中等專业学校教材試用本

地形測量学

下册

陝西省地質学校編

中国工业出版社

中 等 專 业 学 校 教 材 試 用 本

地 形 測 量 学

下 册

陝西省地質学校編

中 国 工 业 出 版 社

本教材是結合我国生产实踐和各校几年来的教学实踐而編写的。全書共十二章，分上下兩冊出版。此为下冊，包括第七章至第十二章。第七章至第十章分別叙述測量誤差理論，三等水准測量，三、四等三角測量，基綫測量，平差計算及三、四等导綫測量；第十一、十二兩章为气压高程測量和天文方位角測量。

本教材理論叙述力求簡明，操作力求符合現行生产程序和作業要求，通过本書学習能掌握地形測繪工作所应具备的基本理論知識和操作技能。本書可作为中等專業学校地質測量專業的課本，也可作为測繪工作人員的参考書。

本教材由陝西省地質学校負責，江苏省地質学校、重庆地質学校和哈尔濱冶金測量專科学校参加，在各校已有講义的基础上分工选編而成的。

地形測量学

下　冊

陝西省地質学校編

*

中国工業出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

（北京市書刊出版事業許可証出字第110号）

北京市印刷一厂印刷

新华書店北京發行所發行·各地新华書店經售

*

开本 787×1092 1/16·印張 21·插頁 3·字数 499,000

1961年10月北京第一版·1961年10月北京第一次印刷

印数 0001—2743·定价（9-4）2.00元

統一書号：15165·967（地質—44）

目 录

第七章 測量誤差理論

§ 7-1 学习測量誤差理論的一般知識

測量工作者在获得所需要的成果时（如长度、角度、点的座标……等等），不外乎采用两种方法，即所謂直接观測与間接观測。

如果直接确定未知量，比如要确定某一个角的值而直接观測这一角，这种观測就称为直接观測。一般說来，直接观測是对一些容易进行直接測定的測量对象所施行的，例如不太长而又容易丈量的边长、角度等。而有一些成果的获得則是采用了另外一种方法，比如导綫点的坐标，就不是直接測定的。而是測定导綫的边长与折角后，再根据点的坐标与边长、折角的函数关系进行計算而得到的。类似这种不是对所需要的数据进行直接測定，而是对其它有关元素进行观測，然后再用直接測定的元素与所需要数据之間的函数关系进行計算而获得成果的方法称为間接观測。間接观測值也可称之为直接測定值之函数。

很明显，即是采用了間接观測，它的基础也还是直接观測。再以导綫点的坐标来作例子，如果不測定边长和折角，那么，是無法求得点的坐标的。而直接观測是应用測量仪器在一定的自然条件下进行的，由于人的感受能力，仪器构造，对客观事物反映都存有一定的局限性，所以在測量时不会得到这一个观測量的眞实数值，就是所謂眞值的。而只是得到不同程度的接近于眞值的观測值（近似值），如对同一量进行了 n 次观測，一般說来，所得到的 n 个成果是各不相同的。

眞值与观測值的差数就是眞誤差。設 L 为眞值，l 为观測值，δ 为眞誤差，則

$$\delta = L - l$$

在測量工作中經常采用的术語"精度"，最浅近的意义就是与誤差的关系；誤差大的精度差，誤差小的精度好。

在直接观測与間接观測某一量的时候，由于使用仪器、方法和外界条件的不同，所获得成果的精度亦有差别。因此又分为同精度观測和不同精度观測。如在观測某一量时，应用同一仪器和方法，在同一外界条件变化不大的情况下进行观測，称为同精度观測。如果用不同仪器和方法，在不同条件下进行观測，称为不同精度观測。

測量誤差理論就是研究确定測量誤差与观測值函数誤差大小的方法。

确定測量誤差与測定值函数誤差大小对于測量工作来說，有非常重要的意义。因为正如前面所說到的那样，測量工作的結果只不过是得到不同程度的近似值，为了在測量工作中貫彻党的多、快、好、省的社会主义建設总路綫，那么，在測量机关与測量工作者就必須注意以下二个問題：

一、在測量工作进行之前，要根据用途对这些成果提出精度要求。同时还应該制訂出既能保証成果质量，而又是最經济的作业方案和計划。

二、在測量工作进行之中，以及最后要能够检查与評定成果的质量。

很明显的可以想象到，測量誤差理論在解决以上这两个問題时是一种不可缺少的科学。

習　題

1. 測量按获得成果的方法来說，可分几类？并各举例說明。
2. 学習誤差理論的意义是什么？

§ 7-2　測量誤差的分类

測量誤差按其性质来分，可以分为粗差(錯誤)、系統誤差、偶然誤差三种。分别說明如下：

一、錯誤

观测結果与眞值之差超过了当时观测条件下可能預期达到的限度称为錯誤。錯誤之所以产生，往往是由于观测者粗心大意而引起的、例如用 20 米的鋼尺量距，如果在測量过程中少記了一个尺段，那么，整个边长就会产生 20 米左右的誤差。含有錯誤的成果是不能应用的废品，为了不使有錯誤的成果混入应用，因此对一个量总是进行多次的重复观测，多次观測的結果的比較，很容易把含有錯誤的成果予以淘汰。

二、系統誤差

在相同的观测条件下，作一系列的观测，其誤差常保持同一数值，同一符号，或者随着观测条件的不同，其誤差遵循着一定的規律变化，凡是具有这样性质的誤差称为系統誤差。

系統誤差是由于仪器、自然条件和人三种原因产生的。

如果用一根名义上是 20 米长，而实际上却比 20 米长或短 α 的尺子来量距离，每量20米就会包含有 α 的誤差。再如用具有照准軸与水平軸的交角为 $(90°+C)$ 的經緯仪进行观测方向，那么，在每一个方向中就含有 C 的誤差。以上两种情况都是属于仪器构造上的原因而产生的系統誤差。

外界的自然条件对于测量結果也可能产生系統誤差，例如溫度对于尺长的影响而使丈量所得的距离产生誤差。这种誤差的数值对于一定质量的尺子，一定的溫度情况下是固定的，所以是系統誤差。

在观测过程中，有一些观测者有种特殊的习慣，比如用經緯仪照准目标，总是会偏于目标某一边。这种由于人的原因而产生的系統誤差，有时也称之为人差。

由于系統誤差在一定的条件下，它的数值与符号一般是固定的，所以就可以采用适当的观测方法予以消除，或者将这种誤差計算出来加以改正。例如經緯仪的“照准軸誤差”就可以采用正倒鏡观測的方法予以消除。尺长不符于标准长度和溫度对于尺长的影响可以分别通过“尺长改正数”和“溫度改正数”的計算加以改正。至于人差及自然条件对观测值的影响，一般的不易发現和不易掌握其規律性，故除通过适当的观测方法和計算方法給以消除或减小外，在观测时应注意自然条件之变化，以使系統誤差之影响减到最小。

三、偶然誤差

与系統誤差相反，如果观测誤差在大小（絕对值）和符号均不能按观测顺序得出一定的規律的則称为偶然誤差。它的产生原因是多方面的，比如測角时的誤差就受到了仪器构造上缺陷，观测者技术不熟练，空气的振动，照明情况等等的綜合影响。各种因素所产生的誤差可能彼此消除了一部分，也可能是合併起来。由于这些不固定的客观情况，即使由

同一个人，用同样仪器，在相同的环境下，对同一量作多次观测（即是同精度测量）所得到的偶然誤差也未必相同。既然每一观测总是不可避免地要产生偶然誤差，而且它也不能在观测中予以完全消除或加以改正。所以它是决定成果质量的主要因素。因此每一个观测者就应該努力提高自己的业务水平，加强工作責任心，細致灵巧地进行工作，使得偶然誤差对成果的影响，尽可能达到最小。

如前面所說，錯誤应該避免，系統誤差可以消除或者加以改正。当然在实际工作中，要完全的知道系統誤差的来源，以及它的影响而加以完全消除这也是有困难的。但是总能够消除其絕大部分，使得它的残留影响比偶然誤差还要小。这样，决定观测結果质量的就只是偶然誤差。

通常在誤差理論中只是研究偶然誤差，而不涉及到錯誤和系統的誤差的問題。

習　　題

1. 誤差分几类？它們的性質与产生的原因是什么？并各举例說明。
2. 如何处理系統誤差？并举例說明。

§ 7-3　偶然誤差的特性

在前节中曾經提过偶然誤差的符号与数值是不定的，产生的原因也是多方面的。从表面上来看，偶然誤差是無規律可循，但用統計学的方法，仍可得出所謂統計学上的規律性。观测的个数愈多，这种規律性愈明显。实际上任何事物都是有其內在規律，都应該可以被认識，問題在于对不同的事物应作不同的研究分析。

在研究了大量的各种各样的測量資料，或对同一量进行多次同精度的重复測量后。应用統計学的方法就可以发現偶然誤差分布的特性，分述如下：

一、在一定的观测条件下，偶然誤差的絕对值，不会超过一定的限度；

二、絕对值小的誤差比絕对值大的誤差經常出現得多；

三、絕对值相同而符号相反的誤差出現的机会經常相等；

四、同一量的同精度观测，其偶然誤差的算术平均值，随着观测次数的增加而趋近于零。

上述第一个特性說明在一定的观测条件下，偶然誤差有一定的范圍；第二个特性說明其誤差值的規律性；第三个特性說明誤差方向的規律性；第四个特性說明誤差的抵償性。

如果某一量进行了 n 次同精度观測，其 n 个真誤差为 δ_1、δ_2、$\delta_3\cdots\cdots\delta_n$，这些真誤差之中只具有偶然誤差的性质，按其第四特性就会有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots\cdots\delta_n}{n}=0 \tag{7-1}$$

这一关系。

以上这四个特性，虽然还不能用数学的方法进行严格的論証。然而，它們却是以广泛而坚实的实驗作为基础，而且在測量工作的实践中被証明了是正确的。这些性质也是研究誤差理論的基础。所以，对这四个性质是可以信任而且是必須予以信任的。

習　　題

1. 偶然誤差的性質是什么？根据你的理解来說明。

§ 7-4 算术平均值原理与最或是誤差

一、算术平均值原理

如果对某一量进行了 n 次同精度測量，就会得到 n 个各不相同的数值 l_1、$l_2 \cdots l_n$。由于这 n 个观测是同精度的，所以就不能偏爱或偏废某一个观測值，經常是取这 n 个观測值的算术平均值（設为 x）为这一量的測量結果，则

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n}{n}$$

如果以$[l]$表示$(l_1+l_2+\cdots l_n)$，则

$$x=\frac{[l]}{n} \tag{7-2}$$

以算术平均值作为測量結果，也可以以測量誤差理論的原理来証明其合理性。

如設这一量的眞值为 L，各个观測值为 l_1、l_2、$l_3 \cdots l_n$，各个观測值的眞誤差为 δ_1、δ_2、$\delta_3 \cdots \delta_n$，就可如下式計算：

$$\left.\begin{array}{l}\delta_1=L-l_1\\ \delta_2=L-l_2\\ \delta_3=L-l_3\\ \cdots\cdots\cdots\\ \delta_n=L-l_n\end{array}\right\} \tag{7-3}$$

将（7-3）式中各个等式相加，也以[ ]表示相应量的总和。则

$$[\delta]=n\cdot L-[l]$$

再将上式等号两端都除以測量次数 n，

$$\frac{[\delta]}{n}=L-\frac{[l]}{n}$$

将（7-2）式代入上式，再作移項，得：

$$L=x+\frac{[\delta]}{n}$$

当測量次数無限增多，即 $n\to\infty$ 时，根据偶然誤差第四性质，$\frac{[\delta]}{n}\to 0$，所以算术平均值 x 就可认为是無限接近于眞值 L，$L\to x$，算术平均值的誤差，一般説来要較任何一个观測値 l_i 的誤差为小。所以，采用算术平均值作为这一量的測量結果是合理的。算术平均值也称为最或是值。

在实际工作中。測量的次数是不可能無限多，所以算术平均值 x 也就不能等于眞值 L，只不过測量次数愈多，所得的平均值愈是接近于眞值。

例題 1 若对某一长度进行了四次同精度測量，得到观測值为 110.312 米，110.310 米，110.308 米，110.314 米，求該长度的測量結果。

解：
$$x=\frac{110.312\text{ 米}+110.310\text{ 米}+110.308\text{ 米}+110.314\text{ 米}}{4}$$
$$=\frac{441.244\text{ 米}}{4}=110.311\text{ 米}$$

求算术平均值本来是一个簡单的算术問題，但如观測值的数值較大，或者当观測值是

角度时，在求算术平均值就比較麻煩，也容易出錯。下面介紹一种簡单方法。

对某一量的 n 个同精度观測值为 l_1、$l_2\cdots l_n$。在求其算术平均值 x 的时候，可以选定一个与这些观測值充分接近的某一数字(或者就是这些观測值中的一个)，設为 l_0，再求每个观測值 l_i 与 l_0 的差数，即可得：

$$\left.\begin{aligned} l_1-l_0&=\Delta l_1\\ l_2-l_0&=\Delta l_2\\ &\cdots\cdots\cdots\\ l_n-l_0&=\Delta l_n\end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

取 (7-4) 式中各式之和，得：

$$[l]-n\cdot l_0=[\Delta l]$$

将上式两端除以 n，并移項得：

$$\frac{[l]}{n}=l_0+\frac{[\Delta l]}{n} \tag{7-5}$$

(7-5) 式左端即是算术平均值 x。而按这一公式求 x 时，可以把計算各观測值的算术平均值的問題，轉化为計算各个 Δl_i 平均值的問題，由于 Δl_i 是一个不大的数，計算起来要方便的多。

例題 2 仍用前例的数据，如选 $l_0=110.300$ 米，则 $\Delta l_1=12$ 毫米；$\Delta l_2=10$ 毫米；$\Delta l_3=8$ 毫米；$\Delta l_4=14$ 毫米。

$$\begin{aligned} x&=110.300\text{米}+\frac{12\text{毫米}+10\text{毫米}+8\text{毫米}+14\text{毫米}}{4}\\ &=110.300\text{米}+11\text{毫米}=110.311\text{米}\end{aligned}$$

例題 3 如对某一角度进行了五次同精度观測，五个观測值为：$l_1=85°42'8''$；$l_2=85°42'1''$；$l_3=85°42'6''$；$l_4=85°42'3''$；$l_5=85°42'7''$，求算术平均值 x。

解： 設 $l_0=85°42'1''$，此处($l_0=l_2$)

$$x=85°42'1''+\frac{7''+0''+5''+2''+6''}{5}=85°42'1''+4''=85°42'5''$$

二、最或是誤差

某量的算术平均值与各观測值之差，称为最或是誤差，以 V 表示。

最或是誤差有这一样一个特性，一个同精度观測列的最或是誤差之和等于零。这一特性証明如下：

如某一量有 n 个同精度的观測值 $l_1, l_2, l_3\cdots l_n$，測量的最或是值为 x，那么

$$\left.\begin{aligned} V_1&=x-l_1\\ V_2&=x-l_2\\ V_3&=x-l_3\\ &\cdots\cdots\cdots\\ V_n&=x-l_n\end{aligned}\right\}$$

把以上等式相加，就得到$[V]=n\cdot x-[l]$。由于 x 是算术平均值，所以这等式右端 $nx-[l]=0$。因此$[V]=0$。

如果算术平均值求錯了，最或是誤差的总和就不等于 0。因此，$[V]=0$ 这一关系也可

作检驗求算术平均值是否正确之用。

例题 4 以例题 3 的数据进行$[V]=0$的計算。

解：

$$V_1=85°42'5''-85°42'8''=-3''$$
$$V_2=85°42'5''-85°42'1'=+4''$$
$$V_3=85°42'5''-85°42'6''=-1''$$
$$V_4=85°42'5''-85°42'3''=+2''$$
$$V_5=85°42'5''-85°42'7''=-2''$$
$$[V]=V_1+V_2+V_3+V_4+V_5=-3''+4''-1''+2''-2''=0$$

習　　題

1. 以算术平均值作为观测量的最或是值的理論基础是什么？
2. 什么是最或是誤差？它有什么特性？

§ 7-5　观測精度的衡量

既然在任一观測值中都含有不可避免的偶然誤差。那么，了解誤差的大小以評定这些观測值的质量是很重要的。这种工作通常称为精度估計。

为了进行精度估計，必須要有“多余观測”。比如为了确定一个角度而观測了三次，那么，其中有两次就是多余观測。

对于直接观測值的精度衡量的方法，这里說明两种。

一、平均誤差

对某一眞値为L的量，进行了n次同精度观測，观測値分别为l_1、$l_2\cdots l_n$。則n个眞誤差分别为：

$$\left.\begin{array}{l} L-l_1=\delta_1 \\ L-l_2=\delta_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ L-l_n=\delta_n \end{array}\right\}$$

由于在观測中已經消除了錯誤与系統誤差，所以这些眞誤差δ就完全具有偶然誤差的性质。因此，它們的符号有正有負，而数值也一般地彼此不同。这样看来，要衡量这一組观測值中每一个别測量的精度时，任选一个δ_i作为“代表”是不合理的。如果把誤差取算术平均值来表示也不合理，因为这样做由于正負誤差抵消的关系，使算术平均值趋近于零，而不能反映这一組观測列的精度了。

平均誤差就消除了以上的这种缺点，它是取各个誤差的絕对值的平均值。如以θ表示，則

$$\theta=\frac{|\delta_1|+|\delta_2|+\cdots+|\delta_n|}{n} \tag{7-6}$$

考虑到偶然誤差的特性，在求得θ之后应該加上±号。平均誤差一般地說是能够反映出一組观測列中个别測量精度的。因为θ的数值与每一个誤差的大小成比例。至于以它来衡量精度缺点将在下面談到。

例题 5 有一量眞值为 100，同时有两組观測列如下：

第一观測列：

103，97，96，101，103，99，104，103.

第二观測列：

101，105，99，106，96，100，103，101.

計算以上两观測列的平均誤差。

解：先求出两組观測列中每一观測值之真誤差的絕对值，然后求其平均值。則

$$\theta_1=\frac{3+3+4+1+2+1+4+3}{8}=\frac{21}{8}=\pm2.6$$

$$\theta_2=\frac{1+5+1+6+4+0+3+1}{8}=\frac{21}{8}=\pm2.6$$

二、均方誤差（中誤差）

从前一例題的計算中，因为 $\theta_1=\theta_2$，所以用平均誤差来衡量該两观測列的精度則是一样的。如果用这两組观測值来进一步分析、比較，我們的結論就不会是这样。

第一观測列的数值彼此很接近，也就是各个观測值之間的差数不大。这一般可以說明在整个的观測过程中环境稳定，操作仔細，其中每一观測值都可予以信任。因此，第一观測列可以认为精度較好。第二观測列各观測值之間的差数較大，对于这些差数較大的观測值，就存在着較大的誤差，甚至是这些彼此相差較大的成果中都会有較大誤差。因此，对第二观測列就只能有較差的評价了。

按平均誤差来衡量精度，所以有时会与实际分析不一致，这是因为在計算平均誤差的过程中，沒有对大誤差予以突出，而将不同数值的誤差同样看待了。这个矛盾可以用均方誤差来解决。

所謂均方誤差就是把某一組同精度观測列的真誤差的平方总和除以观測次数的商之平方根。

設中誤差以 m 表示，則

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n}} \tag{7-7}$$

（7-7）式中，$[\delta\delta]=[\delta^2]=[\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\cdots\delta_n^2]$，$n$ 为这一观測列的观測值个数，也就是測量次数。

如以中誤差来衡量例題5中两組观測值的精度，則：

$$m_1=\pm\sqrt{\frac{65}{8}}=\pm2.8$$

$$m_2=\pm\sqrt{\frac{89}{8}}=\pm3.3$$

从中誤差来看，m_1 的絕对值要小于 m_2 的絕对值，这說明第一观測列的精度比第二观測列的精度好，就与实际分析所得的結論一致了。所以能够这样的原因，是由于在計算中誤差的过程中是取每一誤差平方之平均数再开方，使其大小不取决于观測列中个别誤差之符号，且能使較大的誤差明显地表現出来。正因为其有这样的优越性，故苏联与我国都是以中誤差来衡量精度的。

習　　題

1. 以中誤差衡量精度的优越性是什么？

2. 用計算尺作 34.5×23.7 乘法 4 次，得到 4 个数字为：817.6，817.5，817.4，817.7，求用計算尺每次計算的平均誤差与中誤差。

§ 7-6　以最或是誤差表示中誤差

在大多数的情况下，眞誤差是不知道的，所以用（7-7）公式来計算中誤差，缺乏实用意义。为了使得中誤差具有普通的实际意义，下面来証明按最或是誤差来表示中誤差的公式。

如 L 为某一量的眞值，x 为該量的最或是值，$l_1, l_2 \cdots l_n$ 为該量的一組同精度观測值，$\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_n$ 与 V_1、$V_2 \cdots V_n$ 为各观測值的眞誤差与最或是誤差。这些量之間应有如下关系式：

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &= L - l_1\\ \delta_2 &= L - l_2\\ &\cdots\cdots\\ \delta_n &= L - l_n\end{aligned}\right\}\text{(a)}\qquad \left.\begin{aligned}V_1 &= x - l_1\\ V_2 &= x - l_2\\ &\cdots\cdots\\ V_n &= x - l_n\end{aligned}\right\}\text{(b)}$$

将(a)式 n 个等式相应地减去(b)式中各式，得：

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 - V_1 &= L - x\\ \delta_2 - V_2 &= L - x\\ &\cdots\cdots\\ \delta_n - V_n &= L - x\end{aligned}\right\}$$

上述方程組也就是：

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &= V_1 + (L - x)\\ \delta_2 &= V_2 + (L - x)\\ &\cdots\cdots\\ \delta_n &= V_n + (L - x)\end{aligned}\right\}\qquad \text{(c)}$$

将(c)式中各等式相加：

$$[\delta] = [V] + n(L - x) \qquad \text{(d)}$$

将(c)中各式平方相加：

$$[\delta\delta] = [VV] + 2[V](L - x) + n(L - x)^2 \qquad \text{(e)}$$

在§7-4 中已經証明了最或是誤差总和等于 0，即$[V]=0$ 所以(d)、(e)两式就成为：

$$[\delta] = n(L - x) \qquad \text{(f)}$$

$$[\delta\delta] = [VV] + n(L - x)^2 \qquad \text{(g)}$$

将(f)式中 $(L-x)=\frac{[\delta]}{n}$，代入(g)式：

$$[\delta\delta] = [VV] + n\frac{(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n)^2}{n^2}$$

$$= [VV] + \frac{(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots \delta_n^2)}{n} + \frac{2}{n}(\delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \cdots + \delta_1\delta_n + \cdots + \delta_{n-1}\delta_n)$$

在上式右端第三项中，与偶然誤差第四性质相同，可以看为趋近于0，而略去不計，这样

$$[\delta\delta]=[VV]+\frac{[\delta\delta]}{n}$$

即

$$n[\delta\delta]-[\delta\delta]=n[VV]$$

$$[\delta\delta](n-1)=n[VV]$$

而

$$\frac{[\delta\delta]}{n}=\frac{[VV]}{n-1}$$

以上式关系代入(7-7)公式中获得到实用的計算中誤差公式：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}} \tag{7-8}$$

在实际工作中，如只知道最或是誤差，那就应該按(7-8)公式計算中誤差。如果在个别情况下知道了眞誤差，（比如三角形的閉合差就有眞誤差的性质）那就应按(7-7)公式計算中誤差。

从公式(7-7)中可以知道，如果沒有多余观测，是無法計算中誤差的。

例题 对β角进行了六次同精度观测（观測值記于表7-1第2欄）。求β角之算术平均值与每次观測之中誤差。

表 7-1

观測次数	l_i	Δl_i	V	VV	中誤差之計算
1	2	3	4	5	6
1	73° 42′ 10″	+10″	+10″	100	$m=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{650}{6-1}}$
2	40″	+40″	−20″	400	
3	25″	+25″	−5″	25	$=\pm\sqrt{130}=\pm11.''4$
4	10″	+10″	+10″	100	
5	15″	+15″	+5″	25	$M^*=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n(n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{650}{30}}$
6	20″	+20″	+0″	0	$=\pm\sqrt{21.7}=\pm4.''7$
	$l_0=73°42'00''$	$[\Delta l]=+120''$	$[V]=0$	$[VV]$	
	$x=73°42'20''$	$\frac{[\Delta l]}{n}=+20''$		$=650$	

* M的計算，將在§7-9講述。

习　　题

1．对某一長度进行了六次同精度測量，其数值如下；求其算术平均值及中誤差？

127.81；127.79；127.84；127.80；127.78；127.80。

2．对某角进行五次等精度观測，求其算术平均值及中誤差？

75°18′48″；75°18′54″；75°18′51″；75°18′56″；75°19′01″。

§ 7-7　观測量函数中誤差(一)

当用間接观測以确定某一量的时候，由于直接观測值有誤差，一般来說，观測值函数也就会有誤差，这就是通常所說的“誤差传播”。比如用視距公式$D=K\cdot l+C$求距离，当

标尺讀数有誤差时，距离 D 也将产生誤差。然而，自变量的誤差与函数的誤差之間又存在什么样的关系呢？这就需要加以研究。

“观測量函数中誤差”就是研究直接观测值与其函数值之間誤差传播的規律。这个規律，在最后都是以中誤差表示的。

一、和、差函数的中誤差

設函数 $s=x\pm y$，其中 x，y 是两个独立观測的自变量（直接观测值）。再令函数与自变量的眞誤差分别为：δ_s, δ_x, δ_y。

如在观测值 x、y 及函数值 s 上加上眞誤差，則可得到新的函数值

$$s+\delta_s=(x+\delta_x)\pm(y+\delta_y)$$

以 $s=(x\pm y)$ 代入上式，得：

$$\delta_s=\delta_x\pm\delta_y \tag{7-9}$$

(7-9)式为 s 与 x、y 眞誤差之間的关系式。

如果对 x 与 y 这二个自变量都观測了 n 次，則可得到类似(7-9)式那样的 n 个等式：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{s_1}&=\delta_{x_1}\pm\delta_{y_1}\\ \delta_{s_2}&=\delta_{x_2}\pm\delta_{y_2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{s_n}&=\delta_{x_n}\pm\delta_{y_n}\end{aligned}\right\}$$

将这些等式平方，并求其总和：

$$\begin{aligned}\delta^2_{s_1}&=\delta^2_{x_1}+\delta^2_{y_1}\pm2\delta_{x_1}\cdot\delta_{y_1}\\ \delta^2_{s_2}&=\delta^2_{x_2}+\delta^2_{y_2}\pm2\delta_{x_2}\cdot\delta_{y_2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta^2_{s_n}&=\delta^2_{x_n}+\delta^2_{y_n}\pm2\delta_{x_n}\cdot\delta_{y_n}\\ \hline [\delta^2_s]&=[\delta^2_x]+[\delta^2_y]\pm2[\delta_x\cdot\delta_y]\end{aligned}$$

以观測次数 n 除上式：

$$\frac{[\delta^2_s]}{n}=\frac{[\delta^2_x]}{n}+\frac{[\delta^2_y]}{n}\pm2\frac{[\delta_x\cdot\delta_y]}{n} \tag{7-10}$$

由于 δ_s、δ_x、δ_y 都是眞誤差，所以

$$\frac{[\delta^2_s]}{n}=m^2_s;\quad \frac{[\delta^2_x]}{n}=m^2_x;\quad \frac{[\delta^2_y]}{n}=m^2_y$$

m_s、m_x、m_y 分別为 s、x、y 之中誤差。

(7-10)式等式右端之第三項，按偶然誤差第四性质，知其趋近于0，所以(7-10)可写成

$$m^2_s=m^2_x+m^2_y$$

$$m_s=\pm\sqrt{m^2_x+m^2_y} \tag{7-11}$$

(7-11)式說明两观測值代数和的中誤差，等于观測值的中誤差平方和的平方根。用同样的方法，可以推求任意个观測值代数和的中誤差公式。

如 $s=x\pm y\pm\cdots\cdots\pm z$（共有 n 个自变量）

則

$$m_s=\pm\sqrt{m^2_x+m^2_y+\cdots\cdots+m^2_z} \tag{7-12}$$

(7-12)式說明任何个数直接观测值代数和的中誤差等于各个中誤差平方和的平方根。

如果在(7-11)式中 $m_x=m_y=m$,(x 与 y 的中誤差相等)，那么，(7-11)式就成为：

$$m_s=m\sqrt{2} \tag{7-13}$$

如果(7-12)式中 $m_x=m_y=\cdots=m_z=m$,(n 个自变量的中誤差都相等)，那么，(7-12)式就成为：

$$m_s=\pm m\sqrt{n} \tag{7-14}$$

二、倍数函数的中誤差

設函数 $s=Kx$，式中 K 是常数，x 是直接观测值，令 δ_s 与 δ_x 分别为 s 与 x 之眞誤差。则

$$(s+\delta_s)=K(x+\delta_x)$$

以 $s=Kx$ 代入上式，得

$$\delta_s=K\delta_x \tag{7-15}$$

如果对 x 进行了 n 次观测，就有 n 个类似(7-15)的等式；即

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{s_1}=K\delta_{x_1} \\ \delta_{s_2}=K\delta_{x_2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{s_n}=K\delta_{x_n} \end{array}\right\}$$

把上述这些等式平方，并求其总和

$$\begin{array}{l} \delta^2_{s_1}=K^2\delta^2_{x_1} \\ \delta^2_{s_2}=K^2\delta^2_{x_2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta^2_{s_n}=K^2\delta^2_{x_n} \\ \hline [\delta^2_s]=K^2[\delta^2_x] \end{array}$$

以观测次数 n 除上述等式，得：

$$\frac{[\delta^2_s]}{n}=K^2\cdot\frac{[\delta^2_x]}{n}$$

按中誤差定义，上式又可写成：

$$m^2_s=K^2\cdot m^2_x$$

所以

$$m_s=Km_x \tag{7-16}$$

(7-16)式的关系可以說明：常数与观测值乘积的中誤差，等于該常数与观测值中誤差的乘积。

例題 1 設每观测一个方向的中誤差等于 $\pm 20''$，求两方向之差的角度中誤差为多大？

解：角度 $\beta=\text{II}_{方向}-\text{I}_{方向}$，而 $m_{\text{II}}=m_{\text{I}}=\pm 20''$，

$$\therefore m_\beta=\pm 20''\sqrt{2}$$

例題 2 直綫 AD 分三段丈量，$AB=128.37$ 米，$m_{AB}=\pm 0.08$ 米，$BC=122.40$ 米，$m_{BC}=\pm 0.10$ 米，$CD=130.12$ 米，$m_{CD}=\pm 0.11$ 米，求 AD 全长及 m_{AD}？

解：$AD=128.37$ 米 $+122.40$ 米 $+130.12$ 米 $=380.89$ 米

$m_{AD}=\pm\sqrt{(8\text{厘米})^2+(10\text{厘米})^2+(11\text{厘米})^2}=\pm\sqrt{285}=\pm 17$ 厘米

例题 3 圆周长$s=2\pi r$，若在測量r时之中誤差$m_r=\pm 0.5$mm，求m_s?

解：$m_s=\pm\pi$毫米

三、綫性函数中誤差

函数 $s=K_1x+K_2y+\cdots+K_nz$，式中K_i是各常数，$x, y\cdots z$是各个独立的自变量。再設m_x，$m_y\cdots\cdots m_z$是各自变量相应的中誤差，m_s为函数s的中誤差。

在求m_s与m_x，$m_y\cdots m_z$关系的时候，我們应用上面已經学过的两种求函数中誤差的方法。

首先，設

$$\left.\begin{array}{l} T_1=K_1x \\ T_2=K_2y \\ \cdots\cdots\cdots \\ T_n=K_nz \end{array}\right\} \tag{7-17}$$

按倍数函数中誤差的方法，得

$$\left.\begin{array}{l} m_{T_1}=K_1mx \\ m_{T2}=K_2my \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{T_n}=K_nmz \end{array}\right\} \tag{7-18}$$

同时，按照(7-17)的假設：函数s可以写为：

$$s=T_1+T_2+\cdots+T_n$$

所以，按任意一个观测值代数和求中誤差的方法，得

$$m_s=\pm\sqrt{m_{T_1}^2+m_{T_2}^2+\cdots+m_{T_n}^2} \tag{7-19}$$

再将(7-18)式的关系，代入(7-19)，即可得到m_s与m_x，$m_y\cdots m_z$的关系如下：

$$m_s=\pm\sqrt{K_1^2m_x^2+K_2^2m_y^2+\cdots+K_n^2m_z^2} \tag{7-20}$$

(7-20)式可以說明：綫性函数的中誤差，等于每一相应常数（K_i）平方与相应自变量的中誤差平方之乘积的和的平方根。

例題 4 当以視距仪按公式$d=100\,l$測定距离时，标尺讀数l为視距絲两讀数之差，即$l=l'-l''$，若按一根絲讀数之中誤差为$\pm t$，而系数100为常数是沒有誤差的，求距离d的中誤差m_d。

解：l是上下的二視距絲讀数之差求得的，那么，視距絲讀数为独立的自变量。所以，$d=100(l'-l'')$。这一函数是綫性函数，所以应按(7-20)式来求定m_d。

$$m_d=\pm\sqrt{100^2\cdot m_{l'}^2+100^2\cdot m_{l''}^2}=\pm 100t\sqrt{2}.$$

$$\because m_{l'}=m_{l''}=\pm t$$

$$\therefore m_d=\pm 100t\sqrt{2}$$

習　　題

1. 如果水准測量每公里的中誤差为$\pm K$毫米，求n公里長的水准路綫中誤差（这n公里水准測量是同精度的，起始点的誤差不予考虑）。

2. A点高程为71.517米，它的中誤差$m_A=\pm 0.1$米；B点对A点的高差$H_{AB}=+10.314$米，$m_{AB}=\pm 0.02$米；C点对B点的高差$H_{BC}=-30.417$米，$m_{BC}=\pm 0.12$米，求C点的高程及其中誤差。