结果。依据这些结果，就可以进行具体结构的进一步设计[实际上，当前的许多计算机辅助设计软件，已经将有限元分析作为其核心计算分析模块（对使用者这是黑匣子）。由这一计算结果直接进行了结构设计，并达到输出最终施工图的结果]。

§ 1－2　有限元发展概况

从经典结构力学派生的结构矩阵分析方法，早就用于建筑工程的复杂刚架等结构的分析。但这些结构本身都明显地由杆件所组成，杆件的特性可通过经典的位移法分析来建立。虽然矩阵位移法整个分析方法和步骤都与有限单元法相似，也是用矩阵来表达、用计算机来求解，但它与目前广泛应用的有限单元法是有本质区别的。前者只能用以分析具有已知单元结点力—单元结点位移关系的杆系结构，而不能分析非杆系的连续体结构。因为对离散所得的非杆件连续体

单元,无法像矩阵位移法那样用传统方法建立起单元结点力和单元结点位移之间的关系。

有限单元法基本思想的提出,可以追溯到 Courant 在 1943 年的工作,他第一次假设翘曲函数在一个人为划分的三角形单元集合体的每个单元上为简单的线性函数,求得了 St. Venant 扭转问题的近似解。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因也都涉足过有限单元法的概念。但由于当时计算技术的制约,不能用以解决工程实际问题,因而也就没有引起科学及工程界的重视。到了 20 世纪 60 年代以后,随着电子计算机硬软件技术的迅速发展,制约有限单元法发展的条件消除了,从而导致了有限单元法的飞速发展。

现代有限单元法的第一个成功尝试,是 Turner、Clough 等人于 1956 年在分析飞机结构时得到的。他们将矩阵位移法的方法、原理推广应用于弹性力学平面问题,将一个弹性连续体假想地划分为一系列三角形的所谓单元,不像里兹法那样在整个求解域内构造约束所允许的位移试函数,而是以三角形单元三个角顶结点的位移作为优先解决的基本未知量,在满足一定条件下对整个求解域构造分片连续的位移场,这就使原来建立位移场的困难得到了解决。继之又解决了单元结点力和结点位移之间单元特性关系(单元刚度方程),从而用三角形单元求得了平面应力问题的近似解答。他们的这些研究工作开创了利用计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年,Clough 进一步处理了平面弹性问题,并第一次提出了“有限单元法”的名称。

早期的有限单元法是建立在虚位移原理或最小势能原理基础上的,这对人们清楚地理解有限单元法的物理概念是很有帮助的,但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963—1964 年,Besseling、Melosh、Jones、卞学璜等人的研究工作表明,基于各种变分原理可以建立起更为灵活、适应性更强、计算精度更高的有限单元法。这些成果大大刺激了变分原理(包含广义变分原理及其修正广义变分原理等)的研究和发展,先后出现了一系列基于变分原理的新型有限单元模型,诸如各种混合元、杂交元、非协调元、广义协调元等。

许多变分原理都和相应的数学物理方程相对应,但也有一些问题可能建立了数学物理方程和定解条件,但却没有对应的变分泛函。从 20 世纪 60 年代后期开始,人们开始研究加权余量(也称为加权残值、加权残数)法。它是按某种规则建立问题的试函数,根据其对控制方程、边界条件的满足程度,通过建立余量加权意义下的最小来获得问题的数值近似解答。利用加权余量法中的伽辽金(Galerkin)法也可建立由基于变分原理所得到的相应方程,因此被称为加权余量有限元。

从有限单元法提出时起,如何建立更好的单元场变量,从而在相同网格划分下提高计算精度和效率,始终是计算力学工作者的一项研究任务。基于样条函数各种优良特点,人们开始将样条函数引入场变量的建立和数值分析,并进一步建立了样条有限元。

随着所分析问题的大型化、复杂化,除了需要进一步研究各种高精度单元外,考虑到多年来力学研究的成果已经取得部分“精确解”,人们开始利用这些成果将有限元的离散思想和经典解法的解析结果结合起来,以便获得效率、精度更高的方法。研究的结果就产生了一类“半解析”的数值方法,例如有限条法、组合条元法、有限线法、边界单元法等。

四十多年来,有限单元法的应用范围已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题,由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题、波动问题和接触问题。分析的对象从弹性材料扩展到弹塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等问题。由小变形的几何线性问题扩展到各种大变形的几何非线性复杂问题。由单一非线性的问题,发展到包括材料非线性、几何非线性和边界非线性等的

多重非线性问题。从单一介质的分析，发展到多介质相互影响的问题。从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等连续介质力学领域。从确定性分析的有限单元法，发展到了随机有限元分析。从已知系统和激励求解系统响应的“正分析”，发展到了根据响应和系统识别激励，或者根据响应和激励识别系统的“反问题”。在工程分析中的作用，从分析和校核已经扩展到优化设计和智能计算机辅助设计技术相结合的程度。有限单元法不到半个世纪的发展，几乎渗透到了科学、工程的方方面面。可以预计，随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展，有限单元法作为一个具有巩固理论基础和广泛应用的数值分析工具，必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用，其自身也将得到进一步的完善和发展。

有限单元法的应用离不开计算机和有限单元法应用软件，随着有限单元法理论的发展与完善，已经开发出了许多大型的通用有限元程序，例如 ANSYS、NASTRAN、SAP、ADINA、LUSAS 等。它们一般都具有结构的静动力分析、大变形和稳定分析、各种非线性分析，以及热传导、热应力、流体分析和多体耦合等功能，有比较成熟、齐全的单元库，提供了二次开发的接口。利用通用程序，一般的工程问题均可获得解决。因此，在学习本课程的时候，根据所具有的条件，学习和掌握一些已有程序的应用是十分必要的。但是，这些通用程序功能再强大，对于一些正处于研究阶段的内容，往往也是无能为力的。所以，针对某些特定内容开发各种特殊问题的专用软件，或在这些商用软件基础上进行二次开发显然是必要的。按照面向对象的程序设计方法，充分考虑“可重用性”，逐步积累与组成有限单元法分析程序库和可重用“构件”库，对加快工程应用和加快软件开发是很有实际意义的。

随着有限单元法的发展和应用，人们还在不断探索效率更高、更精确、更可靠的新型单元，以解决实际应用中遇到的新问题，并在这一过程中进一步拓展有限单元法的应用领域。

§1－3　学习指导

许多初学有限单元法的读者，都认为有限单元法很难。这主要是由于有限单元法要用到一些弹性力学、矩阵代数等的知识。如果缺乏这方面必要的基本知识，应该说学有限单元法确实是困难的。考虑到对于土木、交通、岩土和水利等工科本科生，矩阵代数都是必修内容，加之本教材所需用到的知识基本上都是矩阵简单运算，所以本教材没有复习或介绍这些内容。但是对于涉及的弹性力学基本知识，本教材没有作为必须具备的预备知识来要求。对于已经学过弹性力学相关内容的读者，自然可以跳过这些弹性力学基本知识。而对于尚未学过的读者，则尽可能简单易懂地介绍了有限单元法所必需的弹性力学基础知识。以往的教学实践也多次证明，只要勤于动脑、勤于动手，掌握这些基本知识是没有问题的。任何一门力学学科前后内容的相关性一般都是很强的，本教材自然也不例外。如果不思考、不复习，不能及时掌握这些弹性力学最基本的知识，那么有限单元法就不只是一般的难了。客观地说，应该是根本无法再学下去的。这是作为学习指导首先要强调的一点。

从第二节所概要介绍的有限单元法分析过程可见，本书所介绍的位移型有限元的关键一步是单元位移模式的建立，本书主要介绍了广义坐标法和试凑法两种，这一建立位移场的思想、方法必须切实理解和掌握。

一旦建立了单元位移场、单元刚度方程的分析方法，不管本书哪类问题都是一样的。所不同

的是，要根据不同问题来求应变、应力和用该问题对应的最小势能原理来推导。这里作为基本要求（有限元程序中所需用到的东西），应该掌握具体问题的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵、$\boldsymbol{D}$ 矩阵如何求得，记住所有问题的单元刚度矩阵都是 $\boldsymbol{k}^e=\int_{\Omega^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega$，体积力的等效结点荷载都是 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^e=\int_{\Omega^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}\mathrm{d}\Omega$（表面力和集中力等可仿此获得）。

获得了单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵后，为了能利用有限单元法解决实际计算问题，还必须很好掌握由单元集成整体的“对号入座”组成规则。

至于线性代数方程组的求解等内容，当然也要了解，能掌握更好。但是初次接触，个人量力而行即可。将方程求解作为黑匣子，只要掌握了上述内容，应该说已经达到了本课程的教学要求，也即可以说已经初步懂得了有限单元法。

有限单元法是一种数值方法，它是解决工程实际问题的一种有力工具，因此除了应该掌握上述所提到的内容外，根据读者各自的条件，掌握和应用程序，用其解算一些工程实际问题，并且从计算结果的分析中获取一些定性的结论，这不仅对巩固所学知识有用，而且也能为将来工作积累经验。

第2章

变形体虚位移原理

在结构力学中已经学过变形体的虚功原理，并利用它推导了位移计算公式、线弹性体的互等定理等。

当变形体虚功原理的前提条件改为：力系给定、虚位移完全任意时，其结论也发生改变：虚功方程恒成立是给定力系平衡的充分必要条件。由于前提、结论都变了，因此这一变化后的原理称为变形体虚位移原理。由变形(线弹性)体虚位移原理作一定的变换(或直接从定义出发)，可导出以能量形式表示的平衡条件，这就是线弹性体最小势能原理。用它们可推得位移法方程、求得受力和变形的近似解(里兹法)。它们也是有限元分析的理论依据。

由于本书仅讨论线性弹性的结构(杆系、平面等问题等)有限元计算问题，因此本章只讨论线弹性变形体的虚位移原理、最小势能原理及其应用。

§2-1 弹性力学的基本方程及其矩阵表示

材料力学解决应力计算问题，是按如下思想进行的。首先在大量宏观试验观察的基础上，作出例如平截面假定等的假设，基于这些假设解决杆件的变形(应变)计算。然后，根据应力与应变之间的关系(胡克定律)，获得应力的变化规律。最后，利用平衡条件获得应力计算公式。

弹性力学也是研究弹性体受力变形的学科，和材料力学的区别主要是除保留均匀、连续、各向同性、小变形假设外，放松了某些从宏观观察做出的人为假定。从变形体中取出的微元体的平衡分析，建立平衡微分方程。从研究变形体中线段和互相垂直两线段间夹角的改变分析，建立应变和位移之间的几何方程。和材料力学一样，利用广义胡克定律，建立应力和应变之间关系的物理方程(也可称为本构关系)。最后，从这些方程出发，在满足给定的变形体边界受力、位移条件的基础上，进行数学求解(称为偏微分方程的边值问题)，获得变形体的受力和变形解答。由于放松了人为假定，因此求解结果当然更符合实际。但如上所述，求解时所用的数学工具(属数学物理方程内容)和解算方法也更复杂。

如上所述，为研究线弹性体的解答，首先需要建立微元体的平衡条件、几何关系、应力-应变关系、边界应满足的条件等，这些方程统称为**弹性力学的基本方程**。为便于理解，下面仅以直角坐标二维问题为例加以说明，而将三维问题作为其推广直接给出结果，建议读者自行验证三维问题方程的正确性。

本书只研究弹性力学有限单元法的基础内容，因此在本节里将只对弹性力学的基本方程作

一概要介绍，为本书所涉及的内容提供必要基础。读者如果想了解和掌握弹性力学更详尽、全面、深入的内容，可自行选学弹性力学课程或自学各种弹性力学参考教材（例如，徐芝纶主编，《弹性力学简明教程》，高等教育出版社）。

需要强调指出的是，在弹性力学中假设所研究的变形物体是连续、均匀和各向同性的（除专门说明的外）。从数学上说，也即体内的位移、应力、应变等都是光滑、连续的函数。

2-1-1 平衡（运动）微分方程

图 2-1 为从二维弹性体中取出的一个面积为 $dA=dxdy$ 的内部微元体，图 2-1a 为在应力连续变化条件下 A、B、C、D 点正应力 σ_x 随点位置（坐标）变化的示意图，设 A 点坐标为 (x,y) 应力为 σ_x，由于 B 点坐标为 $(x,y+dy)$，因此光滑连续的应力 σ_x 在 B 点根据泰勒级数展开（保留一阶微量），如图所示为 $\sigma_x+\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy$。按如此的思想，就不难理解图中 C、D 点正应力 σ_x 的值。对其他应力分量自然存在相似的关系。在图 2-1aAB 边上 σ_x 的合力 T_x 有如下近似（曲线面积近似等于梯形面积）计算

$$T_x\approx\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\right)dy=\sigma_x dy+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy^2$$

基于这一思想，在略去高阶小量后即可得图 2-1b 所示的微元体受力图，因而此图受力从数学上讲是精确的。

图中 $\sigma_{x,x}$，$\tau_{xy,y}$ 等是一种**导数简记法**，即

$$\sigma_{x,x}=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x};\quad \tau_{xy,y}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}$$

本书以后均采用此种表示法，将不再一一说明，希望能逐步适应并很好掌握。

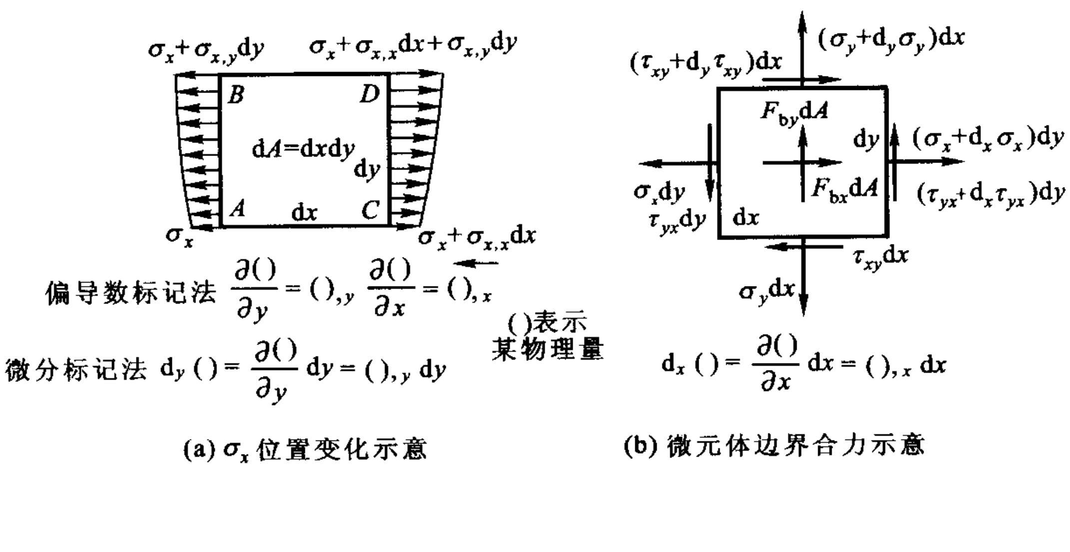

图 2-1 平面微元体受力示意

同理，在假设物体沿坐标的单位体积力密度为 F_{bx}、F_{by} 的条件下，微元体所受坐标方向体积力分量的合力为 $F_{bx}dA$、$F_{by}dA$。

微元体受力如图 2-1b 所示，由 $\sum F_x=0$ 和 $\sum F_y=0$ 方程，即可得二维问题的**平衡微分方程**（equilibrium differential equation）为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+F_{\mathrm{b}x}=0\\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+F_{\mathrm{b}y}=0\end{aligned}\right\}\tag{2-1}$$

再由$\sum M=0$,可得切应力互等的结论,即 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$。

在此基础上,不难得到以下结论:

- 如果微元体不平衡,根据达朗贝尔原理,加上惯性力$\left(\text{例如 } x \text{ 方向为}\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}A\right)$再列(瞬时)动平衡方程,则可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+F_{\mathrm{b}x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+F_{\mathrm{b}y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\tag{2-2}$$

式中ρ为材料的密度,u和v分别为坐标x、y方向的位移分量。这就是二维问题的运动微分方程。由式(2-2)可见,式(2-1)是惯性力为零时的特例。

- 对于三维问题,运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+F_{\mathrm{b}x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+F_{\mathrm{b}y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+F_{\mathrm{b}z}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\tag{2-3}$$

2-1-2　小变形的几何方程(位移-应变关系)

图2-2为二维弹性体中沿坐标方向所取两正交微段及位移示意。与材料力学一样可引入如下线应变定义:

$$\text{某坐标方向线应变}=\frac{\text{微段变形后长}-\text{微段原长}}{\text{微段原长}}$$

按此定义,以图2-2中微段AB(原长$\mathrm{d}x$)为例,在小应变条件下变形后$A'B'$的长度为

$$|A'B'|=\{[x+u+(1+u_{,x})\mathrm{d}x-(x+u)]^2+[y+v+v_{,x}\mathrm{d}x-(y+v)]^2\}^{1/2}$$

略去高阶小量后可得

$$\begin{aligned}|A'B'|&=[(1+u_{,x})^2+v_{,x}^2]^{1/2}\mathrm{d}x\\&=[1+2u_{,x}+(u_{,x})^2+v_{,x}{}^2]^{1/2}\mathrm{d}x\\&\approx(1+u_{,x})\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此可得 $\varepsilon_x=u_{,x}$,同理,不难理解 $\varepsilon_y=v_{,y}$。即

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\tag{2-4a}$$

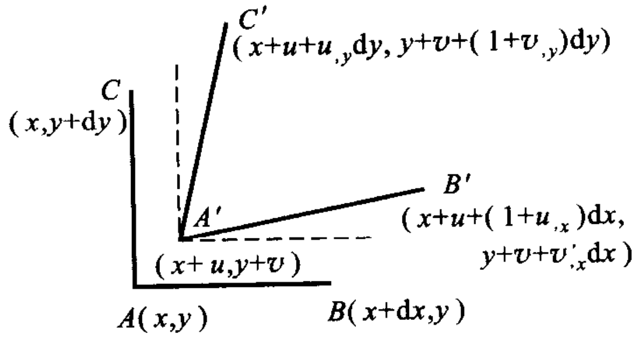

图2-2　微段变形示意图

再定义:

正交微段角度的改变量=切应变