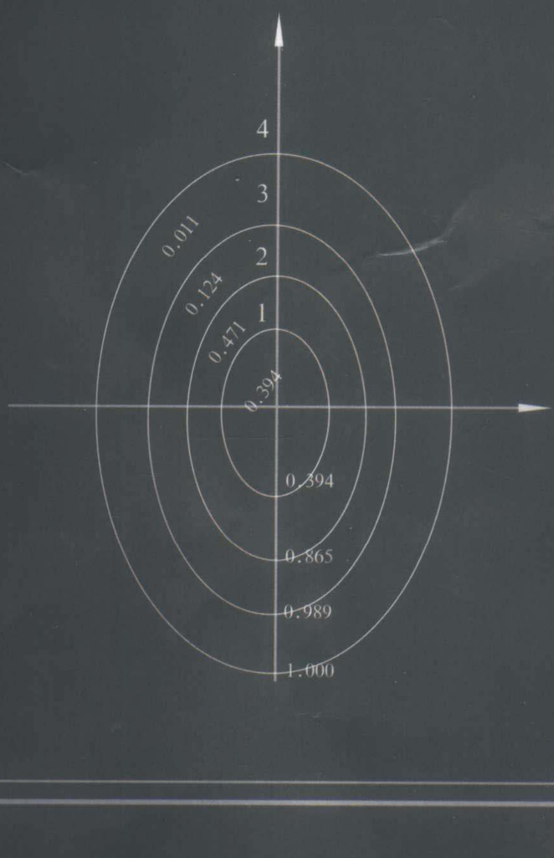
普通高等教育“十五”国家级规划教材

误差理论与测量平差基础

武汉大学测绘学院
测量平差学科组 编著

武汉大学出版社



普通高等教育"十五"国家级规划教材

误差理论与测量平差基础

武汉大学测绘学院
测量平差学科组 编著

武汉大学出版社

内容提要

本书由高等学校测绘学科教学指导委员会指导和组织编写，是测绘工程本科专业的专业基础课通用教材。本书全面系统地阐述了测量误差的基本理论，测量平差的基础方法，以及扼要介绍了近代平差的原理。加强和拓展误差理论知识，扩大测量平差的应用面，以适应现代测量技术数据处理的需要是本书的特点。全书共分12章。可作为测绘工程本科专业的基础课教材，也可供有关专业的工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与测量平差基础/武汉大学测绘学院测量平差学科组编著.—武汉：武汉大学出版社，2003.1

普通高等教育"十五"国家级规划教材

ISBN 7-307-03709-2

Ⅰ.误… Ⅱ.武… Ⅲ.①误差理论—高等学校—教材 ②测量平差—高等学校—教材 Ⅳ.P207

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第105012号

责任编辑：王金龙　　责任校对：刘　欣　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

印刷：武汉理工大印刷厂

开本：787×1092　1/16　　印张：14.625　　字数：332千字

版次：2003年1月第1版　　2003年1月第1次印刷

ISBN 7-307-03709-2/P·55　　定价：21.00元

前　言

《误差理论与测量平差基础》是测绘工程专业本科的专业基础核心课程的通用教材。

1998年国家教委颁布的《普通高等学校本科专业目录》中，测绘类专业设置仅有测绘工程一个本科专业，它涵盖了旧专业目录中的大地测量、工程测量、摄影测量与遥感和地图学等四个本科专业。为了贯彻执行新的专业目录，高等学校测绘学科教学指导委员会对测绘工程本科专业的培养模式、专业方向和核心课程的设置做了全面研讨，并提出了具体的改革方案。误差理论与测量平差基础被列为该专业的几门核心课程之一，是该专业所有学生必修的专业基础课。教学指导委员会还组织有关院校教师研讨和制定本课程的教学大纲，参加制定教学大纲的单位有：武汉大学测绘学院、中国矿业大学环境与测绘学院、山东科技大学地球信息科学与工程学院、长安大学地质工程与测绘工程学院、解放军信息工程大学测绘学院、大连海军舰艇学院海测系、同济大学测量与国土信息工程系、黑龙江工程学院测量系等。

我们受教学指导委员会的委托，本着拓宽专业口径，着重加强本课程的基本概念、基础理论、基本知识和基本技能的原则，在原《测量平差基础》(第三版)的基础上，修订编写了本教材。

《测量平差基础》为原武汉测绘科技大学(现武汉大学)测量平差教研室教师集体编著的教材，1978年6月出版。1983年6月出版第二版(即增订本)。1996年5月出版第三版，至今已发行了12万余册。已成为许多院校测绘专业课程的教材，其质量已得到社会上的承认。

虽然《误差理论与测量平差基础》与《测量平差基础》属于同一性质的课程，教学大纲的基本内容也相差不多，但考虑到新专业目录中测绘工程专业与旧专业目录中相应的细分专业的差异，培养模式和课程设置的不同，仍需对该教材的内容从基础化和综合化的角度进行修订。尽管如此，本书仍可认为是原书《测量平差基础》的第四版。它反映了我校测量平差教师30余年来在该课程教学和科研中的集体成果，同时也反映了兄弟院校同行们的改革意见、教学方法和经验。

本教材的主要教学内容和教学体系与原教材基本一致，即本课程仍是主要讲授误差理论的基本知识和基于偶然误差的测量平差法的基础理论和方法。本书与原书相比，主要有以下两个特点：

1. 加强了误差理论基础知识，以适应现代测绘技术数据处理的需要。例如，加强了误差分布及数字特征的论述，对误差的精度、准确度、精确度和不确定度等基本概念作了详细地阐述；又如，原教材基本未涉及处理系统误差问题，但在现代测量数据处理中，这是一个不能忽视的问题，因此在本教材中，加强了系统误差的基本理论，包括系统误差的传播、统计检验和系统误差的估计等内容。

2. 拓展测量平差基本方法的应用面。原书授课对象主要是大地测量和工程测量的本科专业，测量平差基本方法主要应用于常规测量控制网。而现在，由于现代测量技术的发展，测绘工程涵盖专业的增加，使得平差理论的应用更加广泛。在本书的编写中，我们充分注意到这一点，力求范例的多样性和实用性，以利于达到培养宽口径人才的要求。

此外，本书在加强理论联系实际，突出基本理论和基本概念，删去不必要和陈旧的教学内容等方面都作了一定的努力。

本书由陶本藻教授、邱卫宁教授、黄加纳教授、孙海燕教授参加修订和编写。孙海燕编写第二章、第三章；黄加纳编写第五章、第六章、第九章，其中第九章"概括平差函数模型"在第三版中是於宗俦教授编写的，是於宗俦教授的科研成果，本书基本保持不变，仅做了统一整理；邱卫宁编写第七章、第八章；陶本藻编写第一章、第四章、第十章、第十一章、第十二章。全书最后由陶本藻教授统一修改定稿。姚宜斌博士为本书提供了部分算例。

本书是在高等学校测绘学科教学指导委员会组织和指导下编写的，得到了兄弟院校同行们的大力支持，在此表示深切的谢意。

本书的编写得到了武汉大学教务部的大力支持，并提供教材建设专项基金资助。测绘学院的领导对本书的编写也极为重视和关心。这些都保证了本书编写工作的顺利进行。

由于武汉大学出版社的大力支持和积极工作，在很短的时间内完成了本书的出版，保证了教学的需要，我们深表感谢。

我们恳切希望使用本教材的教师和广大读者对本书提出宝贵意见。

武汉大学测绘学院
测量平差学科组
2002年8月

目　录

第一章　绪论 ………………………………（1）
§1-1　观测误差 ………………………………（1）
§1-2　测量平差学科的研究对象 ………………………………（3）
§1-3　测量平差的简史和发展 ………………………………（4）
§1-4　本课程的任务和内容 ………………………………（5）

第二章　误差分布与精度指标 ………………………………（6）
§2-1　正态分布 ………………………………（6）
§2-2　偶然误差的规律性 ………………………………（8）
§2-3　衡量精度的指标 ………………………………（12）
§2-4　精度、准确度与精确度 ………………………………（18）
§2-5　测量不确定度 ………………………………（21）

第三章　协方差传播律及权 ………………………………（23）
§3-1　数学期望的传播 ………………………………（23）
§3-2　协方差传播律 ………………………………（24）
§3-3　协方差传播律的应用 ………………………………（35）
§3-4　权与定权的常用方法 ………………………………（39）
§3-5　协因数和协因数传播律 ………………………………（44）
§3-6　由真误差计算中误差及其实际应用 ………………………………（50）
§3-7　系统误差的传播 ………………………………（55）

第四章　平差数学模型与最小二乘原理 ………………………………（59）
§4-1　测量平差概述 ………………………………（59）
§4-2　函数模型 ………………………………（61）
§4-3　函数模型的线性化 ………………………………（64）
§4-4　测量平差的数学模型 ………………………………（66）
§4-5　参数估计与最小二乘原理 ………………………………（68）

第五章　条件平差 ………………………………（72）
§5-1　条件平差原理 ………………………………（72）
§5-2　条件方程 ………………………………（77）
§5-3　精度评定 ………………………………（84）

§5-4　条件平差公式汇编和水准网平差示例 …………………………………… (89)

第六章　附有参数的条件平差 …………………………………………………… (92)
§6-1　附有参数的条件平差原理 …………………………………………………… (92)
§6-2　精度评定 ……………………………………………………………………… (96)
§6-3　公式汇编和示例 ……………………………………………………………… (98)

第七章　间接平差 ……………………………………………………………… (102)
§7-1　间接平差原理 ………………………………………………………………… (102)
§7-2　误差方程 ……………………………………………………………………… (107)
§7-3　精度评定 ……………………………………………………………………… (118)
§7-4　间接平差公式汇编和水准网平差示例 ……………………………………… (123)
§7-5　间接平差特例——直接平差 ………………………………………………… (126)
§7-6　三角网坐标平差 ……………………………………………………………… (127)
§7-7　测边网坐标平差 ……………………………………………………………… (131)
§7-8　导线网间接平差 ……………………………………………………………… (136)
§7-9　GPS 网平差 …………………………………………………………………… (142)

第八章　附有限制条件的间接平差 …………………………………………… (149)
§8-1　附有限制条件的间接平差原理 ……………………………………………… (149)
§8-2　精度评定 ……………………………………………………………………… (151)
§8-3　公式汇编和示例 ……………………………………………………………… (153)

第九章　概括平差函数模型 …………………………………………………… (159)
§9-1　基本平差方法的概括函数模型 ……………………………………………… (159)
§9-2　附有限制条件的条件平差原理 ……………………………………………… (161)
§9-3　精度评定 ……………………………………………………………………… (163)
§9-4　各种平差方法的共性与特性 ………………………………………………… (166)
§9-5　平差结果的统计性质 ………………………………………………………… (167)

第十章　误差椭圆 ……………………………………………………………… (172)
§10-1　概述 …………………………………………………………………………… (172)
§10-2　点位误差 ……………………………………………………………………… (173)
§10-3　误差曲线 ……………………………………………………………………… (178)
§10-4　误差椭圆 ……………………………………………………………………… (179)
§10-5　相对误差椭圆 ………………………………………………………………… (181)
§10-6　点位落入误差椭圆内的概率 ………………………………………………… (184)

第十一章　平差系统的统计假设检验 ………………………………………… (187)

§11-1　统计假设检验概述 …………………………………………………… (187)
§11-2　统计假设检验的基本方法 ……………………………………………… (190)
§11-3　误差分布的假设检验 ………………………………………………… (194)
§11-4　平差模型正确性的统计检验 …………………………………………… (202)
§11-5　平差参数的统计检验和区间估计 ……………………………………… (204)
§11-6　粗差检验的数据探测法 ……………………………………………… (208)

第十二章　近代平差概论 ……………………………………………… (211)
§12-1　序贯平差 ……………………………………………………………… (211)
§12-2　附加系统参数的平差 ………………………………………………… (214)
§12-3　秩亏自由网平差 ……………………………………………………… (217)
§12-4　最小二乘配置原理 …………………………………………………… (221)

参考文献 ………………………………………………………………… (224)

第一章 绪 论

测量数据或观测数据是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取的反映地球与其他实体的空间分布有关信息的数据。测量和观测是同义词,将交替使用。观测数据可以是直接测量的结果,也可以是经过某种变换后的结果。任何观测数据总是包含信息和干扰两部分,采集数据就是为了获取有用的信息,干扰也称为误差,是除了信息以外的部分,要设法予以排除或减弱其影响。本章说明观测数据总是不可避免地带有误差,以及测量平差所研究的内容,最后介绍本课程的任务和内容。

§1-1 观 测 误 差

当对某个量进行重复观测时就会发现,这些观测值之间往往存在一些差异。例如观测一个平面三角形的三个内角,就会发现其观测值之和不等于180°。这种在同一个量的各观测值之间,或在各观测值与其理论上的应有值之间存在差异的现象,在测量工作中是普遍存在的。为什么会产生这种差异呢? 这是由于观测值中包含有观测误差的缘故。

一、误差来源

观测误差产生的原因很多,概括起来有以下三个方面:

1. 测量仪器

所谓测量仪器,这里是指采集数据所采用的任何工具和手段。由于每一种仪器只具有一定限度的准确度,由此观测所得的数据必然带有误差。例如,在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时,就难以保证在估读厘米以下的尾数时正确无误。同时,仪器本身也有一定的误差,如水准仪的视准轴不平行于水准轴等。此外,在地图数字化中采用的数字化仪或扫描仪,使用自动化精密仪器如全站仪、GPS接收机等所采集的数据也都存在着仪器误差。

2. 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性,所以在仪器的操作过程中也会产生误差。同时,观测者的技术水平和工作态度,也是对观测数据质量有直接影响的重要因素。

3. 外界条件

测量时所处的外界条件,如温度、湿度、风力、大气折光等因素和变化都会对观测数据直接产生影响。特别是高精度测量,更要重视外界条件产生的观测误差。例如,GPS接收机所接收的是来自2万千米高空的卫星信号,经过电离层、大气层都会发生信号延迟而产生误差等。

上述测量仪器、观测者、外界条件三方面的因素是引起误差的主要来源,因此,我们把这三方面的因素综合起来称为观测条件。不难想象,观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好一些时,观测中所产生的误差平均说来就可能相应地小一些,因而观测成果的质量就会高一些。反之,观测条件差一些时,观测成果的质量就会低一些。如果观测条

件相同，观测成果的质量也就可以说是相同的。所以说，观测成果的质量高低也就客观地反映了观测条件的优劣。

但是，不管观测条件如何，在整个观测过程中，由于受到上述种种因素的影响，观测的结果就会产生这样或那样的误差。从这一意义上来说，在测量中产生误差是不可避免的。当然，在客观条件允许的限度内，测量工作者可以而且必须确保观测成果具有较高的质量。

二、观测误差分类

根据观测误差对测量结果的影响性质，可分为偶然误差、系统误差和粗差三类。

1．偶然误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。

例如，仪器没有严格照准目标，估读水准尺上毫米数不准，测量时气候变化对观测数据产生微小变化等都属于偶然误差。此外，如果观测数据的误差是许多微小偶然误差项的总和，则其总和也是偶然误差。例如测角误差可能是照准误差、读数误差、外界条件变化和仪器本身不完善等多项误差的代数和，因此，测角误差实际上是许许多多微小误差项的总和。而每项微小误差又随着偶然因素影响的不断变化，其数值忽大忽小，其符号或正或负，这样，由它们所构成的总和，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的，这种误差也是偶然误差。这是观测数据中存在偶然误差最普遍的情况。

根据概率统计理论可知，如果各个误差项对其总和的影响都是均匀地小，即其中没有一项比其他项的影响占绝对优势时，那么它们的总和将是服从或近似地服从正态分布的随机变量。因此，偶然误差就其总体而言，都具有一定的统计规律性，故有时又把偶然误差称为随机误差。

2．系统误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为某一常数，那么，这种误差就称为系统误差。

例如，用具有某一尺长误差的钢尺量距时，由尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加，距离愈长，所积累的误差也愈大，这种误差属于系统误差。每一把钢尺的尺长误差是一个常数，这种系统误差称为常系差。而对于全长的影响，则为线性项误差，设一把钢尺的尺长误差为 ε，全长为 m 钢尺长，则线性项误差为 $m\varepsilon$。又如，在定点垂直形变测量中，在两固定点间每天重复进行水准测量，就会发现由于温度等外界因素变化而产生以年为周期的周期性误差，这种具有线性项、周期性现象等有规律的系统误差是一种规律性系统误差。还有的系统误差源对其中部分观测呈规律性影响，而对不同观测群的影响其符号又可正可负，呈现出随机性，从总体上看，这种系统误差属于随机性系统误差，在测量中称为半系统误差。此外，在测量实际中还存在着原因不明的系统误差。

系统误差与偶然误差在观测过程中总是同时产生的，当观测中有显著的系统误差时，偶然误差就处于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质；反之，则呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般具有累积的作用，它对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或减弱其影响，达到实际上可以忽略不计的程度。所谓忽略不计的程度，是指残余的系统误差小于或至多等于偶然误差的量级。一种方法是通过合理的操作程序，例如，进行水准测量时，使前后视距相等，以消除由于视准轴不平行于水准轴

对观测高差所引起的系统误差；另一种方法是进行公式改正，例如，对量距用的钢尺预先检定，求出尺长误差大小，对所量的距离进行改正，减弱尺长系统误差对所量距离的影响等。

如果观测列中已经排除了系统误差的影响，或者与偶然误差相比已处于次要地位，则该观测列就可认为是带有偶然误差的观测列。

但是，在不少测量实际问题中，系统误差的存在及其对观测结果的影响并不能用上述简单的方法予以排除。而要在数据处理中设法予以消除或减弱其影响。

3．粗差

粗差即粗大误差，是指比在正常观测条件下所可能出现的最大误差还要大的误差，通俗地说，粗差要比偶然误差大上好几倍。例如观测时大数读错，计算机输入数据错误，航测相片判读错误，控制网起始数据错误等。这种错误或粗差，在一定程度上可以避免。但在使用现今的高新测量技术如全球定位系统(GPS)、地理信息系统(GIS)，遥感(RS)以及其他高精度的自动化数据采集中，经常是粗差混入信息之中，识别粗差源并不是用简单方法可以达到目的的，需要通过数据处理方法进行识别和消除其影响。

§1-2 测量平差学科的研究对象

由于观测结果不可避免地存在着误差，因此，如何处理带有误差的观测值，找出待求量(以下称未知量)的最佳估值，在测绘学中是测量平差学科所研究的内容。

在测绘工程和其他工程领域中，只带有偶然误差的观测列占大多数，是比较普遍的情形，它是测量平差学科研究的基础内容，也是应用最广和理论研究中最重要的基础部分。一般认为属于经典测量平差范畴。

为了测定一条边长，如果仅丈量一次就可得出其长度，其误差不得而知，也不存在数据处理问题。但可以对该边丈量 n 次，得到 n 个观测边长，取其平均值为该边长的最后长度。此时偶然误差影响得到消除或减弱，既提高了边长的精度，又可检核观测值是否有错误存在，这就是多测 $n-1$ 次所得到的效益。取平均值就是一种带有偶然误差观测列的数据处理方法。多测的 $n-1$ 次，称为多余观测，用 r 表示，即 $r=n-1$ 次，多余观测数就是多于未知量的观测数。在测量工程中，为了提高成果质量和检查发现错误常作多余观测。进行了多余观测，由于每个观测值带有偶然误差，就会产生一定的问题，如确定一个平面三角形的形状，只要测定其中两个内角就够了，现观测三个内角，三个内角观测值之和就不会等于 180°，产生了闭合差或不符值。如何处理由于多余观测引起的观测值之间的不符值或闭合差，求出未知量的最佳估值并评定结果的精度是测量平差的基本任务。

由于上述的闭合差来自于观测的偶然误差，因此必须研究偶然误差概率统计理论，包括偶然误差的分布、评定精度的指标、误差的传播规律、误差检验和误差分析等。

偶然误差是不可避免的，如果观测中还包含有系统误差或者粗差或者两种误差兼而有之，这种数据处理就有一定的难度，这些被认为属于近代测量平差范畴。在设法消除或减弱系统误差或粗差影响条件下，其基本任务仍是求定未知量的最佳估值和评定其精度。

测量平差理论和方法是测绘学科中测量数据处理和质量控制方面重要的组成部分，并在现代 GPS、GIS、RS 及其集成的高新测量技术以及高精度自动化数字化数据采集和处理中得到广泛的应用。

综上所述，测量平差即是测量数据调整的意思。其基本的定义是，依据某种最优化准则，

由一系列带有观测误差的测量数据，求定未知量的最佳估值及精度的理论和方法。测量平差是测绘学中一个专有名词，而且是一个有悠久历史的名词。从其基本定义可以看出，其理论和方法对于其他任何学科，只要是处理带有误差的观测数据均可适用，可见测量平差的应用十分广泛。

§1-3　测量平差的简史和发展

测量平差与其他学科一样，是由于生产的需要而产生的，并在生产实践的过程中，随着科学技术的进步而发展。18世纪末，在测量学、天文测量学等实践中提出了如何消除由于观测误差引起的观测量之间矛盾的问题，即如何从带有误差的观测值中找出未知量的最佳估值。1794年，年仅17岁的高斯(C.F Gauss)首先提出了解决这个问题的方法——最小二乘法。他是根据偶然误差的四个特性，并以算术平均值为待求量的最或然值作为公理，导出了偶然误差的概率分布，给出了在最小二乘原理下未知量最或然值的计算方法。当时高斯的这一理论并没有正式发表。19世纪初(1801年)，意大利天文学家对刚发现的谷神星运行轨道的一段弧长作一系列的观测，后来因故中止了，这就需要根据这些带有误差的观测结果求出该星运行的实际轨道。高斯用自己提出的最小二乘法解决了这个当时很大的难题，对谷神星运行轨道进行了预报，使天文学家及时又找到了这颗彗星。1809年，高斯才在“天体运动的理论”一文中正式发表了他的方法。在此之前，1806年，勒戎德乐(A. M. Legendre)发表了“决定彗星轨道方法”一文，从代数观点也独立地提出了最小二乘法，并定名为最小二乘法，所以后人称它为高斯-勒戎德乐方法。

自19世纪初到20世纪50～60年代的一百多年来，测量平差学者在基于偶然误差的依最小二乘准则的平差方法上作了许多研究，提出了一系列解决各类测量问题的平差方法(经典测量平差)，针对这一时期的计算工具的情况，还提出了许多分组解算线性方程组的方法，达到简化计算的目的。

自20世纪50～60年代开始，随着计算技术的进步和生产实践中高精度的需要，测量平差得到了很大发展，主要表现在以下几个方面：

(1)从单纯研究观测的偶然误差理论扩展到包含系统误差和粗差，在偶然误差理论的基础上，对误差理论及其相应的测量平差理论和方法进行全方位研究，大大地扩充了测量平差学科的研究领域和范围。

(2)1947年，铁斯特拉(T. M. Tienstra)提出了相关观测值的平差理论，限于当时的计算条件，直到20世纪70年代以后才被广泛应用。相关平差的出现，使观测值的概念广义化了，将经典的最小二乘平差法推向更广泛的应用领域。

(3)经典的最小二乘法平差，所选平差参数(未知量)假设是非随机变量。随着测量技术的进步，需要解决观测量和平差参数均为随机变量的平差问题，20世纪60年代末提出并经70年代的发展，产生了顾及随机参数的最小二乘平差方法。它起源于最小二乘内插和外推重力异常的平差问题，由莫里茨(Moritz. H)、克拉鲁普(T. Krarup)提出，取名为最小二乘滤波，推估和配置，也称为拟合推估法。

(4)经典的最小二乘平差法是一种满秩平差问题，即平差时的法方程组是满秩的，方程组有惟一解。20世纪60年代，迈塞尔(P. Meissl)提出了针对非满秩平差问题的内制约平差原理，后经70～80年代多位国内外学者的深入研究，现已形成了一整套秩亏自由网平差的理论

体系和多种解法，并广泛应用于测量实践。

(5)随着微波测距技术在测量中的应用，经典平差中的定权理论和方法也有所革新。许多学者致力于将经典的先验定权方法改进为后验定权方法的研究。在20世纪80年代，方差-协方差估计理论已经形成，所提解法之多，发表论文之多是其他课题所不及的。

(6)观测中既然包含系统误差，那么系统误差特性、传播、检验、分析的理论研究自然展开，相应的平差方法也就产生，例如附有系统参数的平差法等。为了检验系统误差的存在和影响，引进了数理统计学中的假设检验方法，结合平差对象和特点，测量学者发展了统计假设检验理论，提出了与平差同时进行的有效的检验方法。

(7)观测中有可能包含粗差，相应的误差理论也得到发展。其中最著名的是20世纪60年代后期荷兰巴尔达(W.Baarda)教授提出的测量系统的数据探测法和可靠性理论，为粗差的理论研究和实用检验方法奠定了基础。到目前为止，已经形成了粗差定位、估计和假设检验等理论体系。处理粗差问题，一种途径是进行数据探测，对粗差定位和消除；另一种途径是放弃最小二乘法，提出了在数学中称为稳健估计的方法，或称抗差估计。稳健估计理论研究和测量平差中的应用还在深入中。

总之，自20世纪70年代以来，特别是近20多年来，测量平差与误差理论得到了充分发展。这些研究成果在常规测量技术中的应用已经相当普遍，但相应于不断出现和发展的测绘新技术，如何应用已有的方法以及研究提出新的平差理论和方法适应现代数据处理的需要是一个值得研究的问题。

§1-4 本课程的任务和内容

测量平差基础，顾名思义是测量平差学科的理论基础。本课程主要讲述测量平差的基本理论和基本方法，数据处理的对象是带有偶然误差的观测列以及相应的误差理论基础知识。

教学目的是使学生掌握误差理论与经典测量平差基本原理，为进一步学习和研究近代误差理论和测量平差打好基础；学会经典测量平差的各种方法，使学生能独立地解决测绘工程中经常遇到的测量平差实际问题。

本课程主要讨论带有偶然误差的观测值平差处理问题，其内容为：

(1)偶然误差理论。包含偶然误差特性和偶然误差的传播；精度指标及其估计；权与中误差的定义及其估计方法。

(2)测量平差的函数模型和随机模型的概念和建立，最小二乘原理及方法。

(3)测量平差的基础方法。包含条件平差法；间接平差法；附有未知参数的条件平差法和附有限制条件的间接平差法。按最小二乘原理导出平差计算和精度评定的公式，指出其应用。各种平差方法的概括和联系。

(4)测量平差中必要的统计假设检验方法。

最后简要地介绍一些近代测量平差理论和方法，以便与后续有关测量平差课程相连接，为进一步学习和研究这种理论和方法打下基础。

第二章　误差分布与精度指标

测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值,求出未知量的最佳估值,并评定测量成果的精度。解决这两个问题的基础,是要研究观测误差的理论,简称误差理论。偶然误差是一种随机变量,就其总体来说具有一定的统计规律,本章从阐明其统计规律性着手,引出测量中常用的精度含义,定义评定观测精度的指标。

衡量精度的指标有多种,本章着重介绍最主要的指标,即方差和中误差,给出衡量观测向量的精度指标方差-协方差阵,说明当观测值同时含有系统误差和偶然误差时,其精确度的指标是均方误差,最后给出测量不确定度的定义及其基本概念。

概率论中的正态分布是误差理论与测量平差基础中随机变量的基本分布,为此本章先作扼要的介绍。

§2-1　正 态 分 布

无论是在理论上还是在实用上,正态分布都是一种很重要的分布,这是因为:

(1)设有相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,其总和为 $X = \sum_1^n X_i$,无论这些随机变量原来是服从什么分布,也无论它们是同分布或不同分布,只要它们具有有限的均值和方差,且其中每一个随机变量对其总和 X 的影响都是均匀地小,也就是说,没有一个比其他的变量占有绝对优势,那么,其总和 X 将是服从或近似服从正态分布的随机变量。

当我们对某个量进行观测时,总是不可避免地会受到许许多多偶然因素的影响,其中每一个因素都引起基本误差项,而总的测量误差 Δ 则是这一系列个别因素引起的基本误差项 δ_1, $\delta_2, \cdots$ 之和,即 $\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \cdots = \sum_i \delta_i$,如果每一个 δ 对其总和 Δ 的影响都是均匀地小,那么,其总和 Δ(即测量误差)就是服从正态分布的随机变量。

(2)有许多种分布,例如在后面章节中要提到的二项分布,t 分布,χ^2 分布等等,当 $n \to \infty$ 时,它们多趋近于正态分布,或者说,许多种分布都是以正态分布为其极限分布的。

由此可见,正态分布是一种最常见的概率分布,是处理观测数据的基础,所以在这门课程中占有重要的地位。

一、一维正态分布

服从正态分布的一维随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

其中 μ 和 σ 是分布密度的两个参数。为了书写方便起见,上式经常被写成如下形式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} \tag{2-1-1}$$

正态分布也称为高斯分布。对随机变量 X 服从参数为 μ、σ 的正态分布，以后将简记为 $X \sim N(\mu,\sigma)$。

现在求正态随机变量 X 的数学期望 $E(X)$：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x$$

作变量代换，令 $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$，得

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t \tag{2-1-2}$$

因

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t = 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

故

$$E(X) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \mu \tag{2-1-3}$$

再求 X 的方差 $D(X)$：

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x$$

作变量代换，令 $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$，得

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \sigma^2 \tag{2-1-4}$$

由此可见，正态分布密度中的参数 μ 就是 X 的数学期望，而 σ^2 就是它的方差。换言之，对于正态分布而言，这些参数不是别的，而恰好就是随机变量的两个主要数字特征。因此，如果我们已经知道了某一随机变量是服从正态分布的话，则由数字特征就可决定它的分布律，由此更说明了数字特征的重要性。

正态随机变量 X 出现在给定区间 $(\mu-k\sigma,\mu+k\sigma)$ 内的概率（k 为正数）为

$$P(\mu-k\sigma < X < \mu+k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}\mathrm{d}x$$

令 $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则有

$$P(\mu-k\sigma < X < \mu+k\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-k}^{k}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

由上式可得

$$\left.\begin{aligned}P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)&\approx 68.3\%\\P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)&\approx 95.5\%\\P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)&\approx 99.7\%\end{aligned}\right\}\tag{2-1-5}$$

二、n 维正态分布

设随机向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，若 X 服从正态分布，则 X 为 n 维正态随机向量。

n 维正态随机向量 $\underset{n1}{X}$ 的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mid D_{XX}\mid^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_X)^{\mathrm{T}}D_{XX}^{-1}(x-\mu_X)\right\}\tag{2-1-6}$$

式中随机向量 X 的数学期望 μ_X 和方差 D_{XX} 为：

$$\underset{n1}{\mu_X}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E(X_1)\\E(X_2)\\\vdots\\E(X_n)\end{bmatrix}\tag{2-1-7}$$

$$\underset{nn}{D_{XX}}=\begin{bmatrix}\sigma_{X_1}^2&\sigma_{X_1X_2}&\cdots&\sigma_{X_1X_n}\\\sigma_{X_2X_1}&\sigma_{X_2}^2&\cdots&\sigma_{X_2X_n}\\\vdots&&&\vdots\\\sigma_{X_nX_1}&\sigma_{X_nX_2}&\cdots&\sigma_{X_n}^2\end{bmatrix}\tag{2-1-8}$$

数学期望向量 μ_X 和方差阵 D_{XX} 是 n 维正态随机向量的数字特征。μ_X 中各元素 μ_i 为随机变量 X_i 的数学期望，D_{XX} 中各主对角线上的元素 $\sigma_{X_i}^2$ 为 X_i 的方差，非主对角线中的元素 $\sigma_{X_iX_j}$ 为 X_i 关于 X_j 的协方差，是描述随机变量 X_i 与 X_j 之间相关性的量。

随机向量 X 的方差 D_{XX}，也称为方差 - 协方差阵，常简称为方差阵或协方差阵。

§2-2　偶然误差的规律性

任何一个观测量，客观上总是存在着一个能代表其真正大小的数值，这一数值就称为该观测量的真值。从概率和数理统计的观点看，当观测量仅含有偶然误差时，其数学期望也就是它的真值。

设进行了 n 次观测，其观测值为 $L_1,L_2,\cdots,L_n$，假定观测量的真值为 $\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2,\cdots,\widetilde{L}_n$，由于各观测值都带有一定的误差，因此，一般说来观测值 L_i 与其真值 $\widetilde{L}_i$ 或数学期望 $E(L_i)$ 并不相同，设其差为

$$\Delta_i=\widetilde{L}_i-L_i\tag{2-2-1}$$

式中，Δ_i 称为真误差，有时简称为误差。若记

$$\underset{n1}{L}=\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{bmatrix},\ \underset{n1}{\widetilde{L}}=\begin{bmatrix}\widetilde{L}_1\\\widetilde{L}_2\\\vdots\\\widetilde{L}_n\end{bmatrix},\ \underset{n1}{\Delta}=\begin{bmatrix}\Delta_1\\\Delta_2\\\vdots\\\Delta_n\end{bmatrix},$$

则有

$$\Delta = \widetilde{L} - L \tag{2-2-2}$$

如果以被观测量的数学期望

$$E(L) = [E(L_1), E(L_2), \cdots, E(L_n)]^{\mathrm{T}}$$

表示其真值，则

$$\left.\begin{aligned} E(L) &= \widetilde{L} \\ \Delta &= E(L) - L \end{aligned}\right\} \tag{2-2-3}$$

由于所要处理的观测值不包含系统误差，因此这里的 Δ 仅仅是指偶然误差。

在§1-1 中已经指出，就单个偶然误差而言，其大小或符号没有规律性，即呈现出一种偶然性（或随机性），但就其总体而言，却呈现出一定的统计规律性。在大部分情况下，这种统计规律性可以用正态分布来描述。人们从无数的测量实践中发现，在相同的观测条件下，大量偶然误差的分布也确实表现出了一定的统计规律性。下面通过实例来说明这种规律性。

在某测区，在相同的观测条件下，独立地观测了 358 个平面三角形的全部内角，由于观测值带有误差，故三个内角观测值之和不等于其真值（180°），根据（2-2-1）式，各个三角形内角和的真误差可由下式计算：

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3)_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, 358)$$

式中，$(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。现将误差出现的范围分为若干相等的小区间，每个区间的长度 $\mathrm{d}\Delta$ 为 0.20″。将这一组误差数值按大小排列，统计出现在各区间内误差的个数 v_i 以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 v_i/n（此处 $n = 358$），其结果列于表 2-1 中。

表 2-1

误差的区间 ″	Δ为负值			Δ为正值			备注
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$	
0.00～0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	$\mathrm{d}\Delta = 0.20''$；等于区间左端值的误差算入该区间内。
0.20～0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40～0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60～0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80～1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00～1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20～1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40～1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
$\sum$	181	0.505		177	0.495		

从表 2-1 中可以看出，误差的分布情况具有以下性质：(1) 误差的绝对值有一定的限值；(2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多；(3) 绝对值相等的正负误差的个数相近。

为了便于以后对误差分布互相比较，下面对另一测区的 421 个三角形内角和的一组真误差按上述方法进行统计，其结果列于表 2-2 中。