北京市中学课本

数学

第五册

北京市中学课本
数　学
第　五　册
北京市教育局中小学教材编写组编
*
北京人民出版社出版
北京市新华书店发行
北京市印刷一厂印刷
*
1972年1月第1版　　1972年1月第1次印刷
书号：K7·56　　定价：0.24元

毛 主 席 语 录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。学制要缩短，教育要革命，资产阶级知识分子统治我们学校的现象，再也不能继续下去了。

目　　录

第九章　解直角三角形

第十章　圆

1

第九章　解直角三角形

在生产实践中，有许多计算问题都要运用直角三角形的有关知识来解决。本章将集中研究直角三角形的计算问题以及在工业、农业和军事等方面的一些应用。

一　勾股定理

我们画一个两条直角边分别是3厘米和4厘米的直角三角形，再量一下它的斜边，就会知道，斜边的长度恰好是5厘米（图9—1）。就是说，如果直角三角形的两条直角边分别是3和4，它的斜边就是5。

同样，再画一个两条直角边分别是5厘米和12厘米的直角三角形，量一下它的斜边长，恰好是13厘米。

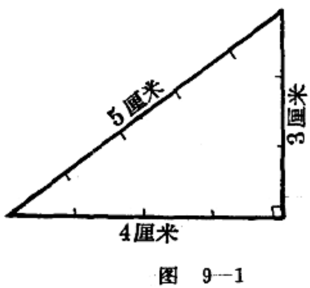


图　9—1

如果我们把这两个直角三角形的三边分别平方，就会看出它们的三边之间具有下面的关系：

$$3^2+4^2=5^2,$$

$$5^2+12^2=13^2.$$

从这里反映出，直角三角形的三条边是互相联系的。

中国是世界文明发达最早的国家之一。早在三千多年前，我国劳动人民就掌握了这种关系，并把直角三角形的两条直角边分别称为勾和股，斜边称为弦(图9—2)。还发现了“勾^2+股^2=弦^2”，这个规律叫做勾股定理。它在工农业生产中具有相当广泛的应用。

下面我们从理论上来证明这个定理。

勾股定理 在直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方。

已知：在$\triangle ABC$中，$\angle ACB$是直角(图9—3)。

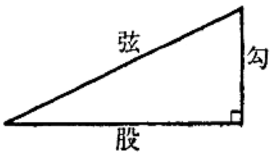


图 9—2

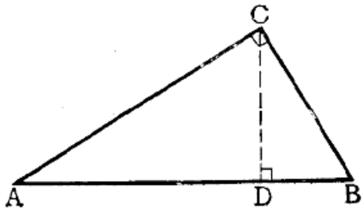


图 9—3

求证：$AC^2+BC^2=AB^2$。

证明：作斜边 AB 上的高 CD。

$$\because \quad \triangle ACD \backsim \triangle ABC,$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC},$$

即 $$AC^2=AB\cdot AD. \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$又\because \quad \triangle CBD \backsim \triangle ABC,$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB}=\frac{DB}{BC},$$

即 $$BC^2=AB\cdot DB. \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)、(2)两式相加，得

$$\begin{aligned} AC^2+BC^2 &= AB\cdot AD+AB\cdot DB \\ &= AB(AD+DB) \\ &= AB^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad AC^2+BC^2=AB^2.$$

由勾股定理我们知道：如果一个三角形是直角三角形，那么，它一定具有“两条直角边的平方和等于斜边的平方”的规律；反过来，如果一个三角形具有“两边的平方和等于第三边的平方”这个规律，那么，它一定是直角三角形。

例 1 木工师傅要用直径 BD 为 35cm 的圆木作出一根最粗的方柱(图 9—4)，问这根方柱横断面的边

长是多少（精确到 1cm）？

解：在直角三角形 ABD 中，$\angle A=90°$。

$\because \quad AB=AD, BD=35,$

根据勾股定理，得

$$AB^2+AD^2=BD^2,$$

即 $\qquad 2AB^2=BD^2$。

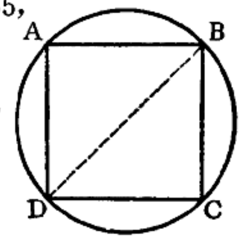


图 9—4

$$\therefore \quad AB=\frac{\sqrt{2}}{2}BD$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 35\approx 25\ (\text{cm})。$$

答：这根方柱横断面的边长约是 25cm。

例 2 工人师傅要在一个工件上打两个孔（图 9—5），已知 $a=80\text{mm}$，$b=70\text{mm}$，求两孔的中心距 c（精确到 0.1 mm）。

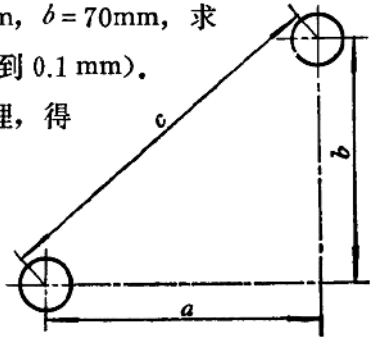


图 9—5

解：根据勾股定理，得

$$c^2=a^2+b^2$$

$$=80^2+70^2$$

$$=11300。$$

查表，得

$$c=106.3(\text{mm})。$$

答：两孔的中心距约为 106.3 mm。

练　习

1. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，a、b、c分别是$\angle A$、$\angle B$和$\angle C$的对边。

(1) 已知 $a=16$，$b=12$。求 c；

(2) 已知 $a=5$，$c=10$。求 b；

(3) 已知 $a=4$，$c=8$。求 b；

(4) 已知 $b=1\frac{1}{2}$，$c=2\frac{1}{2}$。求 a。

2. 判断边长分别为下列各组数值的三角形是不是直角三角形？

(1) 6，8，10；　　　(2) 7，4，5；

(3) 20，25，15；　　(4) 10，7.5，12.5。

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，a、b、c分别是$\angle A$、$\angle B$和$\angle C$的对边。

(1) 已知 $\angle A=45°$，$a=5$。求 c；

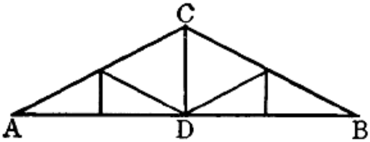
(2) 已知 $\angle B=30°$，$b=1$。求 a；

(3) 已知 $a:c=1:2$，$b=3$。求 a、c；

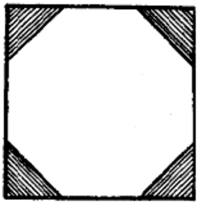
(4) 已知 $a:b=3:4$，$c=35$。求 a、b。

4. 木工师傅要做一个直角三角架，已知两条直角边的长都是50厘米，求斜边的长是多少(精确到0.1厘米)？

5. 如图，红卫生产队的贫下中农修建一座电磨房，人字柁的下弦AB长是5米，中间立柱CD长是1.3米，下料制造时，需要求出人字柁的上弦AC的长．问AC应是多长(精确到0.01米)？



（第 5 题）


（第 6 题）

6. 跃进农具厂的工人师傅，要把一批截面为正方形的钢材，四角截去同样大小的三角形，加工成截面为正八边形工件（如图）。已知正方形边长为 5 厘米，求正八边形工件的边长是多少？

二　锐角三角函数

1. 正弦和余弦

向阳大队的贫下中农高举**“农业学大寨”**的光辉旗帜，劈山凿石，引水上山。他们在一个山坡下的河边修建一座扬水站。为了选择适当扬程的水泵，需要知道出水口的高度 BC 和水平距离 AC（图 9—6）。

可是，BC 和 AC 都不能直接测量出来，怎么办呢？

恩格斯指出：**在自然界中没有孤立发生的东西。**坡长 AB，出水口高 BC 以及水平距离 AC 构成一个直角三角形。斜边 AB 可以直接测得，锐角 A 也可以用测角器测出来。因此，尽管 BC、AC 不能直接测得，

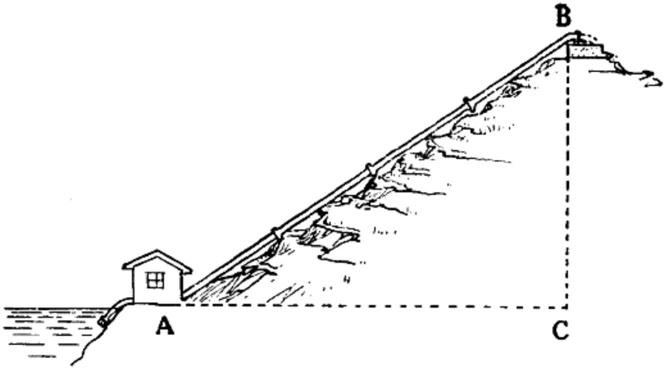


图 9—6

但是我们却可以通过直角三角形边与角之间的关系间接地求出来.

上面的问题实际上是在直角三角形中，已知斜边和一个锐角，求直角边的问题.

我们知道，在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半. 这就是说，在直角三角形 ABC 中(图 9—7)，当$\angle A$为30°时，不管 BC 在哪个位置上，$\angle A$的对边与斜边的比值始终是$\frac{1}{2}$.

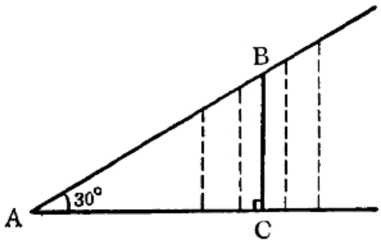


图 9—7

当直角三角形

的一个锐角(如$\angle A$)一定时，是不是它的对边与斜边的比值也始终是一个定值呢?

我们看图9—8，在直角三角形ABC、$AB'C'$、$AB''C''$、……中，$\angle A$为一个锐角.

$$\because \quad \triangle ABC \backsim \triangle AB'C' \backsim \triangle AB''C'' \backsim \cdots\cdots,$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots,$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}=\cdots\cdots.$$

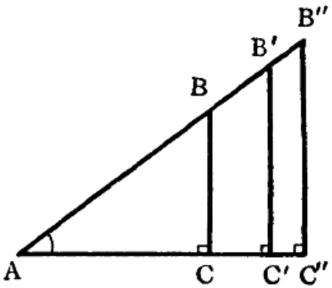


图 9—8

从以上的比例关系我们可以看出：在直角三角形中，当$\angle A$大小一定时，不管它的边长怎样变化，$\angle A$的对边与斜边的比，邻边与斜边的比都分别是一个定值，从而看到直角三角形中，边和角之间是“**互相联系的和具有内部规律的**”.

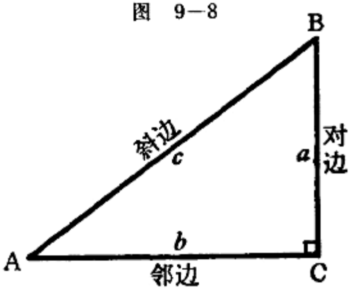


图 9—9

如图9—9，在直角三角形ABC中，我们

把 $\angle A$ 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦，用符号"$\sin A$"表示。即

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}. \qquad (1)$$

把 $\angle A$ 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的余弦，用符号"$\cos A$"表示。即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}. \qquad (2)$$

(1)式和(2)式就反映了直角三角形中直角边、斜边和锐角之间的互相联系和内部规律。

例 1 写出图 9—10 中，$\sin A$、$\cos A$、$\sin B$、$\cos B$ 的值。

解：$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$;

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$;

$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$;

$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$.

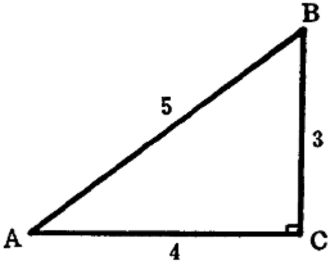


图 9—10

从例 1 可以看到：$\angle A$ 的正弦值和 $\angle B$ 的余弦值都等于 $\frac{3}{5}$，$\angle A$ 的余弦值和 $\angle B$ 的正弦值都等于 $\frac{4}{5}$.

一般地，根据图 9—9 我们可以得到：

$$\sin B=\frac{b}{c},\ \cos B=\frac{a}{c}.$$

把它们与(1)、(2)式比较，同样可以看到：$\angle A$ 的正弦值和$\angle B$ 的余弦值都等于$\frac{a}{c}$；$\angle A$ 的余弦值和 $\angle B$ 的正弦值都等于$\frac{b}{c}$. 因此

$$\sin A=\cos B,$$

$$\sin B=\cos A.$$

这就是说：一个角的正弦等于它的余角的余弦.

例 2 (1)求 30°、60° 角的正弦和余弦. (2)求 45° 角的正弦和余弦.

解：(1)在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$(图9—11).

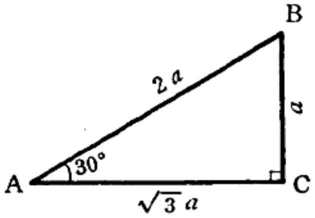


图 9—11

设$BC=a$，那么，$AB=2a$.

$$\sin 30°=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}.$$

由勾股定理，得

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}\,a.$$

$$\therefore\quad \cos 30°=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\because \quad \sin A=\cos B,$

$\therefore \quad \sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$\cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}.$

(2) 在$\triangle ABC$中，

$\angle C=90^\circ, \angle A=\angle B=45^\circ$

(图9—12)。

设$BC=a,$

则$AC=a.$

由勾股定理，得

$AB=\sqrt{2}a.$

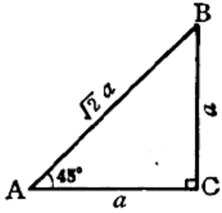


图 9—12

$\therefore \quad \sin 45^\circ=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

$\cos 45^\circ=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

例 3 计算：$\dfrac{1}{2}\sin 60^\circ+\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ.$

解：$\dfrac{1}{2}\sin 60^\circ+\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

例 4 前面我们讲到的向阳大队贫下中农，修建一座扬水站。如果测得坡长 AB 为 45 米，$\angle A$ 为 30°，求出水口的高度 BC 和水平距离 AC。

解：$\because \quad \sin A=\frac{BC}{AB}$，

$$\therefore \quad BC=AB\cdot\sin A=45\cdot\sin 30^\circ=45\times\frac{1}{2}$$

$$=22.5\text{（米）}。$$

$$\because \quad \cos A=\frac{AC}{AB},$$

$$\therefore \quad AC=AB\cdot\cos A=45\cdot\cos 30^\circ=45\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\approx 39\text{（米）}。$$

答：出水口的高度 BC 为 22.5 米，水平距离 AC 约为 39 米。

例 5 求证：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$*。

证明：$\because \quad \sin A=\frac{a}{c}$（图 9—9），

$$\cos A=\frac{b}{c},$$

* $\sin^2 A$ 是 $(\sin A)^2$ 的简写，$\cos^2 A$ 是 $(\cos A)^2$ 的简写。