高师函授教材

数学分析

（下册）

吉林人民出版社

高师函授教材

数学分析

下册

东北三省高师函授《数学分析》协编组　编

吉林人民出版社

高师函授教材
数 学 分 析
下册
东北三省高师函授《数学分析》协编组 编
*
吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
浑江市印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本 13印张 285,000字
1984年3月第1版 1984年3月第1次印刷
印数：1—15,540册
统一书号：13091·156 定价：1.35元

目　　录

第十五章　多元函数的极限与连续性

我们已经学完了一元函数的微积分，并能应用这门科学解决一些实际问题．但是应当知道，在生产实践和科学技术中所遇到的函数，往往并不仅仅依赖于一个变量，因为世界上的事情是复杂的，是由各方面的因素决定的．比如自然界的现象通常就与空间及时间都有关系，所以对于这些现象的精确描述，自然要涉及到点的坐标（x，y，z）和时间 t，这就依赖于四个变量 x，y，z，以及 t 了．并且在有一些物理问题中，还需要考虑更多的变量，因此有必要进一步研究多元函数的微积分学．作为研究多元函数微积分的基础，这一章先来介绍多元函数的极限和连续性．

研究多元函数时，我们把着重点放在二元函数上，读者将会看到，当把一元函数中学过的一些概念、理论和方法推广到二元函数时，是会出现某些新的东西；但是如果进一步增加自变量的个数，虽然在手续上将更繁琐一些，可是并不需要什么原则上的新东西了．

§15.1　平面点集

一元函数是在一维空间即在直线上讨论的．回想在研究一元函数的一些重要性质之前，我们曾介绍了直线点集的构造，即有关实数的连续性．而二元函数则是在二维空间即在平面上进行讨论的，因此也需要首先研究一下平面点集的构

造。其内容可分为两部分，一部分是一些基本概念，另一部分则是几个基本定理。

一、基本概念

所谓二维空间R_2(即平面)中的一个点集E，就是平面上满足某个条件P的一切点构成的集合。按照这个说法，点集E则是由条件P所确定的，不同的条件便产生不同的点集。因此常把R_2中由条件P确定的点集E记成

$$\{(x, y); P\}$$

例如以原点为心，以1为半径的圆的内部便是 个点集，可以表成

$$\{(x, y); x^2+y^2<1\}$$

设A和B是R_2中的两个点集，如果凡是A中的点都是B中的点，则称B包含A或说A被B包含（或说A含于B），并用符号$B\supset A$或$A\subset B$来表示。

下面介绍平面点集的一些基本概念。

1°邻域 xy平面上一点$M_0(x_0, y_0)$的邻域是如下定义的。

定义 以点$M_0(x_0, y_0)$为中心，以$\delta>0$为半径的圆的内部点的全体，即满足不等式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的所有点$M(x, y)$的集合，叫做点M_0的δ**邻域**，并称M_0为**邻域中心**，δ为**邻域半径**。

点M_0的δ邻域用符号表示为$N(M_0, \delta)$，或用不等式表示为$|M-M_0|<\delta$。（参考图15—1）

以上定义的邻域，有时特称为**圆形邻域**，通常所说的R_2中的邻域，就是指的这种邻域。除此之外，还有一种方形邻域，有时也用得着，定义如下。

定义 以点$M_0(x_0,\ y_0)$为中心，以$2\delta>0$为边长的正方形的内部点的全体，即满足不等式

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta$$

的所有点，称为M_0的**方形邻域**.（参考图15—2）

很明显，任何圆形邻域都包含着方形邻域，而任何方形邻域也都包含着圆形邻域（图15—3），因此这两种领域是可以通用的（因$\delta>0$不拘大小，只要求它存在）.

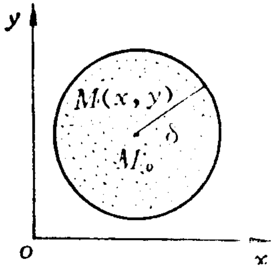

图15—1

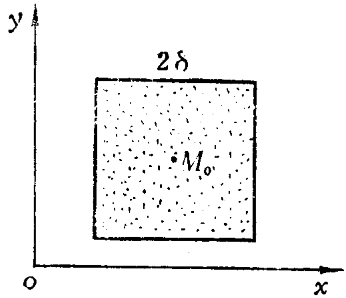

图15—2

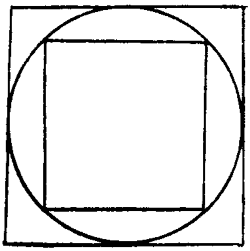

图15—3

2° **内点、外点、界点** 利用点的邻域概念，可以定义点集的内点、外点及界点.

定义 ①设有点集E和属于E的一点M_0，如果存在M_0的一个邻域，此邻域内的点都属于E，则称M_0为点集E的**内点**（图15—4）.

②设有点集E和不属于E的一点M_0，如果存在M_0的一个邻域，此邻域内的点都不属于E，则称M_0为点集E的**外点**（图15—5）.

③设有点集E和一点M_0，M_0可属于E也可以不属于

E。如果 M_0 的任何一个邻域内既有属于 E 的点又有不属于 E 的点，则称 M_0 为点集 E 的**界点**。**点集 E 的界点全体，称为点集 E 的边界**（图15—6）。

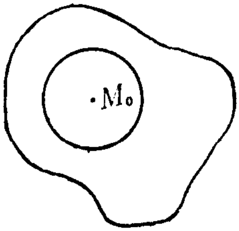

图15—4

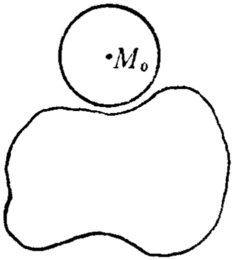

图15—5

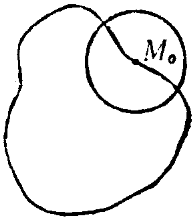

图15—6

例1 设满足不等式 $1<x^2+y^2<4$ 的点的全体为 E（E 是由小圆 $x^2+y^2=1$ 与大圆 $x^2+y^2=4$ 所围成的圆环的内部），则 E 的每一点都是内点（图15—7）。

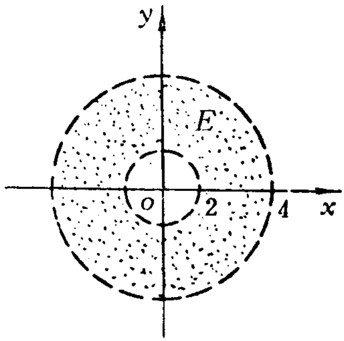

图15—7

满足 $x^2+y^2<1$ 的点及满足 $x^2+y^2>4$ 的点（即在小圆以内大圆以外的点）都是 E 的外点。

E 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$，此边界不属于 E。如果把圆环内部和圆周上的点作为一个集合来考虑，并表以 F，则这两个圆周仍然是集合 F 的边界，不过这个边界就属于 F 了。可见一个点集的边界，可以属于这个集合，也可以不属于这个集合。

例 2 设所有点 $P\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$（$m$，$n$ 是自然数）的集合

是E。显然集合E没有内点，E的所有点都是界点。

3° 开集、区域

定义 如果点集E的所有点都是内点，则称E为**开集**。

例 3 一个正方形内部所有点构成的集合或者一个圆内部的所有点构成的集合，都是开集。属于圆环$1<x^2+y^2\leqslant 4$的所有点的集合，就不是开集了，因为大圆周上的点属于这个集合，而这些点都不是内点。

定义 如果点集D是个开集，并且D内的任意两点都能用包含于D内的折线连结起来，则称D是**开区域**。（图15—8）。开区域D加上D的边界，则称为**闭区域**（图15—9）。开区域和闭区域统称为**区域**。

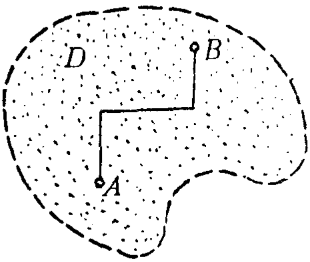

图15—8

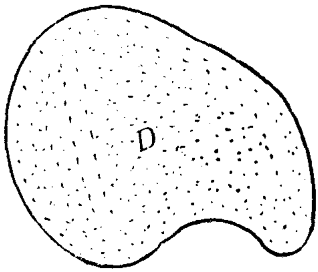

图15—9

由定义可知，区域是具有连通性的，即是说，区域内的任意两点都可以用完全落在该区域之内的折线连结起来。平面上的一条或若干条曲线（曲线可延伸到无穷远）所围成的平面的一部分就是区域，而包围区域的曲线是区域的边界。如果曲线也属于区域，则是闭区域，如果曲线不属于区域，

则是开区域。无论是开区域还是闭区域，用以围成区域的曲线都称为该区域的边界。例如下面的一些图形（图 5—10）都是区域，其中D_1，D_3是闭区域；D_2，D_4是开区域。

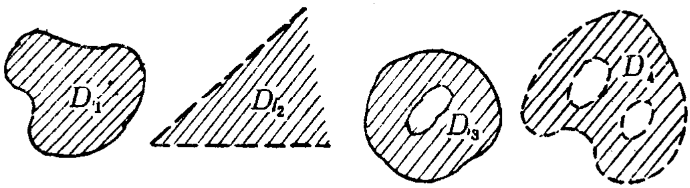

图15—10

由两个不相交的圆的内点所组成的集合虽然是一个开集，但不是一个连通集合，因之也就不是一个开区域（图15—11）。由两个外切圆的内点以及切点所组成的集合，也不是一个开区域，因为切点本身不是这个集合的内点（图15—12）。

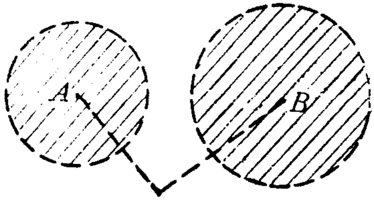

图15—11

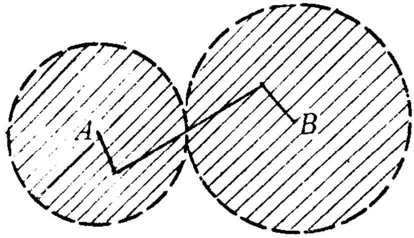

图15—12

定义 如果区域D可以包含在某一个矩形（或圆）之内，则称D为**有界区域**；反之，则称D为**无界区域**。

例如 圆面$x^2+y^2\leqslant 1$（包括圆周在内）是一个有界闭

区域；而圆的外部的点集 $x^2+y^2>1$ 则是无界区域（图15—13）。

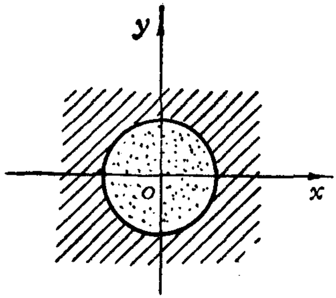

图15—13

关于平面图形的度量要用到区域直径这个概念，定义如下。

定义 有界区域（开或闭）的一切可能的两点之间的距离的上确界，称为该区域的**直径**。

例如 若区域是一个圆，则圆的直径的长度就是这个区域的直径；若区域是个矩形，则矩形的对角线的长度便是这个区域的直径。

二、基本定理 作为刻划直线的连续性的基本定理，我们在第十章介绍了两个定理——闭区间套定理和覆盖定理。在平面的情形，也有两个与前者平行的定理，这就是闭矩形套定理和覆盖定理。这两个定理将用来证明二元连续函数的性质。

定理 1 （闭矩形套定理）如果闭矩形序列

$$D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_n,\ \cdots$$

满足条件：

（1）前一矩形包含后一矩形，即

$$D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_n \supset \cdots$$

（ii）当 $n\to\infty$ 时，矩形 D_n 的直径 $d_n\to 0$，

则必存在唯一的一点，属于所有闭矩形。

证明 设闭矩形 D_n（$n=1,2,\cdots$）在 x 轴上的投影为闭区间 $[a_n,b_n]$（$n=1,2,\cdots$），在 y 轴上的投影为闭区

间 $[C_n, d_n]$ $(n=1, 2, \cdots)$ （图15—14）。显然闭区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$ 构成一个闭区间套，从而存在唯一的一点 α，属于所有闭区间。同样，闭区间序列 $\{C_n, d_n]\}$ 也构成一个闭区间套，存在唯一的一点 β，属于这个区间套的所有闭区间。那么以 α 为横标以 β 为纵标的一点 $P(\alpha, \beta)$，当然就属于所有闭矩形。

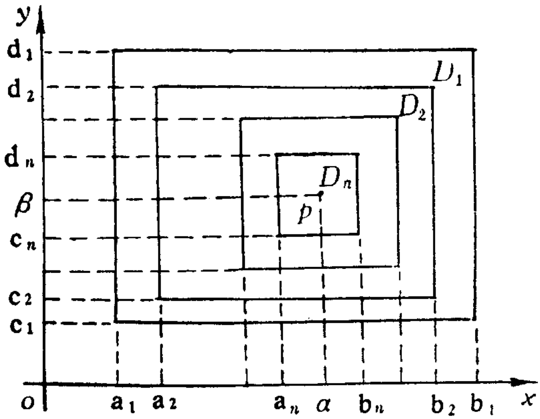

图15—14

并且属于所有闭矩形的 P 点是唯一的。因为如果还存在另外一点 $P'(\alpha', \beta')$ 也属于所有的闭矩形，则点 P 与 P' 的距离 $|P-P'|=d>0$，这就与定理的条件（ii）相矛盾。（证毕）

（注）我们把满足定理条件的闭矩形序列称为闭矩形套.

先介绍开区域集合[①]覆盖闭区域的概念，然后介绍覆盖定理。

定义 如果有界闭区域△的每一点至少属于开区域集合 $\{S\}$（有限个或无穷多个）的一个区域，则说开区域集合

① 开区域的形状可以是圆形，方形，或其他任意的形状.

$\{S\}$覆盖有界闭区域△.

定理 2 （覆盖定理）如果由无穷多个开区域所组成的集合$\{S\}$覆盖有界闭区域△，则必能从$\{S\}$中选出有限个开区域，也能覆盖△.

证明 用反证法. 假定闭区域△不能被开区域集合$\{S\}$中的有限个所覆盖（把这种情况称为△没有有限覆盖）. 因为闭区域△是有界的，所以必存在一个闭矩形D_1包含△，显然这个D_1是没有有限覆盖的. 用直线连结矩形D_1的两双对边的中点，把D_1分成四个相等的矩形，则其中至少有一个闭矩形D_2. 它所含△的部分也没有有限覆盖. 把矩形D_2（若四个小矩形中有几个小矩形都没有有限覆盖，则任选其一）再如上分为四个小矩形，同样，其中至少有一个闭矩形D_3，它所含△的部分也没有有限覆盖. 这样的步骤无限进行下去，显然就得到一个闭矩形套

$$D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_n \supset \cdots$$

其中每一个矩形都含有闭区域△的点，但矩形本身都没有有限覆盖.

根据上面的闭矩形套定理，必存在唯一的一点P属于所有的闭矩形D_n（$n=1, 2, \cdots$），当然点P同时也必属于△. 由于点P属于△，根据定理的条件，在$\{S\}$中至少有一个开区域S'包含点P（参考图15—15），并且点P是S'的内点. 因为当n趋于无穷大时，D_n的直径趋于零，所以当n充分大时，则含有P点的D_n可以完全包含在开区域S'之内. 这样一来，一方

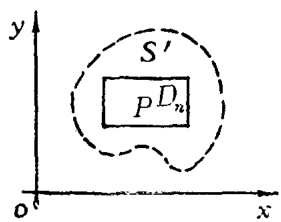

图15—15

面，D_n不能用$\{S\}$中的有限个区域所覆盖；另一方面，D_n却被$\{S\}$中的一个区域S'盖住了．显然这是一种矛盾，于是定理得证．

§15.2 多元函数的一般概念

一、二元函数的定义

我们先考察几个多元函数的例子．

例 1 矩形的面积A是其长x和宽y的函数，即

$$A=xy$$

其中x与y的取值范围是$x>0$，$y>0$．

例 2 气体的体积V与绝对温度T及压力P之间的关系是以克拉配伦公式相联系的：

$$PV=RT$$

其中R是正的常数．如果要考察压力P依赖于体积V和温度T的情形，则引出如下的函数关系

$$P=R\frac{T}{V}$$

V与T的取值范围是$V>0$，$T>0$．

例 3 运动物体的动能W与物体的质量m及速度v有以下关系

$$W=\frac{1}{2}mv^2$$

其中$m>0$，$v>0$．

例 4 三角形的面积与三角形的两边b，c及这两边的夹角A的关系是

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

边及角的取值范围是 $c>0$，$b>0$，$0<A<\pi$。

现在给出二元函数的定义。

定义 设在某一过程中，有三个变量 x，y 和 z，变量 x 和 y 的变域为 D。如果对于 D 中的每一对 x 和 y 的值，按照某一对应关系，变量 z 都有唯一确定的对应值，我们就说变量 z 是变量 x，y 的二元函数，记为

$$z=f(x, y)$$

其中 x 和 y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，D 为**函数定义域**。

（注）对二元函数的概念，应注意以下几点：

（1）和一元函数一样，上述定义包含两个要点：一是对应关系，二是定义域.

（2）定义所规定的仍然是单值函数，自变量和因变量都取实数.

（3）两个自变量 x 与 y 是彼此无关的，即是说，这两个变量在它们的变化范围内可以各自任意取值，构成一对一对的数值组.

点的函数 如同把一元函数称为数轴上的点（也称一维空间的点）的函数一样，对于二元函数 $z=f(x, y)$，由于自变量的一对数值（x，y）对应平面上的一个点 P，所以我们也说 z 是点 P 的函数，并简记为 $z=f(P)$。采用这种术语很有好处：一方面使叙述简单（特别在自变量个数较多的情形），另一方面有直观作用。

下面举几个二元函数的例子，并讨论它们的定义域。

二元函数的定义域，即自变量 x,y 的取值范围，可以是整个 xy 平面，也可以是这个平面的一部分。这是根据问题而定的。

例 5 $z=x^2+y^2$

显然对于 xy 平面上的任意一点（x，y），函数 z 都存在对应值，故函数的定义域是整个 xy 平面。