新

中考数学解题指导与训练

叶锦义 · 主编

★ 巩固基础知识

★ 总结答题规律

★ 强化能力训练

★ 提升应试水平

上海社会科学院出版社

中考数学解题指导与训练

ZHONGKAO SHUXUE JIETI ZHIDAO YU XUNLIAN

主编 · 叶锦义

撰稿 · 陈慧珍　沈　洁　江国华
时　俊　陈永德　徐文毅
宋德秀　沈全洪　齐　敏
杨明华　蔡则彪

上海社会科学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学解题指导与训练/叶锦义主编．—上海：上海社会科学院出版社，2003

ISBN 7-80681-162-1

Ⅰ. 中… Ⅱ. 叶… Ⅲ. 数学课-初中-升学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 007717 号

中考数学解题指导与训练

主　　编:叶锦义
特约编辑:黎　雅
责任编辑:汝　东
封面设计:闵　敏
出版发行:上海社会科学院出版社
　　　　　上海淮海中路 622 弄 7 号　电话 63875741　邮编 200020
　　　　　http://www.sassp.com　E-mail: sassp@online.sh.cn
经　　销:新华书店
印　　刷:无锡市江溪书刊印刷厂
开　　本:787×1092 毫米　1/16 开
印　　张:22.25
字　　数:514 千字
版　　次:2003 年 3 月第 1 版　2003 年 3 月第 1 次印刷
印　　数:0001—5500

ISBN 7-80681-162-1/G・048　定价:30.00 元

前　　言

当前，旨在进一步推进素质教育的课程教材改革，正在本市乃至全国全面展开。在这种新形势下，中考，作为素质教育所必需的一环，当然应该更体现“以学生的发展为本”，有利于学生的创新精神与实践能力的培养，有利于数学教育教学的改革。在这种新形势下，每位要在高一级学校更能主动、从容学习的同学，必须要对初中阶段数学学科的学习作一番总结、反思，自主地寻求数学学习的内在规律，总结数学的基本思想方法，从而真正做到“学会学习数学”。我们编写的这本《中考数学解题指导与训练》，就是在这样的要求下与同学们见面了。

《中考数学解题指导与训练》共有十二章，其中第一至第九章是将初中阶段数学内容分块整理，按知识体系而编写的；第十至第十二章是根据近年来数学教学中对学生综合运用知识能力、实际应用能力、探究及实践操作能力要求的不断提高而编写的。当然，这几种能力要求的不断提高也明显地反映在近几年来的中考中。

在每章的每单元内容中，我们设置了[目标要求]、[解题指导]、[方法指导]、[自主训练]四个栏目。

[目标要求]——分析了本单元复习的知识技能、能力与思想方法应达到的要求，基本上指点出了中考的要求。过高或过低了，可能就不适当。

[解题指导]——选择了典型的、富有说服力的例题，凸现解题的思路，展示解题的规范性，给出了题目可能的变式，指引了题目可能进一步发展的方向，总结了题目之间的联系和注意要点。许多的例题，除了“分析”、“解”或“证明”、“说明”外，都配备了“变式与引申”这一小栏目。设置“变式与引申”小栏目是本书的一大特色，它可以是例题的简单变形，可以是条件、结结互换的逆命题，可以是改变某些条件后产生的新结论的探索题，可以是改变结论所要求新条件的探索题，可以是改变情景而内容实质不改变的“新脸”题，甚至是条件、结论都改变的开放题，等等。这一小栏目想必使同学们会有耳目一新之感。

[方法指导]——在总结单元内例题的基础上，进一步提炼本单元所蕴含的数学思想、数学方法，解题的规律、解题的技巧。当然，所有这些，同学们应在阅读本栏目前自主提炼、领悟，这样的效果更好。

[自主训练]——提供一份给同学们消化以上栏目涉及的数学内容、数学思想方法、解题规律、解题技巧甚至数学思维方法、数学思维方式的训练题目清单，这些训练题与例题相匹配，与中考要求相吻合。希望同学也能用“变式与引申”那种方式来对待这些训练题，这样才能真正体现你们的“自主性”，也许可以增大数学中考成功的可能性。

学生数学学习的基本模式是以解决数学问题为主线而展开的。而目前阶段，“解决数学问题”大量的还是停留在“解数学习题”上。这一点，即使中考也不例外。本书中，第一

至第九章中的例题及训练题基本上是“解数学习题”类型，第十至第十二章的例题及训练题大多是“解决数学问题”类型。从中大家可以看出，本书在“解决”“数学问题”上大大加强了力度，并在“解”“数学习题”上有所改进，有所突破（如增设“变式与引申”）。同学们在使用本书时，对“变式与引申”要充分体现本人的自主性，能动性，可再提出问题：“本题还可如何变式？如何引申？”长期勤思于此，必有重获。其次，在第十至第十二章的内容复习时，要自己收集、编拟一些开放题、探索题、操作实验题、应用问题，要研究编拟是否科学、规范；确是佳作，可以投稿给数学专业报刊。通过这种活动，经历这样的过程，你的数学水平定会有意想不到的长进。

本书在形成的过程中，得到了有关方面、有关同志的大力支持和鼎力帮助，在此表示衷心的感谢。

数学特级教师　叶锦义

2003.2.23

目　　录

第一章　实数与代数式

一、实数

[目标要求]

通过本单元的学习,我们应该知道:整数和分数统称为有理数;无限不循环小数叫做无理数;有理数和无理数统称为实数.并知道有理数与无理数的区别最关键的是有理数可以表示为分数的形式.

数轴是规定了原点、正方向和单位长度的直线,换句话说,数轴的三要素是:原点、正方向和单位长度;只有符号不同的两个数称为互为相反数,即互为相反数的两数和为零;两个数的积为1,这两个数称为互为倒数;正数的绝对值是其本身,零的绝对值是零,负数的绝对值是它的相反数,一个数的绝对值的几何意义是与这个数在数轴上对应的点到原点的距离.

实数的分类有两种:

$$(1)\ \text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数——有限小数或无限循环小数}\end{cases}\\ \text{无理数——无限不循环小数}\end{cases}$$

$$(2)\ \text{实数}\begin{cases}\text{正数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{正无理数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负数}\begin{cases}\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

我们还应该知道:实数与数轴上的点是一一对应的,实数大小比较,要遵循的法则是:(1) 正数大于零,负数小于零;(2) 正数大于负数;(3) 两个负数,绝对值大的反而小.数轴上右边的点表示的数总比左边的点表示的数大.

我们还应该会根据指定的精确度或有效数字的个数,用四舍五入法求实数的近似值,同时掌握科学记数法并会运用它表示数,注意 $a \times 10^k$ 中 a 的取值是 $1 \leqslant |a| < 10$.

在实数的运算中,要理解加、减、乘、除、乘方的意义,熟练掌握实数的运算法则、运算律、运算顺序.

只有掌握了以上知识点和运算方法，我们才能较快地理解题意，选择正确的方法进行解题.

［解题指导］

例 1 已知下列各数中：

$\sqrt{36}$、-3、$0.777\cdots$、$\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$、3.1415、$0.\dot{1}4\dot{9}$、$-\frac{5}{12}$、$0.2020020002\cdots$、$|1-\sqrt{3}|$、$-\sqrt{28}$、$\sqrt[4]{81}$、$\sin 60^\circ$、$\frac{31}{11}$、$\frac{\pi}{4}$.

(1) 属于自然数集的是________；

(2) 属于整数集的是________；

(3) 属于无理数集的是________；

(4) 属于非负实数集的是________.

分析 观察这 14 个数后，我们发现有些数必须先化简，然后再根据实数的意义，将这些数进行分类.

$$\sqrt{36}=6,\ \sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4},\ |1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1,\ -\sqrt{28}=-2\sqrt{7},\ \sqrt[4]{81}=3,\ \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因为$\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, π, $\sqrt{3}-1$ 是无理数，所以$\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-2\sqrt{7}$, $\frac{\pi}{4}$也是无理数，而 $0.2020020002\cdots$ 是无限不循环小数，因此是无理数.

解 在这些数中，

属于自然数集的是 $\sqrt{36}$, $\sqrt[4]{81}$；

属于整数集的是 $\sqrt{36}$, -3, $\sqrt[4]{81}$；

属于无理数集的是 $0.2020020002\cdots$, $|1-\sqrt{3}|$, $-\sqrt{28}$, $\sin 60^\circ$, $\frac{\pi}{4}$；

属于非负实数集的是 $\sqrt{36}$, $0.777\cdots$, 3.1415, $0.\dot{1}4\dot{9}$, $\sqrt[4]{81}$, $0.2020020002\cdots$, $|1-\sqrt{3}|$, $\sin 60^\circ$, $\frac{31}{11}$, $\frac{\pi}{4}$.

说明 判断一个数是有理数还是无理数，有时需要进行简单的计算，有些数常常形似而实非. 如$\sqrt{25}$形似无理数，而实是有理数；但$\frac{\sqrt{3}}{3}$形似分数，而实是无理数.

例 2 若 a, b 互为倒数，x, y 互为相反数，c 的绝对值等于 7，则 $ab-c^2+\frac{x+y}{x^2+y^2+z^2}=$________.

分析 由题意我们可以看到，a, b 互为倒数，x, y 互为相反数，由“互为相反数的两个数之和等于零，互为倒数的两个数之和等于 1”的性质，问题可以得到解决.

解 因为 a, b 互为倒数，得 $ab=1$.

又 x, y 互为相反数，即 $x+y=0$.

又 $|c|=7$ 则 $c^2=49$.

所以 $ab-c^2+\frac{x+y}{x^2+y^2+z^2}=1-49+0=-48$.

说明 解这类题目,关键是要熟知由定义而引出的性质,从而运用性质解题,使问题迎刃而解.

变式与引申 若条件不变,可以求:$c-ab+\dfrac{x+y}{x^4-y^4+z^4}$ 的值.(注意分类讨论)

例 3 在同一个数轴上用点表示下列各数:

(1) $2\dfrac{1}{2}$的相反数;(2) $-3\dfrac{1}{2}$ 的绝对值;

(3) $\dfrac{4}{3}$的相反数的倒数;(4) $-\dfrac{3}{5}$ 的倒数的相反数;

(5) -5 的倒数.

用符号“<”将这些数连接起来.

分析 解此题首先根据一个数的相反数、倒数和绝对值的概念,求出结果,然后在数轴上正确标出各点,利用“数轴上右边的点表示的数总比左边的大”用“<”连接.

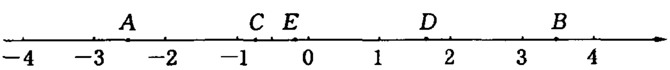
解 $2\dfrac{1}{2}$的相反数是 $-2\dfrac{1}{2}$, 用点 A 表示;

$-3\dfrac{1}{2}$ 的绝对值是 $3\dfrac{1}{2}$,用点 B 表示;

$\dfrac{4}{3}$的相反数的倒数是 $-\dfrac{3}{4}$, 用点 C 表示;

$-\dfrac{3}{5}$ 的倒数的相反数是$\dfrac{5}{3}$,用点 D 表示;

-5 的倒数是 $-\dfrac{1}{5}$, 用点 E 表示.



所以
$$-2\frac{1}{2}<-\frac{3}{4}<-\frac{1}{5}<\frac{5}{3}<3\frac{1}{2}$$

说明 正确解答此题的关键是熟知一个数的相反数、倒数和绝对值的概念,并会正确地在数轴上标点和读数,了解数轴正方向的意义是数值越来越大.

例 4 填空:

(1) 将 42.927 四舍五入精确到百分位得__________;

(2) 将 320 541 保留三个有效数字得__________;

(3) 将 1.423×10^4 按四舍五入法精确到千位得______;

(4) 用科学记数法表示 $-0.000\,051\,2=$ ________;

(5) 近似数 0.073 0 精确到______位,有____个有效数字;

(6) 由四舍五入法得到的近似数 0.41 万精确到____位,有效数字有____个,用科学记数法表示__________.

分析 解题以前,首先仔细观察题目,可发现(1)~(3)是根据精确度求近似值,(5)~(6)题是根据近似数求精确度,(4)(6)两小题用科学记数法表示数,a 的取值范围要搞清.

解 (1) 42.927 四舍五入精确到百分位是<u>42.93</u>;

(2) 320 541 保留三个有效数字是$\underline{3.21 \times 10^5}$；

(3) 1.423×10^4 按四舍五入法精确到千位是$\underline{1.4 \times 10^4}$；

(4) $-0.000\,051\,2 = \underline{-5.12 \times 10^{-5}}$；

(5) 近似数 0.073 0 精确到万分位，有三个有效数字；

(6) 由四舍五入法得到的近似数 0.41 万精确到百位，有效数字有两个，用科学记数法表示为$\underline{4.1 \times 10^3}$.

说明 第(2)小题很容易理解错误而得到 321 000，这与有效数字的概念不符，有效数字是指从左边第一个不为零的数字数到右边末位数，因而 321 000 的有效数字是六个，显然表达方式产生了错误，因此必须用科学记数法表示才正确.

例 5 比较下列各组数的大小：

(1) $-3\frac{5}{6}$ 和 $-3\frac{6}{7}$；

(2) $4\sqrt{5}$和 $5\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{13}-\sqrt{12}$ 和$\sqrt{12}-\sqrt{11}$；

(4) a 和$\sqrt{a}$ $(0<a<1)$.

分析 两个数比较大小，一般很难直接判断，需要我们观察题目后选择不同的方法进行转化，使两数得以比较. 第(1)题中我们只需比较两数的分数部分即可，利用同分母分数，分母相同，分子大的即大，再利用两个负数比较大小，绝对值大的反而小；第(2)题中可以将根号外的数放到根号内，然后比较被开方数的大小；第(3)题可以将分子有理化，利用两数中分子相同，分母大的反而小进行比较；第(4)题可以采用比较法，先计算两个数的差，根据差的符号来确定两个数的大小.

解 (1) 因为 $\frac{5}{6}=\frac{35}{42}$，$\frac{6}{7}=\frac{36}{42}$，

得 $\frac{35}{42}<\frac{36}{42}$.

所以 $-3\frac{5}{6}>-3\frac{6}{7}$.

(2) 因为 $4\sqrt{5}=\sqrt{16\times 5}=\sqrt{80}$，$5\sqrt{3}=\sqrt{25\times 3}=\sqrt{75}$，

而$\sqrt{80}>\sqrt{75}$，

得出 $4\sqrt{5}>5\sqrt{3}$.

(3) $\sqrt{13}-\sqrt{12}=\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{12}}$，

$\sqrt{12}-\sqrt{11}=\dfrac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$，

由于 $\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{12}}<\dfrac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$，

因此$\sqrt{13}-\sqrt{12}<\sqrt{12}-\sqrt{11}$.

(4) $a-\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)$，又 $0<a<1$，

得 $0 < \sqrt{a} < 1$.

所以 $\sqrt{a} - 1 < 0$

$\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) < 0$

$a - \sqrt{a} < 0$，即 $a < \sqrt{a}$.

说明 两数比较大小的方法很多，应该根据题目的不同类型，采用恰当的方法进行比较.

变式与引申 比较 $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ 与 $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ 的大小.（用两式平方法）

例 6 （1）$\sqrt[3]{5 - 2x}$ 是正的立方根，试求 x 的取值范围；

（2）若 $\sqrt[a-3]{a + b}$ 表示 $a + b$ 的正的平方根，其值为 2，求 a、b 的值.

分析 解这两题的关键是知道正的立方根、平方根的意义.

解 （1）因为 $\sqrt[3]{5 - 2x}$ 是正的立方根，

因此 $5 - 2x > 0$.

$x < \frac{5}{2}$.

即所求的取值范围是 $x < \frac{5}{2}$.

（2）由题意知：

$\begin{cases} a - 3 = 2, \\ a + b = 2^2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 5, \\ b = -1. \end{cases}$

说明 第(1)题中要防止多加等号；第(2)题中通过定义，将问题化归为解方程组，其中 $a + b = 4$ 不要误认为 $a + b = 2$.

变式与引申 若 $\sqrt[a-3]{x + y}$ 与 $\sqrt[b+3]{x + y}$ 是同类二次根式，求 a、b 的值.

例 7 计算：

$$\left[-3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} + (-2^3) \times 0.125 + (\sqrt{7} - \sqrt{5})^0 \div \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right] \div \left|2 \times (-2.25)^2 - 5\frac{5}{8}\right|$$

分析 这是混合运算，计算时要注意顺序，在没有括号的算式中，首先进行第三级运算（乘方、开方），然后进行第二级运算（乘、除），最后进行第一级运算（加、减）；算式里如果有括号，先进行括号内的运算；如果只有同一级运算，那么从左到右依次进行运算.

解 原式 $= \left[-\cancel{3} \times \frac{4}{\cancel{9}_3} + (-8) \times \frac{1}{8} + 1 \div \frac{3}{4}\right] \div \left|\cancel{2} \times \frac{81}{\cancel{16}_8} - 5\frac{5}{8}\right|$

$= \left[-\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} - 1 + \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right] \div \left|9\frac{9}{8} - 5\frac{5}{8}\right|$

$= -1 \div 4\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{8}_2}$

$= -1 \div \frac{9}{2} = -\frac{2}{9}$.

说明 运算中要注意，指数为负数时，运算后的底数要改变为原来底数的倒数.

例 8 计算：

$$-8.1 \div 2\frac{1}{4} \times \frac{4}{9} \div (-16) - 4 - 5^2 \div 5 \times [(-2) \times (-1)]^2.$$

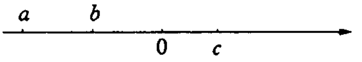
分析 此题运用上题的解法可以比较顺利地计算得到结果.

解 原式$= -8.1 \times \frac{\cancel{4}}{9} \times \frac{\cancel{4}}{9} \times \left(-\frac{1}{\cancel{16}}\right) - 4 - 5 \times 4$

$= 0.1 - 4 - 20$

$= -23.9.$

例 9 若在数轴上 a, b, c 三个实数所对应的点的位置如图所示,化简



$$\frac{\sqrt{a^2} + |a-b| + |a+b| + |-3c|}{\sqrt{a^2 - 2ac + c^2}}.$$

分析 解这类题目,首先由数轴上的点的位置,得到 a、b、c 的取值范围,再由数轴上右边的数总比左边的数大,可以确定 $a-b$, $a+b$, $a-c$ 的正负,最后由二次根式的性质以及绝对值的性质,可以化简待求的算式.

解 由题意可知:

$a < 0$, $b < 0$, $c > 0$,且 $|a| > |b|$,

则 $a - b < 0$, $a + b < 0$, $a - c < 0$.

原式$= \dfrac{-a - a + \cancel{b} - a - \cancel{b} + 3c}{c - a}$

$= \dfrac{3c - 3a}{c - a}$

$= 3.$

说明 此题通过数形结合,得到了隐含在图中的已知条件,进而能够化简待求的算式.

例 10 已知 x, y 是实数,且 $|2x - y + 1| + 2\sqrt{3x - 2y + 4} = 0$.

求:y^x.

分析 给出的方程中,$|2x-y+1|$ 与$\sqrt{3x - 2y + 4}$ 都是非负数,因此根据非负数的意义,可以将问题转化为方程组,通过解方程组,可以得到 x, y 的值,再代入待求的代数式求值.

解 由题意可知:

$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 3x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x = 2, \\ y = 5. \end{cases}$

$y^x = 5^2 = 25.$

说明 此题的关键是由绝对值、二次根式的定义,将问题转化为解方程组. 化归的数学思想在解题中常常会体现,利用转化的数学方法,许多问题均可以迎刃而解.

变式与引申 若 $(2x - 3)^2 + \sqrt{x + 2y - 4} = 0$, 求 xy.

[方法指导]

本单元中,主要渗透了数形结合、化归和分类讨论的数学思想,运用这些数学方法,我们尽可能找出题目中的一些隐含条件,使原本难以解决的问题迎刃而解;或者通过转化,

使问题变为我们熟悉的,或操作性较强的问题,继而求出未知量.

[自主训练]

A 组

1. 填空题:

(1) 已知下列各数: -23, 3.1416, $\sqrt{144}$, $-\pi$, 0, $\mathrm{tg}\,60°$, $-\sin 30°$, $\cos 60°$, $-\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$, $\frac{1}{3}$, $(-\sqrt{2})^2$,其中:

① ________是无理数;

② ________是分数;

③ ________是自然数;

④ ________与________互为倒数;

⑤ ________与________互为相反数.

(2) 如果 a 的倒数是 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, 那么 a 的相反数是________.

(3) 由四舍五入法得到近似数 502.0330,那么这个近似数精确到________位,用科学记数法表示为________.

(4) 如果 5 是 a 的相反数,那么 $|a-5|=$ ________.

(5) 数 3.5 比数 $3.\dot{5}$____.(填入"大"或"小")

2. 选择题:

(1) 如果两个实数之积是无理数,那么 ( )

(A) 两数都是无理数;
(B) 两数都是有理数;
(C) 两数中至少一个是无理数;
(D) 两数中至多一个是无理数.

(2) 数轴上点 A 表示 $-10\frac{21}{20}$, 点 B 表示 10.09,那么两点离原点距离的情况是 ( )

(A) 点 A 较近;
(B) 点 B 较近;
(C) 一样近;
(D) 无法确定.

(3) 已知: $a=\left|-\frac{3}{5}-\frac{4}{7}\right|$, $b=\left|-\frac{3}{5}\right|-\left|-\frac{4}{7}\right|$, $c=-\frac{3}{5}-\left|-\frac{4}{7}\right|$, $d=-\left|-\frac{3}{5}\right|-\left(-\frac{4}{7}\right)$.

那么按从小到大的顺序排列为 ( )

(A) $d<c<b<a$;
(B) $c<d<b<a$;
(C) $b<d<c<a$;
(D) $c<b<d<a$.

(4) 下列各对数中,互为相反数的是 ( )

(A) $(-a)^2$ 与 $|-a^2|$;
(B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$;
(C) 5^2 与 5^{-2};
(D) a^2 与 $-(-a)^2$.

3. 计算:

(1) $-2^2\div 1\frac{1}{3}-5.37\times\frac{4}{7}+5.37\times\frac{2}{7}-5.37\times\frac{5}{7}$;

(2) $(\sqrt{3}+1)^0-\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-2}\div\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}+\frac{1}{3+\sqrt{10}}$.

4. 如果 $x^2+y^2-4x-2y+5=0$, 求 xy^{2002}的值.

B 组

1. 填空题:

(1) $5\frac{1}{3}$的相反数与 $2\frac{1}{4}$的倒数的和等于________.

(2) 我国古代数学家祖冲之,在公元 5 世纪,就已算得圆周率 π 的值在 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间,比其他国家早一千年左右,如果取 $\pi=3.1416$, 这是精确到______,将这个取值四舍五入保留四个有效数字,可以用科学记数法记作___________.

(3) 设 $a=\sqrt{2}-1$, 则 a^3 ____ a^5.(用“>”或“<”填空)

(4) 已知:a, b 互为相反数,c, d 互为倒数,x 的绝对值为 2. 那么代数式 $x^2-(a+b+cd)x+(a+b)^{1999}+(-cd)^{2001}=$ ________.

2. 选择题:

(1) $\sqrt{25}$的平方根是 ( )

(A) 5; (B) ±5; (C) $\sqrt{5}$; (D) $\pm\sqrt{5}$.

(2) 若 $\sqrt[n]{1}-\sqrt[n]{-1}=2$ 成立,则 n 为 ( )

(A) 自然数; (B) 正偶数; (C) 正奇数; (D) 任意实数.

(3) 若 $x\leqslant0$, $|x|-x=m$, 则 m 满足 ( )

(A) $m>0$; (B) $m<0$; (C) $m=0$; (D) $m\geqslant0$.

(4) 三个数 $-\pi$, -3, $\sqrt{3}$ 的大小顺序是 ( )

(A) $-\pi<-3<\sqrt{3}$; (B) $-3<-\pi<\sqrt{3}$;

(C) $\sqrt{3}<-3<-\pi$; (D) $-3<\sqrt{3}<-\pi$.

3. 计算:

(1) $-3^2\div\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}}\times\frac{3}{2}-\left(2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+\sqrt{(-3)^2\times2}\cdot\sin45^\circ$;

(2) $-40\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2\div0.5\div\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times[(-2)^2-2^2]$.

4. 一个旅社有 100 间客房,经过一段时间的经营实践,旅社经理发现了这样一个规律:如果客房定价为每间 16 元时,住房率为 55%,每间定价 14 元时,住房率为 65%,每间定价 12 元时,住房率为 75%,每间定价为 10 元时,住房率为 85%. 要使每天收入达到最高,每间客房每天的定价应是多少?

5. 已知实数 a、b 满足方程 $a^2+b^2+4a-6b+13=0$,求 a^2-b^2 的值.

6. 某商店出售一种商品，有如下几种方案：(1) 先提价 10%，再降价 10%；(2) 先降价 10%，再提价 10%；(3) 先提价 20%，再降价 20%. 问：用三种方案调价的结果是否一样？最后是不是都恢复了原价？

二、代数式

[目标要求]

通过本单元的学习，我们应该知道：用加、减、乘、除、乘方、开方等六种运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子，叫做代数式. 而代数式的值是用数值代替代数式里的字母，经计算后所得到的结果. 一个代数式表示为数与字母的积的形式，这样的代数式叫做单项式；而几个单项式的和叫做多项式. 单项式和多项式统称为整式.

在整式运算中，我们要了解合并同类项法则，幂的运算法则，和整式的乘除运算法则.

我们要理解多项式的因式分解的意义，掌握因式分解的基本方法：提公因式法、运用公式法、分组分解法和求根公式法.

通过复习，理解分式的概念，了解有理式的意义，掌握分式的基本性质，即：分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式，分式的值不变.

理解二次根式的概念，掌握二次根式的性质：(1) $(\sqrt{a})^2 = a\ (a \geqslant 0)$；(2) $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$ 能掌握二次根式的运算.

[解题指导]

例 1 已知：$x = 3,\ y = -2$，求代数式 $2x^2 - 2y^2 + 3x - 4y$ 的值.

分析 求代数式的值，首先要将代数式进行化简，再将数值代入代数式，求出结果.

解 当 $x = 3,\ y = -2$ 时，

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2y^2 + 3x - 4y &= 2 \times (3)^2 - 2 \times (-2)^2 + 3 \times 3 - 4 \times (-2) \\ &= 18 - 8 + 9 + 8 \\ &= 27. \end{aligned}$$

说明 求代数式的值不仅仅在整式中进行也可以在分式、二次根式中运用.

变式与引申 (1)已知：$x = 3,\ y = -2$，求分式 $\dfrac{x-1}{y+3} - \dfrac{y+3}{x-1}$ 的值.

(2) 已知：$x = 3,\ y = -2$，求 $\sqrt{y+2} + \sqrt{x+6}$ 的值.

例 2 化简：

(1) $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$；

(2) $(a-b-c+d)(a+b-c-d)$；

(3) $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$.

分析 此题主要是运用乘法公式进行运算，运算前先观察每一题的特征，选择正确的公式进行运算.

解 (1) $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$

$= (x^3-1)(x^3+1)$

$= x^6 - 1.$

(2) $(a-b-c+d)(a+b-c-d)$

$= [(a-c)-(b-d)][(a-c)+(b-d)]$

$= (a-c)^2 - (b-d)^2$

$= a^2 - 2ac + c^2 - b^2 + 2bd - d^2.$

(3) $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$

$= [(x-y)(x+y)(x^2+y^2)]^2$

$= [(x^2-y^2)(x^2+y^2)]^2$

$= (x^4-y^4)^2$

$= x^8 - 2x^4y^4 + y^8.$

说明 第(1)小题，根据其特征，先用立方差公式，再用平方差公式；第(2)小题是四项式乘以四项式，直接相乘很繁琐，仔细观察其特征后，可发现通过添括号，可以转化为符合平方差公式的形式，进而可以将运算化简；第(3)小题若按先乘方后乘法的运算顺序，展开后也将很繁琐，仔细观察其特征后，可以发现乘方运算都是平方运算，因此利用积的乘方运算的逆用，可以转化为 $[(x-y)(x+y)(x^2+y^2)]^2$，于是就可以利用平方差公式先进行括号内的运算，最后再进行乘方运算，这样大大简化了运算.

变式与引申 化简：$(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^4+y^4)^2(x^8+y^8)^2(x^{16}+y^{16})^2$.

例 3 在实数范围内把下列各式因式分解：

(1) $3x^{2n+1} - 4x^{2n} + x^{2n-1}$;

(2) $x^4 - 6x^2 - 7$;

(3) $x^7 - x$;

(4) $3x^2 - 4x - 2$;

(5) $(1-a^2)(1-b^2) - 4ab$;

(6) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$.

分析 因式分解，首先看有没有公因式，其次看能否直接运用平方差、立方差、立方和以及完全平方公式，最后再看能否分组分解.

解 (1) $3x^{2n+1} - 4x^{2n} + x^{2n-1}$

$= x^{2n-1}(3x^2 - 4x + 1)$

$= x^{2n-1}(3x-1)(x-1).$

(2) $x^4 - 6x^2 - 7$

$= (x^2-7)(x^2+1)$

$= (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x^2+1).$

(3) $x^7 - x$

$= x(x^6-1)$

$= x(x^3+1)(x^3-1)$

$= x(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$

(4) 设方程为 $3x^2 - 4x - 2 = 0$,