

● 非线性科学丛书 ●

分形几何的数学基础

文志英 编著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

图书在版编目 (CIP) 数据

分形几何的数学基础/ 文志英编著. —上海:上海科技教育出版社, 2000.12

(非线性科学丛书 / 郝柏林主编)

ISBN 7-5428-1674-8

I. 分… II. 文… III. 分形几何-数学理论
IV. 0189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 10035 号

非线性科学丛书

分形几何的数学基础

文志英 编著

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200233)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850 × 1168 1/32 印张 12 字数 299 000

2000 年 12 月第 1 版 2000 年 12 月第 1 次印刷

印数 1-2 000

ISBN 7-5428-1674-8/O-172 定价: (精装本) 24.00 元

出版说明

现代自然科学和技术的发展,正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科,与日新月异的新技术相结合,使用数值、解析和图形并举的计算机方法,推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征,可以概括为“非”字当头,即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中,非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”,而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时,非线性还被人们当作个性极强,无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法,运用新颖的技巧。诚然,力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程,物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过,这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品,人们还没有悟出它们的普遍启示,也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期,事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面,描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算,揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径,即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念,反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代,反散射方法推广到量子问题,发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者们将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

本书介绍分形几何的基础理论. 在取材时, 考虑到下述因素:

1. 近年来, 特别是近几年来, 分形的研究的发展非常迅速, 新的有重要意义的结果不断出现, 一些经典的难题亦先后被解决, 与各个领域的深刻联系一再被揭示, 新的有效的工具陆续引入, 在其他学科的成功的应用愈来愈多. 因此, 在一本以基础知识为主要内容的书中, 要全面介绍这些新的进展是很困难的.

2. 自 20 世纪 70 年代以来, 分形几何的研究的一个显著的特点是, 人们各自从原来的研究领域中将他们的问题及其研究技巧带入这个新的领域, 随着研究的深入, 这些问题与技巧往往归结为分形几何中的一些基本问题.

3. 分形几何与几何测度论有许多交叉(尽管处理它们的方式与角度可能不相同), 在这部分材料的选择与处理上(当然不可避免地涉及到作者个人的兴趣与观点)应更偏向于分形几何.

4. 我们希望本书的读者面尽可能广.

基于上述考虑, 我们将本书的内容主要集中在分形几何的最基础的部分, 并忍痛舍弃一些非常有诱惑力的内容. 具体说明如下.

1. 我们着重讲述分形的各种测度与维数的理论, 它们之间的差别与联系, 整体与局部性质, 计算它们的方法与技巧. 并通过对几类典型的分形集, 特别是自相似集, 深入展开讨论.

2. 我们未列入分形的密度理论, 可求长性理论以及 s -集的构造; 我们也没有讲述分形与其他学科的联系(包括分形的随机理论)以及分形在其他学科中的应用. 但我们列出了相关的参考文献.

3. 测度的重分形分析, 动力系统的分形理论以及切测度均是近年来非常活跃的课题, 每一个课题都需要一本专著才能较为全面地介绍. 因此, 我们分别在第 11 章, 第 12 章, 第 13 章(作为切测度的应用, 证明了密度理论的玛斯传德定理)中介绍了上面三个课题的最基本的内容.

4. 本书可以作为研究生或大学数学系, 物理系高年级学生的分形几何课程的教材, 也可以作为科研工作者的参考书. 为了避免过多的预备知识, 我们在附录中将本书所要的知识最低限度地列入. 在上述意义下, 我们力求使本书的内容自包含.

5. 每一章最后列入了一些评注与参考文献, 供读者进一步了解与该章有关的内容.

本书写作过程中得到不少人的支持与帮助. 丰德军博士阅读了本书手稿, 华苏教授, 吴军教授分别仔细校阅了本书初稿, 他们都提出了很好的修改意见. 丰德军, 吴军分别提供了第 12 章与第 13 章的材料. 文志雄教授, 饶辉博士分别使用本书初稿给武汉大学的研究生与数学系高年级本科生开设了分形几何的课程, 根据教学的情况, 他们都给作者提出了很有价值的修改意见. 文含提供了本书的 Latex 初稿. 作者于此一并致以诚挚的谢意.

文志英

1998 年 11 月于清华园

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：(按姓氏笔画为序)

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

Abstract

The main theme of this book is the study of fractal geometry.

The author provides a firm and unified foundation for the subject and develops all the main tools in its study. Thus the book is essentially self-contained for graduate students in mathematics: it is primarily targeted at them and researchers. The first ten chapters present the fundamental theory of fractal geometry, such as covering theorems, techniques of estimating different measures and dimensions, some kinds of typical fractals: self-similar sets, self-affine sets, general Moran sets, fractal structures of measures. The last three chapters of the book are devoted to multifractal analysis, fractal aspects of dynamical system and tangent measures.

目 录

非线性科学丛书出版说明

前言

第 1 章 引论	1
第 2 章 豪斯多夫测度与豪斯多夫维数	20
§ 1 豪斯多夫测度及其性质	20
§ 1.1 定义及初等性质	20
§ 1.2 网测度及其比较	24
§ 1.3 康托三分集的豪斯多夫测度	25
§ 2 覆盖引理	28
§ 2.1 $5r$ -覆盖引理	28
§ 2.2 维塔利覆盖引理	31
§ 2.3 伯西柯维奇覆盖引理	34
§ 3 豪斯多夫维数及其性质	37
§ 3.1 豪斯多夫维数的定义及其初等性质	37
§ 3.2 质量分布原理	39
§ 3.3 比林斯利定理	43
§ 4 势, 能量与容量	49
§ 4.1 弗罗斯特曼引理	49
§ 4.2 势, 能量与容量	52
§ 5 有限测度子集	55
§ 5.1 2-进网测度	55
§ 5.2 弱等价网测度	59
§ 5.3 有限测度子集	63
第 3 章 其他的测度与维数	68

§ 6	闵可夫斯基容度与闵可夫斯基维数	68
§ 7	填充测度与填充维数	75
§ 7.1	修正测度与修正维数	75
§ 7.2	填充测度与填充维数	77
§ 7.3	各种维数的比较	80
§ 8	闵可夫斯基维数的进一步讨论	83
§ 8.1	维数的纲性	84
§ 8.2	上、下闵可夫斯基维数间的介值性质	89
§ 8.3	上闵可夫斯基维数的连续性	91
第 4 章	分形的乘积与投影	97
§ 9	分形的乘积	97
§ 9.1	半 2 - 进网及其网测度性质	99
§ 9.2	分形乘积的玛斯传德定理	103
§ 10	分形的投影	106
第 5 章	自相似集	114
§ 11	自相似集的结构与维数	114
§ 11.1	压缩映射与不变集	114
§ 11.2	符号空间	118
§ 11.3	自相似集的维数	119
§ 12	自相似集的正则性	127
§ 13	开集条件的刻画(席夫定理)	131
§ 14	马利昂集	136
§ 15	具重叠结构的自相似集(λ -康托集)	139
§ 15.1	λ -康托集	139
§ 15.2	重叠的分类	142
§ 15.3	具完全重叠的 E_λ 的结构	144
§ 15.4	完全重叠的例	146
第 6 章	自仿集	151
§ 16	麦克缪伦集	152

第 7 章 递归集	164
§ 17 递归集	164
第 8 章 莫朗集	176
§ 18 一般莫朗集的构造及维数	176
§ 18.1 一般莫朗集的构造	177
§ 18.2 一般莫朗集的维数(压缩比下确界大于 0 的情形)	179
§ 18.3 一般莫朗集的维数(压缩比下确界为 0 的情形) ..	190
§ 19 一维齐次莫朗集	200
§ 19.1 齐次与偏齐次均匀康托集的维数	201
§ 19.2 一维齐次莫朗集的维数性质	205
第 9 章 测度的分形结构	210
§ 20 测度的维数	210
§ 20.1 定义与性质	210
§ 20.2 单维测度	218
§ 21 测度的其他指数	224
第 10 章 函数图象的维数	231
§ 22 函数图象的维数性质	232
§ 22.1 函数图象的闵可夫斯基维数	232
§ 22.2 函数图象的豪斯多夫维数	238
§ 23 几类函数图象的维数	242
§ 23.1 外尔斯特拉斯函数	243
§ 23.2 伯西柯维奇函数	246
§ 23.3 拉德马赫尔级数	253
第 11 章 测度的重分形分析	260
§ 24 测度的重分形机理	260
§ 24.1 基本不等式	262
§ 24.2 重分形机理成立的情形	264
§ 24.3 吉布斯测度的存在性	266

第 12 章 动力系统与分形	272
§ 25 切饼集的豪斯多夫维数和鲍恩公式	272
§ 25.1 切饼集	272
§ 25.2 切饼集的豪斯多夫维数的鲍恩公式	277
§ 26 测度的维数、熵与李雅普诺夫指数间的关系	279
第 13 章 切测度	289
§ 27 切测度的基本性质	289
§ 28 密度与切测度	296
附录 A 测度论基础知识	304
A.1 一般测度论	304
A.2 概率论的有关结果	310
附录 B 正交群与格拉斯曼流形上的不变测度	312
B.1 正交群上的不变测度	312
B.2 格拉斯曼流形上的不变测度	313
附录 C 动力系统	314
C.1 遍历定理	314
C.2 测度熵, 拓扑熵, 压力与吉布斯测度	314
C.3 李雅普诺夫指数	316
参考文献	318
索引	347
数学符号	354
外国科学家中译名表	358

Contents

Preface

Chapter 1 Introduction 1

Chapter 2 Hausdorff measure and Hausdorff dimension 20

§ 1 Hausdorff measure and its Properties 20

§ 1.1 Definition and Some Elementary Properties 20

§ 1.2 Net Measures and Comparison 24

§ 1.3 Hausdorff Measure of the Middle-Third Cantor set 25

§ 2 Covering Lemmas 28

§ 2.1 δ -Covering Theorem 28

§ 2.2 Vitali Covering Theorem 31

§ 2.3 Besicovitch Covering Theorem 34

§ 3 Hausdorff Dimensions and Properties 37

§ 3.1 Definition of the Hausdorff Dimension and Elementary Properties 37

§ 3.2 Principle of the Mass Distribution 39

§ 3.3 Billingsley Theorem 43

§ 4 Potential, Energy and Capacity 49

§ 4.1 Frostman Lemma 49

§ 4.2 Potential, Energy and Capacity 52

§ 5 Subsets of Finite Measure 55

§ 5.1 Binary Net Measure 55

§ 5.2 Weak Equivalent Net Measure 59

§ 5.3	Substes of Finite Measure	63
Chapter 3	Other Measures and Dimensions	68
§ 6	Minkowski Content and Minkowski Dimension	68
§ 7	Packing Measure and Packing Dimension	75
§ 7.1	Modified Measure and Modified Dimension	75
§ 7.2	Packing Measure and Packing Dimension	77
§ 7.3	Comparison of Different Dimensions	80
§ 8	Further Discussions of Minkowski Dimension	83
§ 8.1	Category of the Dimensions	84
§ 8.2	Medium Property of Upper and Lower Minkowski Dimension	89
§ 8.3	Continuity of Upper Minkowski Dimension	91
Chapter 4	Products and Projections of Fractals	97
§ 9	Products of Fractals	97
§ 9.1	Half Binary Net and Properties of the Net Measure	99
§ 9.2	The Mastrand Theorem of Products of Fractals	103
§ 10	Projections of Fractals	106
Chapter 5	Self-Similar Sets	114
§ 11	Structures and Dimensions of Self-Similar Sets	114
§ 11.1	Contracting Mappings and Invariant Sets	114
§ 11.2	Symbolic Space	118
§ 11.3	Dimensions of Slef-Similar Sets	119
§ 12	Regularity od Self-Similar Sets	127
§ 13	Characterization of the Open Set Condition	131
§ 14	Marion sets	136
§ 15	Self-Similar Sets with Overlapping Structures	139
§ 15.1	λ - Cantor Sets	139

§ 15.2	Classification of the Overlaps	142
§ 15.3	Structures of E_λ with Complete Overlap	144
§ 15.4	Examples	146
Chapter 6	Self-Affine Sets	151
§ 16	McMullen Sets	152
Chapter 7	Recurrent Sets	164
§ 17	Recurrent Sets	164
Chapter 8	Moran Sets	176
§ 18	Structures and Dimensions of General Moran Sets	176
§ 18.1	Structures of General Moran Sets	177
§ 18.2	Dimensions of General Moran Sets (Case that Infimum of Contracting Ratios Is Positive)	179
§ 18.3	Dimensions of General Moran Sets (Case that Infimum of Contracting Ratios Is Zero)	190
§ 19	One-Dimensional Homogeneous Moran Sets	200
§ 19.1	Dimensions of Homogeneous and Partial Homogeneous Cantor Sets	201
§ 19.2	Properties of One-Dimensional Homogeneous Cantor Sets	205
Chapter 9	Fractal Structures of Measures	210
§ 20	Dimensions of Measures	210
§ 20.1	Definitions and Properties	210
§ 20.2	Unique Dimensional Measures	218
§ 21	Other Exponents of Measures	224
Chapter 10	Dimensions of Graphs of Functions	231
§ 22	Properties of Dimensions of Graphs	232
§ 22.1	Minkowski Dimensions of Graphs	232
§ 22.2	Hausdorff Dimensions of Graphs	238

§ 23	Dimensions of Several Kinds of Graphs	242
§ 23.1	Weierstrass Function	243
§ 23.2	Besicovitch Function	246
§ 23.3	Radamacher Function	253
Chapter 11	Multifractal Analysis of Measures	260
§ 24	Multifractal Analysis of Measures	260
§ 24.1	Fundamental Inequality	262
§ 24.2	Conditions for Holding Multifractal Mechanism	264
§ 24.3	Existence of Gibbs Measure	266
Chapter 12	Dynamical System and Fractals	272
§ 25	Hausdorff Dimension and Bowen Formula of Cookie- Cutter Sets	272
§ 25.1	Cookie-Cutter Sets	272
§ 25.2	Bowen Formula of Hausdorff Dimension of Cookie-Cutter Sets	277
§ 26	Relationship among Dimension, Entropy and Lya- pounov Exponent of Invariant Measure	279
Chapter 13	Tangent Measure	289
§ 27	Basic Properties of Tangent Measures	289
§ 28	Densities and Tangent Measures	296
Appendix A	Basic Measure Theory	304
A.1	General Measure Theory	304
A.2	Related Results of Probability Theory	310
Appendix B	Invariant Measures of Orthogonal Groups and Grassmannian Manifolds	312
B.1	Invariant Measures of Orthogonal Groups	312
B.2	Invariant Measures of Grassmannian Manifolds	313
Appendix C	Dynamic System	314