904353

管理应用数学基础（四）

线性规划

谭荣刚 主编

西南交通大学出版社

管理应用数学基础（四）

线性规划

谭荣刚 主编

西南交通大学出版社

内 容 提 要

本书是《管理应用数学基础》系列教材的第四分册，线性规划部分。全书共六章。第一章，线性规划及其数学模型；第二章，线性规划问题解的性质；第三章，单纯形法；第四章，对偶线性规划问题；第五章，灵敏度分析；第六章，运输模型和分配模型。本书是根据1987年国家经委系统管理干部学院校际数学研究会首届代表大会为成人高校二年制大专制定的数学教学大纲而编写的。本书叙述深入浅出，通俗易懂，说理详尽。每章附有小结且书末附有习题答案。

本书可作成人高校教材，也可供其他高校作教材或教学参考书。

管理应用数学基础（四）

线 性 规 划

XIANXING GUIHUA

谭荣刚 主编

*

西南交通大学出版社出版发行

（四川 峨眉山市）

四川省新华书店经销

西南交通大学出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：6.6875

字数：148 千字 印数：1～8000 册

1989 年 3 月第一版 1989 年 3 月第一次印刷

ISBN 7-81022-051-9/O 011

定价：1.80 元

序　言

《管理应用数学基础》是根据国家教委、国家经委〔1987〕708号《关于经济管理干部学院制订二年制专科教学计划的几点意见》精神，按照1987年7月经委系统管理干部学院校际数学研究会首届代表大会(有来自全国26个省、市70余所院校的83名代表参加）在北京制订的《数学教学大纲》编写的一套系列教材。

全套书共分四册，是按照168～290总学时编写的，具有一定弹性，反映各类成人高校对数学的最低要求和最高要求。其中第一册《微积分》(70～140学时)、第二册《线性代数》(26～40学时)、第三册《概率论与数理统计》(52～74学时)、第四册《线性规划》(20～36学时)。

全套书贯彻教委指示——既坚持专科标准，又体现成人教育的特点。力求深入浅出、通俗易懂，便于自学；每一概念都从实例引入，使用方法条理化，难点内容形象直观；每章附有小结和各种类型的习题并附有答案。此套书适合各类成人院校，包括函大、电大学生使用，也可作为管理、工程技术人员自学之用。

参加本套教材编写的人员：第一册有马兴波（主编)、刘身和、刘维汉、孙富、朱敏超、周峰、周兴模、薄幼培；第二册有董大儒(主编)、孟斌(副主编)、田书京、刘进良、攸玫、陈银英、黄谋义、缪立勤；第三册有刘生锋(主编)、朱少义（副主编)、马安丽、王欣、陈森，陈士彤、武布、

夏登魁、赵广林；第四册有谭荣刚（主编）、王宝才、杨融盛、武汉、张文如、张郁文。

全套书由理事长刘生锋（陕西省工业管理干部学院）、副理事长董大儒（铁道部太原运输管理干部学院）任总主编；孟誠（上海经济管理干部学院）、谭荣刚（北京水利电力管理干部学院）、马兴波（四川省经济管理干部学院）、朱少义（黑龙江省工交管理干部学院）参加审稿工作。

由于我国幅员辽阔，成人高校尤其是管理干部院校成立时间不长，尽管有些人编写了一些教材，但由于缺乏统一大纲为指导，无法系统地进行总结和研究，要编写一套各类成人高校都适用的教材，有很多困难。加之学会刚刚成立，经验不足、时间紧迫，书中定有许多缺点和错误，故这套书只能作为试用教材。恳请各兄弟院校教师和读者，在试用过程中提出宝贵意见，以便再版时进行修改和补充，尽量能使这套教材适合我国成人教育的要求。

国家经委系统管理干部学院

校际数学研究委员会

目　录

绪　论

当我们在一定客观条件下接受一项任务后，我们当然希望经我们一番统筹安排，能用最小的代价去完成这项任务。另一方面，在一定的人力、物力的条件下，如何才能完成更多的任务呢？对于这两个问题，都归结为同一数学问题，即在一定约束条件下求某目标函数的极值问题，这个问题属于数学规划研究的内容。对于这个问题的研究显然具有极其重要的现实意义。数学规划方法一经在生产上应用，往往带来成千上万的经济效益。线性规划是数学规划的一个重要分支。它的理论既简单又成熟。它的方法既完整而又易于掌握。它的应用极为广泛。因此，掌握线性规划的理论和方法，并用它来为我们的“四化”建设服务就成为搞经济管理的同志的一件极为重要的事情了。

数学规划是运筹学的一个分支。前面已提到数学规划研究的对象是极值问题。在实际问题中遇到的极值问题，其变量数目往往很大，用微积分中提供的解极值问题的方法去求解往往不可能求得答案。数学规划所用的方法是数学迭代法，它具有简单逻辑结构，便于在计算机上实现。即数学规划的方法是以计算机为必不可少的计算工具。因此，数学规划的发展是以计算机的发展为前提条件的，

线性规划所研究的到底是哪样一类极值问题呢？我们看如下的例子。

例 某工厂生产甲、乙、丙三种产品。三种产品均以 A、B 两种材料为原料。现已知生产每单位甲种产品需 A、B 两种原料分别为 4 kg 和 3 kg，生产每单位乙种产品需 A、B 两种原料分别为 2 kg 和 4kg，生产每单位丙种产品需 A、B 两种原料分别为 2 kg 和 1 kg。每生产甲、乙、丙一单位产品可分别获利 8 元、6 元、4 元。而工厂有 A、B 两种材料分别为 4 500 kg 和 3 000 kg。试问工厂应生产甲、乙、丙三种产品各多少，使工厂获利最多？

解 为了简单明了起见，常将已知数据列成表格形式

单位产品所需原料 ＼ 产品 / 原料	甲	乙	丙	现有原料量 (kg)
A	4	2	2	4 500
B	3	4	1	3 000
单位产品利润（元）	8	6	4	

设 x_i $(i=1, 2, 3)$ 分别为生产甲、乙、丙三种产品的数量（称 x_i 为决策变量），则由题意，所给问题实际是：

求一组变量 x_1，x_2，x_3 的值使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} 4x_1+2x_2+2x_3\leqslant 4\,500 & \text{（A 种原料的消耗量不能超过其现有量）} \\ 3x_1+4x_2+\ \ x_3\leqslant 3\,000 & \text{（B 种原料的消耗量不能超过其现有量）} \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 & \text{（产品产量不能为负）} \end{cases}$$

并使目标函数 $S=8x_1+6x_2+4x_3$ 的值（利润）最大。

此问题一般简记为

求 $\max S=8x_1+6x_2+4x_3$

$$满足\begin{cases}4x_1+2x_2+2x_3\leqslant 4\,500\\ 3x_1+4x_2+\ x_3\leqslant 3\,000\\ x_1,\quad x_2,\quad x_3\geqslant 0\end{cases}$$

（这里，"max" 的意思是"求……的最大值"）

我们称它为线性规划问题的数学模型。线性规划是研究这样一类极值问题，它的目标函数和约束条件都是决策变量的线性函数。

线性规划所要解决的问题主要有两个：

1. 如何由实际问题建立数学模型；

2. 解数学模型，求出既满足约束条件并使目标函数最优的决策变量。

本书介绍线性规划的基本内容。具有线性代数初步知识的读者即可顺利地读完本书。

第一章　线性规划问题及其数学模型

本章介绍如何由实际问题建立线性规划问题的数学模型和如何将各种形式的数学模型化为标准形式。

第一节　线性规划问题的数学模型

由实际问题建立数学模型是我们首先遇到的极其困难而又不能回避的工作。通过绪论中的例子，我们已看到了怎样由实际问题建立数学模型。但那里的例子毕竟是很简单的，而我们遇到的实际问题往往都是比较复杂的。这就需要我们通过大量的例题的学习和解题的练习以提高我们的能力。在正式讲述例子之前，有几个问题必须首先明确。第一，在建立数学模型时，必须三明确：明确决策变量，明确约束条件，明确目标函数。决策变量的一组值对应了一个方案，而满足全部约束条件的决策变量的一组值对应了一个可行方案。如绪论的例中，$x_1=120$，$x_2=80$，$x_3=100$ 意味着分别生产甲、乙、丙三种产品 120 个单位、80 个单位、100 个单位。这个生产方案满足题设的全部限制条件，为一可行方案。此时目标函数 $S=5\times120+4\times80+3\times100=1\,220$（元）。求解线性规划问题的任务是：在众多可行方案中找出使目标函数取最优（最大或最小）的方案，即最优方案。第二，什么样的实际问题可以建立起线性规划的数学模型呢？从前面的分

析可以看到，这样的实际问题必须满足如下三点：

(1) 存在着达到目标的多种方案，且每个方案可以用一组数与之对应；

(2) 要求的问题目标能用数值指标来反映，且能表为决策变量的线性函数；

(3) 要达到的目标是在一定约束条件下实现的，且这些条件可用线性等式或不等式来描述。

下面看一些具体例子。

例 1 设有两个粮食仓库 A_1，A_2。储存粮食分别为 4 000 kg 和 5 000 kg。它们所储存的粮食要供应三个粮店 B_1, B_2, B_3，其需要量分别为 3 000 kg，2 000 kg 和 4 000 kg。已知两个粮食仓库到各粮店每百公斤的运价列于表 1-1。

表 1-1

运价（元/百公斤） 粮店 / 仓库	B_1	B_2	B_3
A_1	16	10	8
A_2	2	14	4

问应如何调运，才能使总运费最省？

解 设 x_{ij} 表示由粮食仓库 A_i 运往粮店 B_j 的粮食数（单位：百公斤）（$i=1, 2$；$j=1, 2, 3$），例如 x_{21} 表示由粮食仓库 A_2 运往粮店 B_1 的粮食数量等等。现列表 1-2。

表 1-2

仓库 \ 粮店	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	40
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	50
收量	30	20	40	90

因为由粮食仓库 A_1 运往三个粮店的粮食总数应为 A_1 的储存粮食数 40 百公斤，即 $x_{11}+x_{12}+x_{13}=40$

同样由粮食仓库 A_2 运往三个粮店的粮食总数应为 A_2 的粮食储存数 50 百公斤，即 $x_{21}+x_{22}+x_{23}=50$

另一方面，两个粮食仓库供给粮店 B_1 的粮食数量应等于 B_1 的需要量 30 百公斤，即 $x_{11}+x_{21}=30$

同理可得：$x_{12}+x_{22}=20$

$$x_{13}+x_{23}=40$$

因此，调运方案就是求满足下面约束条件的一组变量 x_{11}，x_{12}，x_{13}，x_{21}，x_{22}，x_{23} 的值：

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=40 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=50 \\ x_{11}+x_{21}=30 \\ x_{12}+x_{22}=20 \\ x_{13}+x_{23}=40 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

显然可行的调运方案有很多个。

现在的问题就是在这很多个可行的方案中，找一个运费

最少的方案。这一问题归结为如下的数学模型：

$$求\ \min S=16x_{11}+10x_{12}+8x_{13}+2x_{21}+14x_{22}+4x_{23}$$

$$满足\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=40 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=50 \\ x_{11}+x_{21}=30 \\ x_{12}+x_{22}=20 \\ x_{13}+x_{23}=40 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

(这里，“min”意思是“求……的最小值”)

例 2 某车间有一批长度 180 cm 的钢管(数量充分多)，今为制造零件，要将其截成三种不同长度的管料：70 cm，52 cm，35 cm。生产任务规定，这三种料的需要量分别不少于 100 根，150 根，100 根。问应当采取怎样的截法，才能在完成任务的前提下，使总的边角料达到最小限度？

解 各种可能的截法如表 1-3 所示。

表 1-3

所截长度(cm)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	需要量(根)
70	2	1	1	1	0	0	0	0	100
52	0	2	1	0	3	2	1	0	150
35	1	0	1	3	0	2	3	5	100
边　料	5	6	23	5	24	6	23	5	

设 x_i 表示按照第 i 种截法所截原钢管的根数，用 S 表示截取后边料的总长度，那么问题可归结为：

求 $\min S = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8$

$$
\text{满足}\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100 \\
2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 150 \\
x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 \geqslant 100 \\
x_i \geqslant 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)
\end{cases}
$$

(各种长度的毛坯所截出的数量分别应不少于对该种毛坯的需要量)

为了使问题简化，我们把剩余边角料太大的第 3 、 5 、 7 种截法舍去并将余下的 5 种截法重新编号，则有

表 1-4

所截长度 (cm)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	需要量（根）
70	2	1	1	0	0	100
52	0	2	0	2	0	150
35	1	0	3	2	5	100
边　料	5	6	5	6	5	

相应的数学模型为

求 $\min S = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 5x_5$

$$
\text{满足}\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 100 \\
2x_2 + 2x_4 \geqslant 150 \\
x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 \geqslant 100 \\
x_i \geqslant 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)
\end{cases}
$$

例 3　某养鹅场养鹅 10 000 只，用大豆和谷物两种饲料混合喂养。每天每只鹅平均吃混合饲料1 kg，其中至少应有

0.22kg的蛋白质和0.06kg的钙。已知大豆中含有50%的蛋白质和0.2%的钙，每公斤价格是0.6元；谷物中含10%的蛋白质和0.1%钙，每公斤价格是0.3元。问应如何配制混合饲料，才能使成本最低？

解 设每天用大豆 x_1 kg，谷物 x_2 kg，S 是每天用饲料的总成本，则问题归结如下：

求 $\min S = 0.6x_1 + 0.3x_2$

满足 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10\,000 \text{（每天所用大豆和谷物的总和应等于每天消耗混合饲料的总和）} \\ 0.5x_1 + 0.1x_2 \geqslant 10\,000 \times 0.22 \text{（大豆和谷物所含蛋白质的总和应不少于对蛋白质的总需要量）} \\ 0.002x_1 + 0.001x_2 \geqslant 10\,000 \times 0.06 \text{（大豆和谷物所含钙的总和应不少于对钙的总需要量）} \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

例 4 四门课四名教师进行分配，每位教师各上一门课。他们备一节课所需备课时间如表1-5所示。

表 1-5

课 时间(h) 教师	微积分	数理方程	线性代数	概率论
甲	2	10	9	7
乙	15	4	14	8
丙	13	14	16	11
丁	4	15	13	9