

生活与科学文库



数学

生活与科学
文库

聊斋

王树禾 著



科学出版社

555

生活与科学文库

012-49
u36

数学聊斋

王树禾 著

科学出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

数学聊斋/王树禾著. —北京:

科学出版社, 2002

(生活与科学文库)

ISBN 7-03-010088-3

I. 数… II. 王… III. 初等数学
—普及读物 IV. O12-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字

(2002)第 008403 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

定价:23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前言

别把数学想像得那么困难
和艰涩,认为它排斥常识. 数
学仅仅是常识的一种微妙的形
式.

——L. 凯尔文

清代文豪蒲松龄著奇书《聊斋志异》,借鬼狐故事伐恶扬善,名冠文学史,只可惜蒲留仙老先生的书用文言写成,今日一般读者颇为费解,《聊斋志异》已有不少版本的白话文译本发行,很受大众欢迎.

数学当中也有很多难理解、难证明、难计算的问题,犹如《聊斋志异》中众多的神奇故事,例如由正方形对角线的长引发的第一次数学危机,由理发师悖论(罗素悖论)引发的第三次数学危机,在简单确定的规律支配下却孕育出混沌的紊乱运动等;至于计算机数学的核心问题 NPC,分明是从有限的情形之中挑选出一种合乎要求的情形,为什么用大型计算机去解尚需千万世

纪才能解出呢？NPC 中的许多问题为什么共生死？他们究竟存在不存在有效的解法？又例如臭名昭著的 $3x+1$ 问题： x 为偶数，则取其半； x 为奇数，则取 $3x+1$ 之半；得出的结果再如上“取半”，实验与猜想最后会得出 1，可惜（可怕）它是至今数学界无力解决的问题之一，现在无人证其明，亦无人证其伪。美籍奥地利数学家哥德尔严格证明了确乎存在既不能证其真亦不能证其伪的命题！如果问： π 的小数部分会不会有 100 个 8 连贯出现，即

$$\pi = 3.14159265 \cdots \underbrace{888 \cdots 888}_{100 \text{ 个 } 8} \cdots ?$$

100 个 8

如果有，有几处，在小数点后第几位上发生？这种“坏问题”数学中到处都有，要多少有多少。种种涉及数学与计算机数学的尖锐重大的问题，很值得我们关心。但是，在现代数学专著当中，设定了繁多的专用符号和艰涩的定义、定理，弄得连非本分支的数学家们都成了隔山之人，感到好似“两个黄鹂鸣翠柳”，不知所云。

能否拣一些现代的教学内容和生动有趣的经典数学内容，用“普通话”写一本貌似《聊斋志异》那般有思想哲理、活泼巧妙的数学科普著作，来宣传普及这些重要优雅的数学知识呢？本书对此做了尝试，在兼顾数学知识的趣味性和严肃性的前提下，

最大限度地大众化,努力使读者不但“知其然”,亦使之“知其所以然”,力争通而不俗,美而不媚.

本书几乎完全用 $+$ $-$ $\times$ $\div$ 解决问题, $\lim$ 只用过不多几次,力争不沾微积分等现代数学中非初等运算的边,使得凡具中学文化的读者百分之百地可以读懂全书,当然,数学专业的师生也不至于认为太肤浅.如此使得各个层次的读者都可以在欢快轻松的阅读欣赏当中,学到新知识,见识新技巧,在幽默的智能娱乐之中,接受和进一步思考现代数学的本质和是非.

书中的标题是“摘要”式的,有的比较具体,写作时则借题发挥,多讲了一些与该标题相关的道理和要例.

但愿这本小书能让你与数学结缘,如果你被书中那些诱人的问题和技巧迷住而流连忘返,从此更痴情数学,提升了数学的悟性和技能,那正是作者的初衷.

国际数学联盟(IMU)把2000年定为“世界数学年”,并且制订了如下宗旨:

“使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解.”

本书按上述宗旨献给广大的数学爱好者和“数学不爱好者”.我相信,你读了这本书之后就会与别人争辩说,数学绝不像有些人传说的那样枯燥乏味.如果你原不是一位数学爱好者,当你看完这本小书,数

学的面具被你亲手揭掉之后,你已经由一个数学的疏远者变成了数学爱好者了.但愿本书是你永远的好朋友.

作者学识浅薄,文字工夫亦不深,敢说写作愿望已经达到,盼请读者与同行批评.

王树禾
写于 2000 数学年

目 录

算术篇

1. 从 $2+2=4$ 谈起	1
2. $+-\times\div$ 工艺展品	4
3. 算术的基因和基理	6
4. 整数见闻	11
5. 张丘建百钱买百鸡	16
6. 清点太阳神的牛群	19
7. 数学之神阿基米德	22
8. 草地与母牛的牛顿公式	24
9. 除法中的余数不可小看	27
10. 韩信点兵, 多多益善	30
11. 素数的故事	35
12. 生产全体素数	42
13. 算术小魔术	43
14. 自然数三角阵揭秘	48
15. 一种加法密码	51

几何篇

1. 无字数学论文	55
2. 蜂巢颂	64
3. 蝴蝶定理	67
4. 拿破仑三角形	70
5. 高斯墓碑上的正 17 边形	75
6. 椭圆规和卡丹旋轮	79
7. 阿尔哈达姆桌球	82

8. 费尔巴哈九点圆	86
9. 倍立方问题的丝线解法	87
10. 现代数学方法的鼻祖笛卡儿	90
11. 三等分角的阿基米德纸条	92
12. 化圆为方的绝招	94
13. 逆风行舟	99
14. 天上人间怎么这么多的圆和球	101
15. 平面几何定理为什么可以机器证明	105
16. 勾三股四弦五精品展	112
17. 雪花几何	118
18. 最优观点与最大视角	123
19. 切分蛋糕	125
20. 人类首席数学家	128
21. 《几何原本》内容提要 with 点评	130
22. 黄金矩形系列	135
23. 捆绑立方体	137
24. 立方装箱与正方装箱问题	139
25. 巧测砖块对角线	141
26. 糕点售货员的打包技术	144
27. 三角形的内角和究竟多少度	146
28. 罗巴切夫斯基的想象几何学	152
29. 伟大的数学革新派罗巴切夫斯基	161
30. 细胞几何学	164
31. 蚂蚁的最佳行迹	168

图论篇

1. 美丽图论	173
2. 人们跑断腿, 不如欧拉一张图	174
3. 数学界的莎士比亚	178
4. 图是什么	179
5. 两个令人失望的猜想	181
6. 握手言欢话奇偶	183
7. 馋嘴老鼠哪里藏	184

8. 一辆车跑遍村村寨寨	186
9. 没有奇圈雌雄图	187
10. 树的数学	189
11. 一共生成几棵树	192
12. 生成一棵最好的树	194
13. 树上密码	196
14. 追捕逃犯	198
15. 乱点鸳鸯谱	201
16. 错装了信笺	202
17. 瓶颈原理和婚配定理	204
18. 中国邮路	209
19. 周游世界	215
20. 贪官聚餐	219
21. 20 面体上的剪纸艺术	221
22. 国际象棋马的遍历	222
23. 又是贪官聚餐	224
24. 天敌纵队和王	226
25. 图能摆平吗	229
25. 多面体黄金公式	230
27. 正多面体为何仅五种	231
28. 非平面图的两个疙瘩	234
29. 彩色图, 不仅为了美	236
30. 五色定理和肯普绝招儿	239
31. 颜色多项式	240
32. 八皇后和五皇后问题	243
33. 历史上最伟大的数学家	245
34. 妖怪的边色数	248
35. 亲疏恩怨, 世态炎凉	251
36. 同色三角形	253
37. 拉姆赛数引发的数学劫难	254
38. 多心夫妻渡河	259
39. 巧布骨牌阵	262

40. 孙臏巧计戏齐王	264
41. 图上谎言	265
42. 走投无路之赌	268
43. 图上智斗	270
44. 平分苹果有多难	273
45. 周游世界谈何易	275
46. 梵塔探宝黄粱梦	276
47. 软件要过硬	277
48. 选购宝石与满足问题	278
49. 计算机数学的心腹之患	279
50. 同生共死 NPC	281
51. NFC 题谱	284

组合篇

1. 神龟龙马, 洛书河图	289
2. 三只鸽子两个窝	293
3. 好括号和姊妹洗碗	297
4. 兔子不是濒危物种	303
5. 兔儿兔孙与优选法	310
6. 36 军官问题与拉丁方正交试验	312
7. 这些钱怎么花	316
8. 劝君多画示意图	319
9. 棋盘之旅	323
10. 中国筹码游戏	327
11. 组合在几何中作怪	330
12. 投票排列名次是否公正	335
13. 合时容易分时难	340
14. 夫妇入席问题	344
15. 把握机会, 成自险出	346
16. 摔碎的砝码还能用吗	352
17. 排队打水	354
18. 不患寡而患不均	358
19. 核按钮的钥匙	360

混沌篇

1. 面包师抻面与砍头映射..... 363
2. 混沌礼赞..... 367
3. 北京拉面的数学模型..... 371
4. 三角帐篷中的混沌..... 373
5. 蒙古包里的混沌..... 377
6. 面片上的混沌..... 379
7. 非整数维数的奇怪不变集..... 381
8. 生命游戏..... 383
9. 20 世纪最伟大的数学家之一 386
10. 混沌学座谈纪要..... 387

危机篇

1. 毕达格拉斯何以把门生投入大海..... 394
2. 有理数平易近人,可数可列 397
3. 无理数神出鬼没,数不胜数 398
4. 有理数是米,无理数是汤 400
5. 问遍天堂地狱,谁人知 π 真面貌 400
6. 为全人类增添光彩的人物..... 404
7. 此人就是一所科学院..... 407
8. 第二次数学危机..... 409
9. 代牛顿圈改《流数简论》..... 412
10. 皮囊悖论..... 415
11. 整体等于其半..... 416
12. 神秘的康托尔尘集..... 417
13. 理发师悖论与第三次数学危机..... 421
14. 悖论欣赏..... 423
15. 哥德尔抖出了数学的家丑..... 431

思想篇

1. 从秃头悖论谈起..... 435
2. 数学内容是发现的还是发明的..... 438
3. 应用数学是坏数学吗..... 441
4. 数学定理为什么必须证明..... 443

5. 数学家是些什么人.....	447
6. 数学实验.....	451
7. 各执己见, 争吵不休	454
8. 数学的非数学障碍.....	460
9. 数学岂能孤立自己.....	468
10. 数学是一种文化.....	471
卷末寄语	477
参考文献	480

算 术 篇

数学是科学的女皇，而算术则是数学的女皇。

——高斯

1. 从 $2+2=4$ 谈起

一位聪明天真的小朋友问他的妈妈：“为什么 2 加 2 等于 4？”妈妈答：“傻孩子，连这么简单的算术都不懂！”于是这位母亲伸出左手的两个指头，又伸出右手的两个指头，左右的两个指头往一起一并，说：“这就叫 2 加 2，你数一数，看是不是 4？”孩子勉强点头，接着又问：“可是 4 是什么玩意儿呢？”妈妈欲言而无语。是呀，如果母亲说这些指头的数目就叫做 4，孩子再追问什么叫做 999999999，那可就不好用指头之类的东西来比划着解释了！

事实上，反思我们小时候对加法的学习，确实是非理性的，完全是老师和家长向我们的脑子里灌进去而记住了的七加八一十五，七加五一十二之类的指令而已；认真思考起来，究竟每个自然数是如何定义的，加法是什么，为什么 $2+2=4$ ， $4+4=8$ 等等，确实是一个严肃的数学问题。

原始人已有自然数的原始概念，他们用小石头来记录捕捉的猎物的个数（或用“结绳记事”法）。有人捕来一只野兔，他们就在小坑里放上一只石子，又有人捕

来一只野兔,他们就在小坑中又投放一个石子,等等.事实上,这逐一地向小坑中投石子的过程恰是加法运算的真谛,投一颗石子就叫做加上 1. 1 加 1 得到的数量就叫做 2, 2 再加 1 得到的数量就叫做 3, 等等. 再后来,人们发现了加法的结合律,即 $1 + 1 + 1 + 1 = (1 + 1) + (1 + 1)$ 等等. 公元 6 世纪,印度数学家引入零的符号“0”,它是自然数的“排头”. 到了 19 世纪,皮亚诺 (G. Peano, 1858—1932) 提出了五条算术公理,才从理论上彻底解决了什么是自然数,为什么 $2 + 2 = 4$ 等数学上的这些基本问题,他的三个概念与五个公理是:

0, 后继和自然数,以及如下五条公理:

公理 1. 0 是自然数.

公理 2. 任何自然数的后继是自然数.

公理 3. 0 不是任何数的后继.

公理 4. 不同的自然数后继不同.

公理 5. 对于某一性质,若 0 有此性质,而且若某自然数有此性质时,它的后继也有此性质,则一切自然数都有此性质.

具体地说,0 的后继中国人叫做一,美国人叫做 one, 1 的后继中国人叫做二,美国人叫做 two, 等等. 第五公理谈的是数学归纳法. 一个自然数生出它的后继的过程是加法,记成 $0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, n + 1 = (n + 1)$ 等等.

由皮氏的公理可以明确无误地回答什么是自然数的问题,例如 4 是什么? 答: 4 是 3 的后继,或曰 4 是 3 之“子”. 3 呢? 3 是 2 的后继, 2 呢? 2 是 1 的后继, 1 呢? 1 是 0 的后继, 0 呢? 0 是祖宗,它不是谁的后继,是自然数的发源点.

$2+2=4$ 证明如下:

因为 $1+1=2$, 所以 $2+2=(1+1)+(1+1)$, 由结合律得

$$2+2=(1+1)+(1+1)=(1+1+1)+1.$$

又因 $1+1+1=(1+1)+1=2+1=3$, 所以 $2+2=3+1$, 而 $3+1=4$, 故知 $2+2=4$ 是正确的, 证毕.

有了加法的概念, 减法是加法的逆运算, 乘法则是几个数连加的“简写”, 除法是乘法的逆运算. 可见, 从皮氏公理出发已经把 $+\ -\ \times\ \div$ 的概念弄得水落石出, 不再是那种原始的直观感觉(例如结绳记事)或死记的九九表了.

查阅《现代汉语词典》上加法词目, 词典称: “加法 jiāfǎ, 数学中的一种运算方法, 两个或两个以上的数合成一个数的方法.” 这种解释实在科学, 例如它只说“合成一个数”, 并不说这个数(我们称其为和)是多少. 事实上, 现代数学对于 $1+1$ 的和未必总是算出 2 来的. 遥想原始人怎样形成数量的概念, 最初只是“有”与“无”两个概念, 他们尚没有“多少”的概念和斤斤计较的坏习气. 就是现代, 有时也只需考虑有与无, 是与否, 而不必细说有多少, 例如我们要写字, 关心的是有笔还是没有笔, 至于有笔时有几支, 那都是一回事, 如果这时规定 0 代表无(或否), 1 代表有(或是), 则应有 $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=1$. 这个 $1+1=1$ 的算式有点不习惯, 但对于此处的实际背景, 如此定义加法是再合适不过了. 这种 $1+1$ 不等于 2, 而等于 1 的加法称为“逻辑和”, $1+1=1$, 于是 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}1}=1$ (n 是自然数).

再看电视机开关,你用指头捅一下,它就为你播放节目,再捅一下,它就关机了,如果把关机状态记成 0,把播放状态记成 1,则有加法法则:

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$$

2. $+ - \times \div$ 工艺展品

(1)	1×63		63
	121×63		7623
	12321×63		776223
	1234321×63		77762223
	123454321×63	=	7777622223
	12345654321×63		777776222223
	1234567654321×63		77777762222223
	$123456787654321 \times 63$		7777777622222223
	$12345678987654321 \times 63$		777777776222222223

道理:例如第五行的 7777622223 是这样得到的:

$$\begin{aligned} 77777 \times (100000 - 1) &= 7777700000 - 77777 \\ &= 7777622223, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 77777 \times 99999 &= 7 \times 9 \times (11111 \times 11111) \\ &= 123454321 \times 63. \end{aligned}$$

其余各行道理相同.

(2) $(1 + 1 + 1) \times 37 = 111, (5 + 5 + 5) \times 37 = 555,$
 $(2 + 2 + 2) \times 37 = 222, (6 + 6 + 6) \times 37 = 666,$
 $(3 + 3 + 3) \times 37 = 333, (7 + 7 + 7) \times 37 = 777,$
 $(4 + 4 + 4) \times 37 = 444, (8 + 8 + 8) \times 37 = 888,$
 $(9 + 9 + 9) \times 37 = 999.$

道理: $111 \div 37 = 3.$

(3) $7 \times 15873 = 111111, 35 \times 15873 = 555555,$