

科學圖書大庫

數理統計與水文統計學

著者 張玉田

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

數理統計與水文統計學

著者 張玉田

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會  
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

# 科學圖書大庫

版權所有

不許翻印

中華民國六十七年十一月十一日初版

## 數理統計與水文統計學

基本定價 3.80

著者 張玉田 國立成功大學水利系教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7812686號  
7815250

發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號

承印者 燕南彩色印刷有限公司 電話：3121392 • 3015790

# 前 言

降雨量、河川流量、或其他各種水文量，係受自然界之物理要素與機率要素所支配之不定量，在各項水工計劃時，將此等水文量如何評價及如何決定作為計劃之基準，乃極其重要且難解之問題。對此，吾人認為此等水文量係由於某種法則之機率過程中所求得之實現值，在計算過程中，所應用者係探討統計法則之近似方法。此種應用統計學之一分野，稱為水文統計學。

此水文統計學，係研究如何能對水工計劃提供有效情報之學問，惟目前尚未達到充分研究之階段。其原因有：(1)研究對象為自然現象，資料之重新觀測或補充較難。(2)資料之精度係受觀測組織、方法、儀器等之限制，過去資料之觀測難免有所欠缺，故不易獲得長期間之資料。(3)水文諸量多半為非正常分佈。(4)到目前為止，研究之重點僅限於一變數頻率特性之分析，故對非經常發生之水文量的推定乃成為研究之問題。

水文統計學之使命為：探討水文諸事件之統計法則，並在實用上以充分之精度，解決水工學上之諸問題。今後特別須加以研究之課題有：(1)水文諸量本身乃至於相互間之相關問題。(2)水文諸量經年之傾向問題與水文諸量應用於水工計劃之方法。(3)依OR之理論，確立最適切之計劃方案。(4)研討水文諸量之時間性與地域性。

# 自序

數理統計學近年以破竹之勢，應用在各種科學之研究，過去吾人僅識統計學為經濟、數學之一部分。但今日已應用在自然科學，社會科學，人文科學及一般工程界。尤其水利工程之興建，均以水文統計之理論，推求各種機率水文量，為水工設計規劃之依據。

水文統計之理論基礎為數理統計之原理，故第一篇先說明數理統計之原理及應用。第二篇乃以此原理解說水文統計之理論，公式之誘導，並配以實際之資料為例題來說明機率水文量之各種計算方式，及台灣省機率降雨強度公式之求法。

本書第一篇之數理統計係根據京都大學教授中江龍夫博士在京都大學之授課講義及其他書籍；第二篇之水文統計則採自京都大學教授角屋睦博士所著之水文統計論及本人歷年所發表之論文，加以整編而成。書中部分例題係角屋睦博士所提供，並承蒙中江，角屋兩位教授熱心指導始得完成，特向兩位教授致最高之謝意。

編寫期間，承成大水利及海洋工程研究所潘全成，鄭連焜兩位同學協助整理及謄寫，謹此致謝。

本人不揣諳陋，編寫此書，尚希專家學者，多賜指正，俾於再版時改進，無任銘感。

國立成功大學教授兼水利  
及海洋工程研究所所長 張玉田  
日本國立京都大學工學博士

序於中華民國六十七年八月一日



翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

**自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；**

**旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；**

**大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者**

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良發行系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

# 目 錄

自序

前言

## 第一篇 數理統計

### 第一章 機 率

- 1-1 排列與組合..... 1
- 1-2 機率之基本定理..... 4

### 第二章 機率分佈

- 2-1 隨機變數..... 15
- 2-2 平均值或期望值 ( 間斷一元隨機變數 )..... 15
- 2-3 變異數與標準偏差..... 17
- 2-4 二項分佈之隨機變數  $x$  在 Chebyshev 定理之應用..... 24
- 2-5 力矩母函數..... 27
- 2-6 間斷兩元機率分佈..... 29

### 第三章 相間係數

- 3-1 相關關係..... 34
- 3-2 隨機變數  $x$  之標準化..... 35
- 3-3 相關係數..... 36



3-4	相關表	38
<b>第四章 Gamma 函數, Beta 函數</b>		
4-1	Gamma 函數	42
4-2	Beta 函數	43
4-3	Gamma 函數與 Beta 函數之關係	43
<b>第五章 連續分佈</b>		
5-1	一元隨機變數	48
5-2	二元隨機變數	49
5-3	Gauss 分佈	50
5-4	Gauss 之標準正常分佈	53
5-5	醉漢漫步	55
5-6	多變數之 Gauss 分佈	59
<b>第六章 曖昧度</b>		
6-1	Entropy $\epsilon(\alpha)$ 之定義	66
6-2	Entropy $\epsilon(\alpha)$ 之極大值	67
6-3	試行 $\alpha, \beta$ 同時發生之 Entropy	68
6-4	條件 Entropy	69
<b>第七章 群體</b>		
7-1	概說	75
7-2	群體平均與變異數	75
7-3	樣本平均之平均與樣本平均之變異數	75
7-4	正常群體之樣本	79
<b>第八章 統計推定</b>		
8-1	概說	82
8-2	正常分佈群體平均值 $m$ 之推定 (群體變異數已知時)	82

8-3	正常分佈群體平均值 $m$ 之推定 ( 群體變異數不知時 )	83
8-4	正常分佈群體變異數 $\sigma^2$ 之推定 ( 群體平均值不知時 )	86
8-5	比率區間之推定	87
8-6	相關係數之推定	89

## 第九章 統計假設之檢定

9-1	概說	91
9-2	第一種與第二種誤差	94
9-3	正常分佈群體平均值 $m$ 之檢定 ( 群體變異數已知時 )	98
9-4	正常分佈群體平均值 $m$ 之檢定 ( 群體變異數不知時 )	99
9-5	正常分佈群體變異數 $\sigma^2$ 之檢定	99
9-6	適合度之檢定	101
9-7	獨立性之檢定	105
9-8	相關係數之檢定	108

## 第十章 變異數分析法

10-1	概說	112
10-2	一因子變異數分析法	112
10-3	二因子變異數分析法	118

## 第十一章 機率過程

11-1	馬可夫過程	122
11-2	推移機率行列與機率向量	130
11-3	柏松過程	135

## 第二篇 水文統計

### 第十二章 復現期距

12-1	概說	139
12-2	利用機率紙之簡略推定	141

12-3	機率密度函數	150
------	--------	-----

### 第十三章 指數型分佈

13-1	概說	153
13-2	指數型分佈之特性	154
13-3	指數型分佈之解法	160
13-4	機率水文量之推定	164
13-5	指數型分佈計算例	167

### 第十四章 極端值(最大值)分佈

14-1	概說	173
14-2	極端值(最大值)分佈之實用形與特性	175
14-3	極端值(最大值)分佈之解法	183
14-4	機率水文量之推定	194
14-5	資料之棄却檢定	200
14-6	極端值(最大值)分佈計算例	201

### 第十五章 極端值(最小值)分佈

15-1	概說	219
15-2	極端值(最小值)分佈之特性	219
15-3	極端值(最小值)分佈之解法	223
15-4	機率水文量之推定	224
15-5	極端值(最小值)分佈之計算例	225

### 第十六章 對數正常分佈

16-1	概說	228
16-2	對數正常分佈之實用形式與特性	228
16-3	對數正常分佈之解法	234
16-4	機率水文量之推定	242
16-5	變動域	245

16-6	資料之棄却檢定.....	246
16-7	對數正常分佈之計算例.....	246
<b>第十七章 Log-Pearson III型法</b>		
17-1	基本公式.....	253
17-2	計算方式.....	257
17-3	Log-Pearson III型之計算例.....	257
<b>第十八章 小河原法</b>		
18-1	概說.....	260
18-2	經驗變換曲線之推定.....	260
18-3	變換曲線之外插.....	261
18-4	機率水文量之推定.....	262
18-5	小河原法之計算例.....	263
<b>第十九章 回歸線與相關</b>		
19-1	概說.....	269
19-2	線性回歸與相關係數.....	269
<b>第二十章 臺灣降雨特性及計劃雨</b>		
20-1	概說.....	279
20-2	短時間機率降雨強度公式之計算法.....	280
20-3	臺北市短時間機率降雨強度公式.....	290
20-4	長時間機率降雨強度公式之計算法.....	292
20-5	臺北市長時間機率降雨強度公式.....	295
20-6	臺灣各機率年 60 分鐘降雨強度 $R_N^{60}$ 及 10 分鐘特性係數值 $\beta_N^{10}$ 之分佈圖.....	298
20-7	臺灣各機率年日雨量 $R_N^{24}$ 及 1 小時特性係數值 $\beta_N^1$ 之分佈圖.....	300

## 第二十一章 降雨特性之新計算方法

21-1	概說.....	339
21-2	由分配率求降雨歷程線之新計算方法.....	339
21-3	新計算法之計算例.....	342
附錄表.....		352
索引.....		368
參考文獻.....		370

# 第一篇 數理統計

## 第一章 機 率

### 1-1 排列與組合 (Permutation and Combination)

由1連乘至 $n$ 稱爲 $n$ 階乘，以 $n!$ 示之如下：

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdots (n-1) \cdot n \quad n : \text{正整數}$$

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

$$1! = 0! \times 1$$

$$0! = 1$$

定理1-1

自 $n$ 個不同事物中，取出 $k$ 個排成一列，所成不同之排列數，以符號 ${}_n P_k$ 示之如下：

$${}_n P_k = n \cdot (n-1) \cdots \cdots (n-k+1)$$

證明：

自 $n$ 個不同事物中，取出 $k$ 個排成一列，第一次有 $n$ 種取法，第二次因剩下 $n-1$ 個不同事物，故有 $n-1$ 種取法。依此類推，第 $k$ 次有 $n-(k-1)$ 種取法，亦即有 $(n-k+1)$ 種取法。故 ${}_n P_k = n \cdot (n-1) \cdots \cdots (n-k+1)$

系1-1

$${}_n P_k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad n \geq k \geq 1$$

證明：

$$\begin{aligned} {}_n P_k &= n \cdot (n-1) \cdots \cdots (n-k+1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots \cdots (n-k+1) [(n-k)(n-k-1)\cdots 1]}{[(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1]} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

例 1-1 自六個數字中，取出四個，排成四位數，有幾種排列法？

解：千位 百位 十位 個位

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ 種排列法。}$$

設  $k=0$  時，於定理 1-1，則不明其意，但由系 1-1 則得：

$${}_n P_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

當  $k=n$

$$\text{則 } {}_n P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

定理 1-2

自  $n$  個不同的事物中，取出  $k$  個組成一組（但不顧及其排列方法），可得各種不同的組數，以符號  ${}_n C_k$  示之如下：

$${}_n C_k = \frac{{}_n P_k}{{}_k P_k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

證明：

設自  $n$  個不同的事物中，取出  $k$  個組成一組，共有  $x$  種組合法。因每一組均有  $k$  個元素，故在每一種組合法中，若全取而排列之，有  ${}_k P_k$  種排列法， $x$  種組合法中，共有  $x \cdot {}_k P_k$  種排列法，故  ${}_n P_k = x \cdot {}_k P_k$ ，即  $x = {}_n P_k / {}_k P_k$ ，而  $x$  即為有  ${}_n C_k$ ，故  ${}_n C_k = {}_n P_k / {}_k P_k$ ，或

$${}_n C_k = \frac{{}_n P_k}{{}_k P_k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$\text{當 } k=0 \text{ 時， } {}_n C_0 = \frac{n!}{n! 0!} = 1$$

定理 1-3

$${}_{n+1} C_k = {}_n C_k + {}_n C_{k-1}$$

證明：

$$\begin{aligned}
 {}_{n+1}C_k &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \\
 {}_n C_k + {}_n C_{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\
 &= \frac{(n-k+1)n!}{(n-k+1)(n-k)!k!} + \frac{n!k}{(n-k+1)!(k-1)k} \\
 &= \frac{n!(n-k+1+k)}{(n-k+1)!k!} \\
 &= \frac{n!(n+1)}{(n-k+1)!k!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!}
 \end{aligned}$$

故  ${}_{n+1}C_k = {}_n C_k + {}_n C_{k-1}$

例 1-2 有  $x, y, z$  三個正整數，欲使  $x+y+z=n$  之加法有幾種解：

從 1 至  $n$  共有  $(n-1)$  個間隔，在其中二個間隔，分別各劃一直線，即可分成三組，故其加法共有  ${}_{(n-1)}C_2$  種。今  $n=5$  時，則三個正整數相加共有  ${}_4C_2=6$  種方法。

例 1-3 四人分乘兩艘船，每艘船有三個座位，問有幾種不同的坐法解：

1. 船及人均不予分別：

	A 船	B 船
(1)	3 人	1 人
(2)	2 人	2 人

有 2 種座法

2. 將船予以分別：

	A 船	B 船
(1)	3 人	1 人
(2)	1 人	3 人



(3) 2人 2人  
有3種坐法

3. 船及人均予分別：

	A 船	B 船	
(1)	3人	1人	有 $C_1 = 4$ 種
(2)	1人	3人	有 $C_1 = 4$ 種
(3)	2人	2人	有 $C_2 = 6$ 種

故共有14種坐法

4. 船，人及座位均予以分別：

若此四人為甲，乙，丙，丁。甲先坐有6種方法，乙再坐有5種方法，丙有4種方法，丁有3種方法，故全體之坐法有  $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$  種

## 1-2 機率之基本定理 (Fundamental Theorem of Probability)

擲骰子一粒，或出1點、2點……6點，稱為事件 (event)，以 A、B……F 等示之。如  $A = \{1\}$ 、…… $F = \{6\}$ 。

一定發生之事件稱為全事件，以 I 表示之，設以擲骰子為例，則  $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。不發生之事件稱為空事件以 0 表示之。

事件 A 之相補事件，以  $\bar{A}$  表示之。 $\bar{A}$  即非 A 之事件。以擲骰子為例。若  $A = \{1, 3, 5\}$ ，則  $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$ 。

$A \cup B$  稱為 A、B 之和事件。為“A或B”之符號，即為 A 或 B 或 A、B 二者兼之。如  $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$

$A \cap B$  稱為 A、B 之積事件。為“A且B”之符號，即為 A 與 B 兩者同時存在。如： $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}$ 。

今舉一例說明：設 A 事件為  $\{3\}$ 、 $\{5\}$ 、 $\{6\}$ 。B 事件為  $\{2\}$ 、 $\{3\}$ 、 $\{6\}$ ，則  $A \cup B$  為  $\{2\}$ 、 $\{3\}$ 、 $\{5\}$ 、 $\{6\}$ ， $A \cap B$  為  $\{3\}$ 、 $\{6\}$ 。

1. 機率之定義：

在  $n$  次實驗中，事件 A 發生  $k$  次，設  $n$  極大時，則  $k/n$  接近一定