错误集论

Errors

郭开仲　张式强　著

中南大学出版社

错误集论

郭开仲
张式强　著

中南大学出版社
2001

错误集论

郭开仲　张式强　著

□责任编辑　周　丽　陈灿华
□出版发行　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　邮编:410083
发行科电话:0731-8876770　传真:0731-8829482
电子邮件:csucbs@public.cs.hn.cn
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　长沙市华中印刷厂

□开本　850×1168　1/32　□印张　11.25　□字数　275 千字
□版次　2001 年 4 月第 1 版　□2001 年 4 月第 1 次印刷
□印数　0001-1000
□书号　ISBN 7-81061-384-7/O·018
□定价　25.00 元

前　言

由于决策的错误，英国老牌的巴林银行、韩国世界级大企业韩宝系列企业集团短时间内全部倒闭。这些见于报端而令世人震惊的报道使人们清醒地认识到：决策的错误，常常会导致灾难性的后果。然而，在各行各业，要求人们时时刻刻地作出各种各样的决策。由于人们认识客观世界的局限性，加上受人为因素、时间、空间及其他自然因素的影响，在作决策时，错误又在所难免。因此，认识错误，研究错误，避免、减少或消除错误已成为人们的迫切要求。近年来，由此而引发的对负面影响的研究已越来越引起社会各界的重视。《消错学引论》就是其中的一例，它不仅指出了认识、研究错误的目的、意义，研究了错误的发生原因和机制，错误的传递、转化的方法和规律，而且还提出了避免和消除错误的方法。

然而，一套理论的完善，要有坚实的理论基础，对错误的研究也不例外。要定量化描述错误就要建立一套描述错误的数学方法，这就是我们编写本书的目的。

本书共分 9 章。前 3 章分别介绍了经典集合、映射、关系、模糊集合的概念、性质及有关的运算，以作为后面各章的预备知识。

第 4、第 5 章介绍了错误集、经典错误集、模糊错误集、具有临界点的错误集、多元错误集等概念，以及错误集合的运算规律、错误集上的变换。它是描述各种不同错误的数学工具。

第 6 章介绍了错误函数的概念、形式，和式型和向量型这 2 种

特殊形式的错误函数以及经典错误函数、模糊错误函数、具有临界点的错误函数的概念、性质及其运算规律。它是确定各类错误的错误值的数学工具。

第 7 章介绍了错误矩阵的概念和性质,经典错误矩阵、模糊错误矩阵、具有临界点的错误矩阵的概念、性质及运算规律。它是第 8 章“错误矩阵方程”的基础。

第 8 章介绍了错误矩阵方程的概念,研究了错误矩阵方程的解及其存在性,给出了三类错误矩阵方程的解法、错误矩阵不定方程的概念及其解法。

第 9 章介绍了错误向量的概念,着重讨论了错误向量的秩。

第 4～9 章是刻画错误和研究错误的传递、转化规律的重要数学工具,也是本书的核心内容。

本书由郭开仲统稿,其中第 1～6 章中除 §4.3 及 §5.3 外,由张式强完成,而 §4.3, §5.3 以及第 7～9 章由郭开仲编写。

由于错误理论尚属创立阶段,而这一理论的应用更有待于进一步研究与完善,因此,书中定有不当之处,恳请读者批评指正。鉴于目前还未见到这方面的著作,但愿本书能给读者以启迪,起抛砖引玉的作用,使错误学这门新学科结出硕果。

作　者

2000 年 10 月于广州

目　　录

第1章 经典集合与映射

集合论是德国人康托(Cantor)于1874年建立的,它已成为现代数学的一个重要分支及现代数学各分支的基础与工具。自20世纪以来,集合论一直吸引着许多数学家去研究,并已取得了不少的成绩。1965年美国人札德(L.A.Zadeh)把康托的集合概念进行了拓广,提出了模糊(Fuzzy)集的概念。模糊集合论是现代模糊数学的理论基础,为了区别,我们把康托的集合论叫做经典集合论。作为预备知识,我们先对经典集合论进行介绍。

§1.1 经典集合的基本概念和表示方法

一、经典集合的概念

集合是集合论中惟一不能精确定义的基本数学概念。

我们在讨论一个具体问题的时候,总是把议题限制在一定的范围内。例如要讨论"男学生"这一概念,我们不必考虑自行车或飞机等这些与学生无关的事物。我们可以把自己的议题首先限制在"学生"这样一个范围内,把所有的学生作为讨论对象,然后再在其中去区分性别。通常把被讨论的全体对象叫做论域。论域常以大写的英文字母 $U,V,\cdots,X,Y,\cdots$ 表示。论域中的每个对象,统一叫做元素,以相应的小写字母 $u,v,\cdots,x,y,\cdots$ 表示。

给定论域 U,U 中的某一部分元素的全体叫做 U 上的一个经典集合,常以大写英文字母 $A,B,\cdots$ 表示经典集合。在意义清楚的情况下,经典集合也简称为集合。

若 x 是经典集合 A 中的一个元素,记作 $x\in A$,读作"x 属于

A";若 x 不是集合 A 的一个元素,则记为 $x \notin A$,读作"x 不属于 A"。

二、经典集合的表示方法

在本书中,我们约定用几个特定的字母表示几个常用的经典集合,其中:

N 表示由全体自然数组成的集合;

Z 表示由全体整数组成的集合;

Q 表示由全体有理数组成的集合;

R 表示由全体实数组成的集合。

通常表示经典集合的方法有两种,其中,把集合的所有元素一一列举出来表示集合的方法叫做列举法。例如:$A=\{2,3,4,5\}$表示以自然数 2,3 ,4 ,5 为元素的集合。

一般说来,只有当一个集合仅含有少数几个元素时,才能用这种方法表示。如区间(0,1)中的所有实数的集合 A 就不能用这种方法表示。但我们容易发现,这些实数有一个共同的特征:都大于0 而小于 1。因此,如果 x 是 A 的一个元素,就有 $0<x<1$,于是我们可以把集合 A 写成:$A=\{x|0<x<1\}$,其中 x 表示 A 的元素,竖线后的"$0<x<1$"是对 x 的说明,它给出了 A 中元素的特征。

一般地,我们把具有特征 P 的元素表示成 $P(x)$,于是,由所有具有特征 P 的元素组成的集合 B 可以表示成:$B=\{x|P(x)\}$。

通常我们把用描述集合元素的共同特征来表示集合的方法叫描述法。

三、有限集、无穷集、空集

一个集合,如果它只含有有限个元素,这样的集合称为有限集。例如:$A=\{2,3,4\}$表示由 2,3,4 这 3 个元素所构成的一个有

限集合。

在有限集中，把只有 1 个元素所组成的集合，称为单元素集。如方程：

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

的实根所形成的集合，就是一个单元素集$\{1\}$。但需注意的是：不要把单元素集和它所含的惟一元素混为一谈，这是因为它们在概念上不是一回事。

如果一个集合中有无穷多个元素，则称该集为无穷集。例如，由所有的自然数所构成的集合 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 就是一个无穷集合。

不含有任何元素的集合叫做空集，记为 $\varnothing$。例如方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根的全体所组成的集合就是空集。即设 $B = \{x \mid x$ 是实数且 $x^2 + 1 = 0\}$，则 $B = \varnothing$。

注意：

(1)$\{0\}$不是空集，因为它含有数 0，$\{0\}$是单元素集。

(2)不能将空集记作$\{\varnothing\}$，因为它是以空集 $\varnothing$ 为元素的单元素集。

集合的概念虽然简单，但要准确理解其含义还需注意如下几个问题：

(1)集合的元素可以是任何事物，一个集合也可以作为另一个集合的元素。

例如集合 $A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$，其中 $a \in A$，$\{b, c\} \in A$，$d \in A$，$\{\{d\}\} \in A$，但 $b \notin A$，$\{d\} \notin A$，b 是 A 的元素$\{b, c\}$的元素，不是 A 的元素。

(2)组成一个集合的各个元素是彼此相异的，并且是没有次序关系的。例如，$\{1, 2, 3\}$，$\{3, 2, 1\}$，$\{3, 1, 2\}$表示同一个集合。

(3)所讨论的任何一个对象是否属于一个集合，回答是确定的，也就是说，对于一个集合来说，任一对象或者是它的元素或者

不是它的元素，二者必居其一，而且结论是确定的。

§1.2 经典集合间的关系、运算及其规律

一、集合间的关系

在实数之间我们定义了关系：$=$，$<$，$\leqslant$，$>$，$\geqslant$。类似地，在集合之间可以定义关系：$=$，$\subset$，$\subseteq$，$\supset$，$\supseteq$。

定义 1.1 设 A，B 是 U 上的两个集合，若 $\forall a\in A$ 都有 $a\in B$（即 A 的每个元素都是 B 的元素），则称 A 为 B 的子集合，或称 B 包含 A，记作 $B\supseteq A$，或称 A 被 B 包含，记作 $A\subseteq B$。

定义 1.2 对于集合 A，B，若 $A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$，则称集合 A，B 相等，记作 $A=B$。

由定义知，给定两个集合，当且仅当它们的元素完全相同时才叫做它们相等。这表明：一个集合是由它的元素所决定的。因此，可以用不同的表示方法表示同一个集合。

例如：$\{7,8,9\}$，$\{x\mid x$ 是整数且 $6<x<10\}$，$\{x\mid(x-7)(x-8)(x-9)=0\}$表示同一个集合，即这 3 个集合相等。

U 中的任意个元素组成的集合 A 都是 U 的子集，即 $U\supseteq A$，而 U 本身当然也是 U 的一个子集。

一般地，对于 U 的任意子集 A 都有：$\varnothing\subseteq A\subseteq U$。

事实上：由 $B\subseteq A$ 的意义知，若 $a\in B$，则 $a\in A$。此命题与它的逆否命题等价，即若 $a\notin A$，则 $a\notin B$。

现设 $B=\varnothing$，要证 $\varnothing\subseteq A$，只要证：若 $a\notin A$，则 $a\notin\varnothing$ 就行了。

事实上，若 $a\notin A$，因 $\varnothing$ 为空集，当然 $a\notin\varnothing$，所以 $\varnothing\subseteq A$。同理可证 $\varnothing\subseteq U$。

由于 A 是 U 的任一子集，显然有 $A\subseteq U$。于是，$\varnothing\subseteq A\subseteq U$

成立。

注意区分“$\subseteq$”和“$\in$”。例如：$A\in B$ 表示 A 是 B 的一个元素；而 $A\subseteq B$ 表示 A 的每个元素都是 B 的元素。

定义 1.3 对任意两个集合 A 和 B，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集，或称 B 真包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

例如：$\{2,3\}\subset\{1,2,3\}$。

定义 1.4 以集合为元素的集称为集族。

定义 1.5 含有 n 个元素的集合简称为 n 元集。它的含有 m 个（$m\leqslant n$）元素的子集称作它的 m 元子集。

任给一个 n 元集，如何求出它的全部子集呢？下面举例说明。

例 1.1 设 $A=\{1,2,3\}$，求 A 的全部子集。

解 将 A 的子集从小到大分类：

0 元子集，即空集，只有一个：$\varnothing$；

1 元子集，即单元素集，有 C_3^1 个：$\{1\},\{2\},\{3\}$；

2 元子集有 C_3^2 个：$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$；

3 元子集有 C_3^3 个：$\{1,2,3\}$。

一般说来，对于 n 元集 A，它的 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 元子集有 C_n^m 个，所以不同的子集总数有：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$。

由二项式定理容易证明：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$，所以，$n$ 元集有 2^n 个子集。

定义 1.6 集合 A 的一切子集（包括空集 $\varnothing$ 及 A 本身）所构成的集族称为 A 的幂集，记成 $P(A)$（或 2^A）。

例 1.22 设 $A=\{1,2,3\}$，求：$P(A)$。

解 由例 1 知

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}。$$

二、经典集合的运算及其规律

运算是数学上常用的手段。两个实数进行加、减、乘、除(除数不能为0)运算可以得到一个新的实数。类似地,两个集合也可以进行运算。下面我们来定义集合的5种基本运算:并、交、余、差与对称差,利用这些运算能产生新的集合。在以下讨论中均假设所涉及的集合如 A,B 等均在某论域 U 中,即设 $A\subseteq U,B\subseteq U$。

定义 1.7 设 A,B 是任意两个集合,由至少属于 A 与集合 B 之一的一切元素所组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记成 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。

定义 1.8 设 A,B 是任意两个集合,由既属于 A 又属于 B 的一切元素所组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记成 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$。

两个集合的并、交运算可以推广到多个集合上去,n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并、交可分别定义为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid x\in A_1 \text{ 或 } x\in A_2 \text{ 或}\cdots\text{或 } x\in A_n\}$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid x\in A_1 \text{ 且 } x\in A_2 \text{ 且}\cdots\text{且 } x\in A_n\}$$

n 个集合的并和交可简记为:$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 和 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。即

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n。$$

且当 $n\to\infty$ 时,可以记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots,$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots。$$

定义 1.9 设 U 是一个集合,$A\subseteq U$,把从 U 中去掉 A 的所有元素所构成的集合叫做集合 A 的余集(或补集),记为 $\overline{A}$ 或 A^c,

A_0^1,即 $\overline{A}=\{x \mid x \notin A$ 但 $x \in U\}$。

例如:设 $U=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,2,4\}$,则

$$A \cup B=\{1,2,3,4,5\},A \cap B=\{1\},$$

$$\overline{A}=\{2,4\},\overline{B}=\{3,5\}。$$

集合的并、交、余满足如下运算律:

(1) 等幂律:$A \cup A=A$;$A \cap A=A$。

(2) 交换律:$A \cup B=B \cup A$;$A \cap B=B \cap A$。

(3) 结合律:$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)$;

$$(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)。$$

(4) 分配律:$A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C)$;

$$A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)。$$

(5) 同一律(或称 0-1 律):

$$A \cup \varnothing=A,A \cap \varnothing=\varnothing;$$

$$A \cup U=U,A \cap U=A。$$

(6) 吸收律:$A \cup(A \cap B)=A$,

$$A \cap(A \cup B)=A。$$

(7) 复原律(或称二次否定律):$\overline{\overline{A}}=A$。

(8) 补余律:$A \cup \overline{A}=U$;$A \cap \overline{A}=\varnothing$。

(9) 关于并、交、余运算,还有如下的 De-Morgan 公式:

$$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}。$$

证明以上等式的基本思路是:要证 $P=Q$,即要证 $P \subseteq Q$ 同时 $Q \subseteq P$。也就是要证对任意的 x 有:$x \in P \Rightarrow x \in Q$ 和 $x \in Q \Rightarrow x \in P$ 成立。

下面证明公式(9)的第一个公式。

证明 设 $x \in \overline{A \cup B}$,则 $x \notin A \cup B$。因而 $x \notin A$ 且 $x \notin B$,或者说 $x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$。于是,$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$。即

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}。\tag{1}$$

反之,若 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,则 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,因而 $x\notin A\cup B$,即 $x\in\overline{A\cup B}$,于是有:

$$\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}。\tag{2}$$

由(1),(2)式得:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

定义 1.10 设 A,B 为任意两个集合,由所有属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合,叫做集 A 减集 B 的差集,记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$,即,$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$。

例如:设 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,4\}$,则 $A-B=\{3,5\}$,$B-A=\{4\}$。

定义 1.11 设 A,B 为任意 2 个集合,则差集 $A-B$ 与 $B-A$ 的并集称为 A 与 B 的对称差,记为:$A\oplus B$。即

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)。$$

例如:设 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{2,3\}$,则 $A-B=\{0,1\}$,$B-A=\{3\}$。于是,

$$A\oplus B=\{0,1\}\cup\{3\}=\{0,1,3\}。$$

A 与 B 的对称差还有一个等价的定义,即:

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)。$$

上面的例子若用这种定义也可得到同样的结果。

事实上,由于 $A\cup B=\{0,1,2,3\}$,$A\cap B=\{2\}$,于是,

$$\begin{aligned}A\oplus B&=(A\cup B)-(A\cap B)\\&=\{0,1,2,3\}-\{2\}\\&=\{0,1,3\}。\end{aligned}$$

上面介绍了集合的并、交、余、差和对称差 5 种运算,这 5 种运算的一个共同特点是:如果参加运算的集合均在某个集中,那么运算后的结果仍在该集中。然而,下面所定义的运算——集合的笛卡儿乘积却无此性质。

为了定义笛卡儿乘积运算，我们先引入序对的概念。

两个元素 a,b（允许 $a=b$），按规定的次序（比如 a 在 b 前面）排列组成的二元组称为一个有序对，记成 (a,b)，其中 a 称为序对的第一元素（或第一分量），b 称为序对的第二元素（或第二分量）。

有序对具有以下性质：

(1) $a\neq b\Rightarrow(a,b)\neq(b,a)$。

(2) 设 (x,y) 和 (a,b) 为二个有序对，则 $(x,y)=(a,b)\Leftrightarrow x=a,y=b$。

由此可见，序对与含有两个元素的集合 $\{a,b\}$ 是有区别的。由于集合 $\{a,b\}$ 中的 a 和 b 是无序的，因此，当 $a\neq b$ 时有 $\{a,b\}=\{b,a\}$，而 (a,b)，(b,a) 是两个不同的序对。

平面直角坐标系中点的坐标就是有序对。例如 $(1,-1)$，$(-1,1)$，$(2,0)$，$(3,2)$，…都表示坐标系中不同的点。

有序对的概念可以推广到三元组，四元组，…，n 元组上去。

下面定义一种新的集合的运算——笛卡儿乘积。

定义 1.12 设 A,B 是两个任意的集合，则称集合 $\{(a,b)\mid a\in A$ 且 $b\in B\}$ 为 A 与 B 的笛卡儿乘积或直积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ 且 } b\in B\}。$$

由定义可知，$A\times B$ 是由一切这样的有序对组成的：每个有序对的第一元素必在 A 中，第二元素必在 B 中，于是 $A\times B$ 与 A,B 的次序有关。因此，一般地，有 $A\times B\neq B\times A$。

例 1.3 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，则

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\},$$

$$B\times A=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}。$$

两个集合的笛卡儿乘积的概念，可以推广到 n 个集合的笛卡儿乘积上去。

定义 1.13 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意 n 个集合 $(n\geqslant 3)$，集合 $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i(i=1,2,\cdots,n)\}$ 称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的