SHUXUE FUXIYUCESHI

全国硕士研究生入学考试

数学复习与测试

SHUXUE FUXIYUCESHI

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

SHUXUE FUXIYUCESHI SHUXUE FUXIYUCESHI

SHUXUE FUXIYUCESHI

杨则燊 刘九兰
王家生 邱忠文 编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

全国硕士研究生入学考试
数学复习与测试

（高等数学·线性代数·概率论与数理统计）

杨则燊　刘九兰
王家生　邱忠文

天津大学出版社

内容提要

本书是按照教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》并结合编者多年来教学与指导考研复习的实践经验而编写的。内容包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计共3篇，每章均给出《数学考试大纲》中的相关内容与要求，重要概念、公式与结论，典型例题及解题方法，自我测试题，参考答案与提示共5部分。书末附录收入了模拟试题与答案和最新公开的考试真题及解答。例题典型，解法多样，充分体现考研内容与题目的综合性、灵活性、应用性。

本书可以作为报考硕士研究生的读者复习数学的参考书，对于广大理工科非数学专业本科生学习数学课程也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试数学复习与测试：高等数学、线性代数、概率论与数理统计/杨则燊等编.—天津：天津大学出版社，2003.4
ISBN 7-5618-1746-0

Ⅰ.全… Ⅱ.杨… Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第016343号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tdcbs.com
电　　话 营销部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 34.5
字　　数 840千
版　　次 2003年4月第1版
印　　次 2003年4月第1次
印　　数 1—4 000
定　　价 43.00元

前　　言

为了帮助广大报考硕士研究生的考生能在较短时间内高效率地全面复习数学，我们按照教育部制订的《2003年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，并结合编者多年来教学与指导考研复习的实践经验编写了本书。

本书由高等数学、线性代数、概率论与数理统计3部分组成，其中高等数学分为8章，线性代数分为6章，概率论与数理统计分为6章。每章均给出《数学考试大纲》中的相关内容与要求；重要概念、公式与结论；典型例题及解题方法；自我测试题；参考答案与提示，共5部分。书末附录收入了模拟试题与解答和最新公开的考研真题及解答。这种编排的目的在于帮助读者在正确理解考试大纲的基础上，系统总结归纳数学的重要概念、基本定理与基本方法，通过大量的例题分析，帮助读者提高综合应用有关理论解决具体问题的方法与技巧，并通过自我测试题检查读者复习的效果。

本书有些例题的编排，不完全局限于数学的原有体系，目的在于使读者对所学内容有一个综合的理解和更灵活的应用，以体现考研题目的综合性，灵活性，应用性。本书例题中有相当多是历届研究生的入学试题，以使读者了解和熟悉考研试题的题型与特点。

本书由杨则燊编写高等数学的第二、四、五、八章，邱忠文编写高等数学的第一、三、六、七章，刘九兰编写线性代数，王家生编写概率论与数理统计。徐绥教授、张玉环副教授参加了本书的审阅工作，并提出了宝贵修改意见，对此我们深表感谢。

由于水平所限，书中如有疏漏之处，恳请读者给予指正。

编者

2003.02

目　　录

第一篇

高等数学

第一章　函数、极限、连续

考试大纲

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1.理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.

2.了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3.理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4.掌握基本初等函数的性质及其图形.

5.理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6.掌握极限的性质及四则运算法则.

7.掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8.理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

9.理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10.了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

§1.1　函　　数

重要概念、公式及结论

1.函数的定义

设有两个数集 X 与 Y，f 是一个确定的对应规律，若对于每一个 $x\in X$，通过 f 都有惟一的 $y\in Y$ 和它对应，记为

$$y=f(x)$$

则称 f 为定义在 X 上的一元函数.并称 X 为 f 的定义域，通常用记号 D_f 来表示.当 x 遍取 D_f

中的一切数时,与之对应的 y 组成的集合 $V_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$,称为函数 f 的值域.函数的值域有的书上又用记号 Z_f 来表示.

函数的定义域,就是构成函数的各个基本初等函数及其四则运算或复合步骤的定义域的公共解集.通常可以由不等式组求得.

几个常见的函数的定义域为:

(1) $y=\dfrac{1}{x}, D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.　　(2) $y=\sqrt[2n]{x}\quad(n\in\mathbf{N}), D_f=[0,+\infty)$.

(3) $y=\log_a x, D_f=(0,+\infty)$.　　(4) $y=\tan x, D_f: x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathrm{Z}$.

(5) $y=\cot x, D_f: x\neq k\pi, k\in\mathrm{Z}$.　　(6) $y=\arcsin x, D_f=[-1,1]$.

(7) $y=\arccos x, D_f=[-1,1]$.

2.函数的性质

1)有界性

若有正数 M 存在,使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数;若不存在这样的 $M>0$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

如果存在常数 M(M 不一定局限于正数),使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上有上界,并且任意一个 $N\geqslant M$ 的数 N,都是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个上界;如果存在常数 m,使 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上有下界,并且任意一个 $l\leqslant m$ 的数 l 都是 $f(x)$ 在区间 I 的一个下界.

显然,函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界又有下界.

几个常见的有界函数是:

(1) $y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$.　　(2) $y=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$.　　(4) $y=\arccos x, x\in[-1,1]$.

(5) $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$.　　(6) $y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty)$.

(7) $y=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$.

2)单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上对任意的两点 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调增加的函数,简称为单调增加的函数;

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上对任意的两点 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调减少的函数,简称为单调减少的函数.

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上对任意的两点 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是广义单调增加的函数.广义单调增加的函数,通常称为非减函数;

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上对任意的两点 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是广义单调减少的函数.广义单调减少的函数,通常称为非增函数.

3)奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上,对任意的 $x\in I$,均有 $f(x)=f(-x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图象是关于 Oy 轴对称的;奇函数的图象是关于原点对称的.

偶函数的和、差、积组成的函数仍为偶函数.两个奇函数的乘积是偶函数.

奇函数的代数和仍为奇函数;奇数个奇函数的乘积仍为奇函数;奇函数与偶函数的乘积为奇函数

常见的偶函数有:$0,|x|,x^2,\cos x,\cdots$;常见的奇函数有:$0,x,\tan x,\sin x,\cdots$.

4)周期性

对于函数$f(x)$,如果存在一个非零的常数T,对一切的x均有$f(x+T)=f(x)$,则称函数$f(x)$为周期函数,并把使上式成立的最小正数T称为$f(x)$的周期.

常见的周期函数是三角函数,它们的周期是众所周知的:

$\sin x,\cos x$的周期为2π;$\tan x,\cot x$的周期为π.

3.高等数学中的常见的函数

1)基本初等函数

通常把以下六类函数:

幂函数 $y=x^\alpha,(\alpha\in\mathbf{R})$;

指数函数 $y=a^x,(a>0,a\neq1)$;

对数函数 $y=\log_a x,(a>0,a\neq1)$;

三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$;

反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\arccos x$;

常量函数 $y=c$,

统称为基本初等函数.

2)复合函数

设$y=f(u),u=\varphi(x)$.则由x决定的函数$y=f[\varphi(x)]$称为x的复合函数,其中u称为中间变量,x是自变量.

3)初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的,并用一个解析式表达的函数,称为初等函数.

4)反函数

设由函数$y=f(x)$可以确定变量x是变量y的函数:$x=f^{-1}(y)$,则称$x=f^{-1}(y)$为$y=f(x)$的(直接)反函数.这时,$f(x)$与$f^{-1}(y)$的图象是重合的.但是在习惯上,把函数$y=f(x)$的反函数记为$y=f^{-1}(x)$,这时$y=f(x)$与(习惯)反函数$y=f^{-1}(x)$的图象是关于直线$y=x$为对称的,且有$f[f^{-1}(y)]=y,(y\in V_f).f^{-1}[f(x)]=x,(x\in D_f)$.

5)隐函数

在二元方程$F(x,y)=0$中,当x取某区间I内的任意一个数值时,相应地总有满足此二元方程的y存在,则称由二元方程$F(x,y)=0$在区间I内确定了一个隐函数$y=f(x)$.

6)参量函数

若由参量方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\end{cases}$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,确定了$y$与$x$的函数关系.则称此函数为参量方程所确定的函数.简称为参量函数或参数函数.

7)双曲函数与反双曲函数

双曲函数是工程技术中常用的初等函数,其定义为:

双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; 双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$;

双曲正切 $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; 双曲余切 $\operatorname{coth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

在双曲函数中,双曲正弦、双曲正切为奇函数;双曲余弦为偶函数.且有关系式:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1.$$

反双曲函数的定义为:

反双曲正弦 $\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), x\in\mathbf{R}$;

反双曲余弦 $\operatorname{arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}), x\geqslant 1$;

反双曲正切 $\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, x\in(-1,1)$.

8)幂指函数

若 $u(x),v(x)$满足 $u(x)\neq 1$,且 $u(x)>0$,则称函数 $y=u(x)^{v(x)}$为幂指函数.

9)由变上、下限定积分确定的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t;\quad \Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t;\quad y(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

10)由极限式所确定的函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x.$$

11)分段函数与函数项级数的和函数

当函数在它的定义域内不能用一个解析式来表达时,就出现了分段函数的表达形式,常见的分段函数有

(1) $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ (2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x=\begin{cases} x, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|<1.\end{cases}$

(3) $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ (4) $y=[x]$.

由函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和所决定的函数 $S(x)$(它通常称为函数项级数的和函数),即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), x\in I.$$

典型例题及解题方法

1.填空题

例 1.1 设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}+\lg(x-2)$,则 $f(\ln x)$的定义域为$\underline{e^2<x<e^3.}$

分析 因为 $f(x)$的定义域为 $2<x<3$,所以 $f(\ln x)$的定义域为 $2<\ln x<3$.解出 x 即得答案.

例 1.2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 则 $f(x+2)$ 的定义域为 $\underline{-2\leqslant x\leqslant 0}$.

分析 因为 $f(x)$ 的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 2$，所以 $f(x+2)$ 的定义域为 $0\leqslant x+2\leqslant 2$. 解出 x 即得答案.

例 1.3 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=\underline{\quad 1\quad}$.

分析 因为 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f[f(x)]=1$.

例 1.4 设 $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=\underline{\begin{cases}-x^4+4x^2-2, & |x|\leqslant 2,\\ -2, & |x|>2.\end{cases}}$

分析 当 $|x|\leqslant 2$ 时，$f[f(x)]=f(2-x^2)=2-(2-x^2)^2$，
当 $|x|>2$ 时，$f[f(x)]=f(2)=-2$. 故有答案.

例 1.5 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 0,1)$，则 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=\underline{1-x, (x\neq 0,1).}$

分析 因为 $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$，所以 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)-1}=1-x$，$(x\neq 0,1)$.

例 1.6 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 则 $f[g(x)]=\underline{\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}}$

分析 $f[g(x)]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+|x|), & x<0,\\ \dfrac{1}{2}(x^2+|x^2|), & x\geqslant 0.\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

2. **选择题**

例 1.7 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0,\\ x+2, x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^2, x<0,\\ 2-x, x\geqslant 0;\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, x<0,\\ 2+x, x\geqslant 0;\end{cases}$ (C) $\begin{cases}2-x^2, x<0,\\ 2-x, x\geqslant 0;\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, x<0,\\ 2+x, x\geqslant 0.\end{cases}$

答 (D).

分析 由于复合函数 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, f(x)>0.\end{cases}$ 另外，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$；当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$，知(D)为应选的结果.

例 1.8 设 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1.\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0; (B) 1; (C) $\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1;\end{cases}$ (D) $\begin{cases}0, |x|\leqslant 1,\\ 1, |x|>1.\end{cases}$

答 (B).

分析 因为 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f[f(x)]=1$，从而 $f\{f[f(x)]\}=1$，故应选(B).

例 1.9 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0.\end{cases}$ 则

(A)$f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$ (B)$f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(C)$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x\geqslant 0;\end{cases}$ (D)$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

答 (D).

分析 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$故应选(D).

例1.10 设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ 则 $g(x)$在区间(0,2)内

(A)无界; (B)递减; (C)不连续; (D)连续.

答 (D).

分析 当$0\leqslant x<1$时,$g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x \frac{1}{2}(u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x$;

当$1\leqslant x\leqslant 2$时,$g(x)=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u+\int_1^x f(u)\mathrm{d}u=\frac{2}{3}+\int_1^x \frac{1}{3}(u-1)\mathrm{d}u=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}(x-1)^2$.

而

$$\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)=\frac{2}{3}.$$

知 $g(x)$在(0,2)连续,故应选(D).

例 1.11 设函数 $f(x)$连续,则下列函数中,必为偶函数的是

(A)$\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$; (B)$\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$;

(C)$\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$; (D)$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$.

答 (D).

分析 因为$[f(t)+f(-t)]$为偶函数,故知 $t[f(t)+f(-t)]$为奇函数,故其积分为偶函数.知应选(D).

3.计算与证明题

例 1.12 求函数 $y=\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$的定义域.

解 函数在 $\sin\frac{\pi}{x}>0$时有定义,即$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

当 $k\neq 0$时,$2k<\frac{1}{x}<2k+1$,知 $x\in\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)$.当 $k=0$时,$0<\frac{1}{x}<1$,知 $x>1$.

综上所述,知函数的定义域 $D_f=\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)\cup(1,+\infty)$,$(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

例 1.13 求函数 $y=(3^n-x^n)^{\frac{1}{n}}$的反函数

解 因为 $y^n=3^n-x^n$,所以 $x^n=3^n-y^n$,$x=(3^n-y^n)^{\frac{1}{n}}$.故其反函数为

$$y=f^{-1}(x)=(3^n-x^n)^{\frac{1}{n}}.$$

例 1.14 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$.

解 因为 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$，所以 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$.

例 1.15 判定函数 $y=(\cos x)\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=\cos(-x)\cdot\left(\dfrac{1}{2^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)=\cos(-x)\cdot\left(\dfrac{2^x}{1-2^x}+\dfrac{1}{2}\right)$

$$=(\cos x)\left(\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}\right)$$

且 $f(x)+f(-x)=(\cos x)\cdot\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{2^x}{1-2^x}+1\right)=0.$

知 $\qquad y=f(x)=(\cos x)\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 为奇函数.

例 1.16 若函数 $f(x)$ 满足：$1>f(x)>\dfrac{1}{2}$ 及 $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，验证 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

解 因为 $f(x+1)=f\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\right]=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-f^2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right]-\left[\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}+f(x)-f^2(x)\right]}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}=\frac{1}{2}+\sqrt{[f(x)-\frac{1}{2}]^2}=f(x)$$

所以 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

例 1.17 设 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$（$a$ 为常数），且 $f(0)=0$，证明 $f(x)$ 是奇函数.

证 因为 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$ ①，所以 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=ax$ ②

由①与②有 $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(2-x^2)}{3x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 显然，$f(x)$ 是奇函数.

例 1.18 若 $f(x)=a+bx$，设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$，证明

$$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx.$$

证 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$f_1(x)=f(x)=a+bx$. 设 $n=k$ 时，有 $f_k(x)=a\dfrac{b^k-1}{b-1}+b^kx$，

则当 $n=k+1$ 时，$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=a+bf_k(x)=a+b\left[a\dfrac{b^k-1}{b-1}+b^kx\right]$

$$=a\frac{b^{k+1}-1}{b-1}+b^{k+1}x.$$

故有 $\qquad f_n(x)=a\dfrac{b^n-1}{b-1}+b^nx.$

例 1.19 若 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$，证明 $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

证 用数学归纳法

当 $n=1$ 时，$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，设 $n=k$ 时，有 $f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$.

则当 $n=k+1$ 时，$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$.

故有 $\quad f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

例 1.20 设 $u_1=1,u_2=1$，且 $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，称 u_n 为斐波那契(Fibonacci)数列.证明 $\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

证 当 $n=1$ 时，$u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]=1$，

设当 $n=k$ 时，有 $u_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$，

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}u_{k+1}&=u_k+u_{k-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right].\end{aligned}$$

故有 $\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

§1.2 极　　限

重要概念、公式及结论

1.数列极限的定义

对于数列 $\{u_n\}$ 及常数 A，若任给 $\varepsilon>0$，总存在着正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|u_n-A|<\varepsilon.$$

则称数列 $\{u_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时，以 A 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A\text{，或简记为 }u_n\to A.$$

如果数列$\{u_n\}$的极限是A，则称$\{u_n\}$收敛于A；若数列$\{u_n\}$没有极限，则称$\{u_n\}$发散.

2.数列极限的性质

(1)收敛数列的极限是惟一的.

(2)收敛的数列是有界的.

(3)若$u_n\to A, v_n\to B$且$u_n\leqslant v_n$，则$A\leqslant B$.(收敛数列的有序性)

(4)若$u_n\to A, v_n\to B$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n\pm v_n)=A\pm B$; $\lim\limits_{n\to\infty}(u_nv_n)=A\cdot B$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{A}{B}$,$(B\neq 0)$.

(5)夹挤准则(或夹逼准则)：若$v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}w_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.

夹挤准则对函数的极限仍然成立：当$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$时，若$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}h(x)=A$，则有$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}f(x)=A$.

(6)单调有界准则：单调增加且有上界的数列，极限必然存在；单调减少且有下界的数列，极限必然存在.

3.函数极限的定义

(1)设$f(x)$在$|x|$充分大时有定义，A为一个常数.若对任意给定的正数$\varepsilon>0$，总存在$N>0$，当$|x|>N$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.则称当$x\to\infty$时，$f(x)$以常数A为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\text{或}f(x)\to A(x\to\infty).$$

在定义中，如果把$|x|>N$，改为$x>N$(或$x<-N$)，就可以得到$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ (或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$)的单侧极限的定义.

(2)设$f(x)$在点x_0的去心邻域$N(\hat{x}_0,\delta)$内有定义，A为一个常数，若对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得对于一切满足$0<|x-x_0|<\delta$的x，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.则称当$x\to x_0$时，$f(x)$以A为极限.记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\text{或}f(x)\to A(x\to x_0).$$

在这个定义中，如果把$0<|x-x_0|<\delta$，改为$0<x-x_0<\delta$，就可以得到右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(简记为$f(x_0+0)$)的定义；如果把$0<|x-x_0|<\delta$，改为$0<x_0-x<\delta$，就可以得到左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$(简记为$f(x_0-0)$)的定义.函数的左极限、右极限都是函数的单侧极限.

4.函数极限的性质

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则极限值$A$是惟一的(极限值的惟一性).

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$f(x)$在$x_0$的某个去心邻域$N(\hat{x}_0,\delta)$内是有界的(局部有界性).

(3)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或$A<0$)，则存在$x_0$的去心邻域$N(\hat{x}_0,\delta)$，当$x\in N(\hat{x}_0,\delta)$时，$f(x)>0$(或$f(x)<0$).这就是极限的同号性定理.

另外，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，当$x\in N(\hat{x}_0,\delta)$时，$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$)，则$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

(4)若$f(x)\leqslant g(x)$，$x\in N(\hat{x}_0,\delta)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有$A\leqslant B$(函数极限的

有序性).

(5)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$; $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},(B\neq 0)$;

$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)],(f\in C,\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$存在).

(6)极限存在的充分必要条件:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A;\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),x\in N(\hat{x}_0,\delta)$.

以上各条性质对 $f(x)\to A(x\to\infty)$时,相应的也适用.

5.常用的已知极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,(|q|<1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,(a>0)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0,(a>1,k$ 为常数).

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1,(a>0)$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

* (9) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

* (10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(12) $\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$.

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=\mathrm{e}^k$.

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

(16) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{arccot}\ x=0$.

(18) $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{arccot}\ x=\pi$.

(19) $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$.

(20) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}$.

6.无穷小及其性质

(1)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$,则当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,称 $\alpha(x)$为无穷小量,简称为无穷小.

(2)无穷小的运算性质:①有限个无穷小的代数和是无穷小;②有限个无穷小的乘积是无穷小;③有界函数与无穷小的乘积是无穷小;④常数与无穷小的乘积是无穷小;⑤极限不为零的函数 $f(x)$除无穷小 $\alpha(x)$,所得的商$\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$是无穷小(或无穷小除以极限不为零的函数是无穷小).

(3)无穷小的比较.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$.则

当 $A\neq 0$ 时,称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$为同阶无穷小;

当 $A=1$ 时,称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$为等价无穷小,记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;