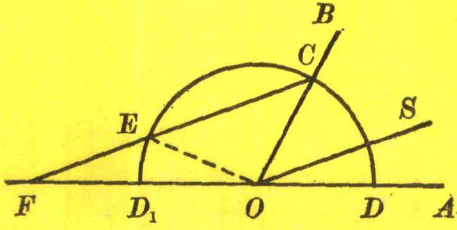
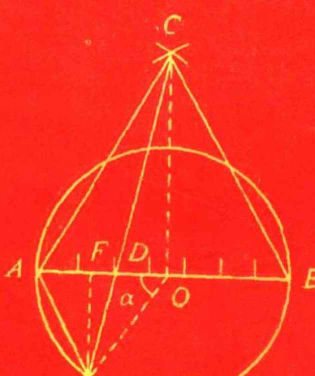


几何作图不能问题

JIHE ZUOTU BUNENG WENTI



上海教育出版社

中学生文库

几何作图不能问题

邱贤忠 沈宗华

上海教育出版社

中学生文库　　**几何作图不能问题**

邱贤忠　沈宗华　　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
江苏溧阳印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行
开本 787×1092 1/32　印张 1.5　字数 29,000
1983年3月第1版　1986年7月第3次印刷
印数70,001—110,00本

统一书号：7150·2817　　定价：0.21元

目录

ZHONG XUE SHENG WENKU

一、您知道几何三大问题吗?

在公元前五世纪，希腊的雅典城内有一个包括各方面学者的巧辩学派，他们第一次提出并研究了下面三个作图题：

1．三等分任意角问题——任给一个角 α，求作一角等于 $\frac{\alpha}{3}$.

2．立方倍积问题——求作一立方体，使其体积等于已知立方体体积的二倍.

3．化圆为方问题——求作一正方形，使其面积等于一已知圆的面积.

这就是数学上著名的几何三大问题．它是古希腊人在解出了一些作图题之后所作的一种引伸．因任意角可以二等分，于是就想搞三等分；因以正方形对角线为一边作一正方形，其面积是原正方形面积的二倍，这就容易想到立方倍积问题；因作了一些具有一定形状的图形使之与给定图形等积这一类作图题之后，而圆和正方形是最简单的几何图形，这就很自然地提出了化圆为方的问题.

从表面上看，这三个问题都很简单，似乎应该可用尺规作图来完成，因此两千多年来曾吸引了许多人，进行了经久不息的研究．虽然发现了只要借助于别的作图工具或曲线即可轻易地解决问题，但是仅用尺规进行作图却始终未能成功．1637

年笛卡尔 (Descartes, R. 1596—1650) 创立了解析几何，又经过两百年，1837 年闻脱兹尔 (Wantzel, P. L. 1814—1848) 在研究阿贝尔 (Abel, N. H. 1802—1829) 定理的化简时，始证明了三等分任意角和立方倍积这两个问题不能用尺规作图来完成. 1882 年，林德曼 (Lindemann, F. 1852—1939) 在埃尔米特 (Hermite, C. 1822—1901) 证明了 e 是超越数的基础上，证明了 π 也是超越数，从而证明了化圆为方也是尺规作图不能问题. 最后，克莱因 (Klein, F. 1849—1925) 在总结前人研究成果的基础上，1895 年在德国数理教学改进社开会时宣读的一篇论文中，给出了几何三大问题不可能用尺规来作图的简单而明晰的证法，从而使两千多年未得解决的疑问告一段落.

几何三大问题尽管历时两千多年，似乎是向人类智慧的一次挑战，但最终还是被人们征服了. 今天看来这不过是三个完全解决了的题目而已，决不是还需要人们去继续攻攀的难题. 本书的目的并非引导读者想方设法去解决这三个问题，而是希望通过了解这三个问题的始末，懂得处理这一类不可能问题的方法，并运用本书的知识去剖析一些错误的作法，规劝那些无知的人勿再把时光浪费在寻求几何三大问题的求解上.

几何三大问题还能给我们一点启示，这就是对待一个未解决的问题的意义的认识，特别是历史长、影响深，得到过一些著名数学家钻研而尚未解决的那些著名问题. 这些问题往往不是通常的方法所能解决的. 对此，往往要越出通常的方法才能解决问题. 于是，问题本身的意义不仅在于这个问题的解，更在于一个问题的解决可望得到不少新的成果和发现

新的方法．例如，几何三大问题开创了对圆锥曲线的研究，发现了一些有价值的特殊曲线，提出了尺规作图的判别准则，等等．这些都比之几何三大问题的意义深远得多．对于那些至今未解决的许多著名问题，例如哥德巴赫问题，费马大定理等，似都应采取这样的态度，停留于初等方法是决不可能解决这些问题的．

二、尺规作图的意义

初等几何中，所接触到的问题主要有两类：一类是先假设给出合乎一定条件的图形，然后研究这个图形有些什么性质，证明题、计算题即属于这一类；另一类是预先给出一些条件，要求作出具备这些条件的图形，这便是作图题．按照一定方法作出所求图形的过程，叫做解作图题．作图的方法，自然是和作图的工具有关的．古希腊以来，平面几何中的作图工具习惯上限用直尺和圆规两种．其中，直尺假定直而且长，但上面无任何刻度，圆规则假定其两腿足够长并能开闭自如．作图工具的这种限制，最先大概是恩诺皮德斯（Oenopides，约公元前465年）提出的，以后又经过柏拉图（Plato，公元前427—347）大力提倡．柏拉图非常重视数学，强调学习几何对训练逻辑思维能力的特殊作用，主张对作图工具要有限制，反对使用其他机械工具作图．之后，欧几里得（Euclid，约公元前330—275）又把它总结在《几何原本》一书中．于是，限

用尺规进行作图就成为古希腊几何学的金科玉律.

其实，作图工具的这种限制并非个别人的癖好和主观旨意，主要有下面两方面的原因.

1. 和研究的对象有关. 因为初等平面几何研究的对象，只限于直线、圆以及由它们(或其一部分)所组成的图形. 有了直尺和圆规这两种作图工具，直线和圆都已可作出，自然无需再增加别的工具.

2. 和公理系统有关. 在欧几里得几何中，从最少的基本假设(定义、公理、公设)出发，通过逻辑推理，得出尽可能多的命题，这里，关于作图题的结论是和几何证明、几何计算的结论相当的，欧几里得公理系统里的几条公设也就决定了只能是限用尺规作图. 并且，凡能作出的图形都在欧几里得几何里加以研究；凡研究其性质的图形也必可用尺规来作出.

确定了作图工具后，还要明确允许怎样使用这两种工具. 就是说，直尺和圆规具有什么功能？为此，在平面几何里约定，利用直尺和圆规可以并且只能完成如下几个认可的简单作图：

1° 通过两个已知点可以作一条直线(欧几里得几何公理系统中的五条公设之一)；

2° 以一个已知点为圆心，以某一已知距离为半径，可以作一个圆(欧几里得几何公理系统中的五条公设之一)；

3° 两已知直线，一已知直线和一已知圆，或两已知圆，如其相交，可确定其交点.

此外还附加一个规约：在已知直线上或直线外，已知圆周上或圆内(外)，均可任意取点，但所取的点不得附加其余任何特殊性质.

上面 1°—3° 条叫做作图公法，用以指明尺规作图的可能范围.

所谓利用直尺和圆规来完成一个作图题，就是指上述作图公法所确定的三种简单作图的有限次的组合.

能有限次地进行作图公法所确定的三种简单作图，从而最终可以得到给定条件的图形，这一类作图题称为尺规作图可能问题. 反之，凡有限次地进行作图公法所确定的三种简单作图肯定不能得到给定条件的图形，这一类作图题就称尺规作图不能问题.

下面通过几个例子，从正、反两个方面来加深理解尺规作图的意义.

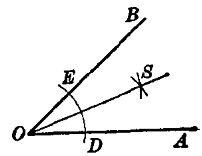


图 1

[例 1]　已知 $\angle AOB$，求作射线 OS，使 $\angle AOS=\angle SOB$.

作法　1) 以点 O 为圆心，任意长为半径作 $\overset{\frown}{DE}$（公法 2°）；交 OA 于点 D，交 OB 于点 E（公法 3°）.

2) 分别以点 D 和 E 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的同样长为半径作弧（公法 2°），此两条弧相交于点 S（公法 3°）.

3) 作射线 OS（公法 1°）.

则 OS 就是所求的射线.

例 1 的上述作图过程，实质上可以分解为作图公法 2°, 3°, 3°, 2°, 3°, 1° 的有限次组合.

不仅例 1 是这样，任何一个尺规作图可能问题，都应能分解为作图公法 1°—3° 的有限次的组合.

[例 2]　已知 $\angle AOB$，求作射线 OS，使

$$\angle AOS=\frac{1}{3}\angle AOB.$$

作法一 古希腊物理学家兼数学家阿基米德（Archimedes, 公元前 287—212 年）的著作中，记载了三等分一个已知角的方法如下：

1) 以点 O 为圆心，取任意长 r 为半径作圆，与 OA 所在直线相交于两点 D、D_1，与 OB 相交于点 C.

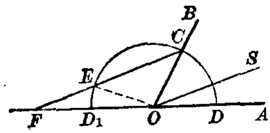


图 2

2) 在直尺一边上划上 E、F 两点，使 $EF=r$，然后绕点 C 滑动直尺的位置，使直尺上 E、F 两点分别落在半圆和 AO 的延长线上，在此位置上作直线 CEF.

3) 过 O 作 $OS \parallel CEF$.

则 OS 即为所求之三等分角线.

易于证明射线 OS 确满足 $\angle AOS=\frac{1}{3}\angle AOB$，但这里的作图不符合作图公法. 上述作法中的第二步，不能归结为作图公法里规定的三种作图中的任一种. 实质上，这是使直尺具有了刻度的功能，与尺规作图中的直尺无任何刻度不符.

再介绍一种三等分任意角的方法，研究其是否符合尺规作图公法.

作法二 作一个角的平分线，这是一个尺规作图可能问题(见例 1). 因而可用尺规把一个已知角四等分，八等分，十六等分，……，2^n 等分（n 是正整数）.

现在，我们在 $\frac{1}{2}\angle AOB$ 上减去 $\frac{1}{4}\angle AOB$，再加上 $\frac{1}{8}\angle AOB$，再减去 $\frac{1}{16}\angle AOB$，再加上 $\frac{1}{32}\angle AOB$，循此进行下去，所得的角就越来越趋近 $\frac{1}{3}\angle AOB$，如果继续作到无

限多次，那么就能得到$\frac{1}{3}\angle AOB$了．这是因为，运用无穷递降等比数列的求和公式，有

$$\angle AOB\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\cdots\right)$$

$$=\angle AOB\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\angle AOB.$$

在这个作图过程中，虽然作一个角的平分线和作一个角使它等于已知两角的和或差，都是尺规作图可能问题，但是毛病出在直尺和圆规按照作图公法使用了无限多次，这也不符合尺规作图的要求．

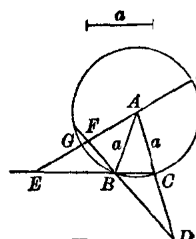


图 3

［例 3］ 设已知立方体的棱长为a，求作一立方体，使其体积为原立方体的二倍．

设所求立方体棱长为x．按条件，则有$x^3=2a^3$，即

$$x=\sqrt[3]{2}\,a.$$

作法 1）作$\triangle ABC$，使$AB=AC=a$，$BC=\frac{a}{2}$；

2）延长AC至D，使$CD=a$；

3）过点A作一直线，与直线CB、DB分别交于E、F，且使$EF=a$；

则 $EB=\sqrt[3]{2}\,a$.

证明 在$\triangle ACE$中，应用梅内劳斯(Menelaus)定理，得

$$\frac{AD}{CD}\cdot\frac{CB}{EB}\cdot\frac{EF}{AF}=1.$$

将 $AD=2a$, $CD=EF=a$, $CB=\frac{a}{2}$ 代入上式，得

$$AF=\frac{a^2}{EB}.$$

以点 A 为圆心，以 a 为半径作一圆，与直线 AE 交于点 G、H. 由切割线定理，有

$$EB\cdot EC=EG\cdot EH.$$

将 $EC=EB+\frac{a}{2}$, $EG=AF=\frac{a^2}{EB}$, $EH=AF+2a=\frac{a^2}{EB}+2a$ 代入上式，得

$$EB\left(EB+\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{EB}\left(\frac{a^2}{EB}+2a\right),$$

即

$$EB\left(EB+\frac{a}{2}\right)=\frac{2a^3}{EB^2}\left(\frac{a}{2}+EB\right).$$

$$\because\quad EB+\frac{a}{2}\neq 0,$$

$$\therefore\quad EB=\frac{2a^3}{EB^2}.$$

$$\therefore\quad EB=\sqrt[3]{2}\,a.$$

可见 EB 确实是所要求作的立方体的棱长. 但是，作图的第 3 步中使直尺具有了刻度的功能. 事实上，作法 3) 是这样来实现的：在直尺一边上划上 E、F 两点，使 $EF=a$，然后绕点 A 滑动直尺的位置，使直尺上 E、F 两点分别落在 CB、DB 上，在此位置上才作出直线 AFE. 这一作图过程是不能归结为作图公法所规定的三种简单作图，事实上是使直尺具有了刻度的功能，因而上述作法不合尺规作图的要求.

三、尺规作图的可能性

前已指出，不能通过有限次的作图公法所确定的三种简单作图，从而最终得到给定条件的图形，这一类作图问题叫做尺规作图不能问题. 但是，对于一个作图问题，怎样来判定它是尺规作图可能问题还是尺规作图不能问题呢？这是直至十九世纪三十年代才解决的问题. 从三大作图问题提出以来，经过了二千多年，人们的许多努力都归于失败，早就怀疑三大作图问题是尺规作图不能问题了. 但是，即使你未能用尺规来完成一个作图题，未必别人也不能完成；即使今天不能解决这一作图，未必明天也不能解决；即使剖析了许许多多不正确的作图，未必不存在一个正确的尺规作图方法. 这就需要特别在尺规作图难题和尺规作图不能问题之间划一条界线. 为此，我们从分析作图公法所确定的三种简单作图入手.

作图公法中的前两条，说的是通过两个点可以作一条直线、以一个已知点为圆心以某一已知距离为半径可以作一个圆（或说成是以一个点为圆心可以作一个通过另一个点的圆），这样，对于一个作图题（无非是求作一些点，或是求作直线、圆弧或是它们围成的图形），就都可看成是求一些点的问题了. 例如，求作一条直线的话，只要求出这直线上的两个点就可以了，最后只相差按作图公法 1° 把直线实际地画出来即可；求作一个圆的话，则只要求出作为圆心的点和圆周上的另

一个点就可以了，等等．而在解作图题时，已知的线段（长度）、直线、角（角度）、圆等等图形，在作图过程中实际起作用的也只是这些图形上的一些点而已．这就说明，尺规作图的过程无非是从一些已知点出发来求一些新的点．

作图公法的第三条，说的是直线和直线、直线和圆、圆和圆之间如果相交，它们的交点是可求的．而在作图公法中，并没有给出按其它方式得到新的点的途径，这就意味着，尺规作图过程中从一些已知点（包括任意取的点和中间过程中已作出的点）出发来求一些新的点（包括作图中间过程得到的点以及最终欲求作的点）的方法，只能通过上述求直线和直线、直线和圆、圆和圆的交点来得到．

综上对作图公法的分析，即可得知尺规作图的实质无非是由一些已知点（包括任意取的点和中间过程已作出的点）出发，来求作下面几种交点：

1．过点 A、B 的直线和过点 C、D 的直线的交点；

2．过点 A、B 的直线和以点 O 为圆心并过圆周上一点 C 的圆的交点；

3．以点 O_1 为圆心并过圆周上一点 C 的圆和以点 O_2 为圆心并过圆周上一点 D 的圆的交点．

现在对上述三种情形，在直角坐标平面上逐一加以考察．

1．设 A、B、C、D 的坐标分别是 (a_1, a_2)、(b_1, b_2)、(c_1, c_2)、(d_1, d_2)，那么过点 A、B 的直线和过点 C、D 的直线的交点的坐标 (x, y)，可由下述联立方程而解得：

$$\begin{cases} \dfrac{x-a_1}{b_1-a_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2-a_2}, \\ \dfrac{x-c_1}{d_1-c_1}=\dfrac{y-c_2}{d_2-c_2}. \end{cases}$$

2．设 A、B、C、O 的坐标分别是 (a_1, a_2)、(b_1, b_2)、(c_1, c_2)、(d_1, d_2)，那么过点 A、B 的直线和以点 O 为圆心并过圆周上一点 C 的圆的交点的坐标 (x, y)，可由下述联立方程而解得：

$$\begin{cases} \dfrac{x-a_1}{b_1-a_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2-a_2}, \\ (x-d_1)^2+(y-d_2)^2=(c_1-d_1)^2+(c_2-d_2)^2. \end{cases}$$

3．设点 O_1、O_2、C、D 的坐标分别是 (a_1, a_2)、(b_1, b_2)、(c_1, c_2)、(d_1, d_2)，那么以点 O_1 为圆心并过圆周上一点 C 的圆和以点 O_2 为圆心并过圆周上一点 D 的圆的交点的坐标 (x, y)，可由下述联立方程而解得：

$$\begin{cases} (x-a_1)^2+(y-a_2)^2=(c_1-a_1)^2+(c_2-a_2)^2, \\ (x-b_1)^2+(y-b_2)^2=(d_1-b_1)^2+(d_2-b_2)^2. \end{cases}$$

在上述三组联立方程中，第一个方程组是二元一次方程组，根据初等代数知识，它的解只要通过方程系数之间进行加、减、乘、除运算就可得到；第二和第三个方程组都是最简单的一类二元二次方程组，求解过程中主要是还要解一个一元二次方程，由一元二次方程的求根公式知，这两个方程组的解除了要通过方程系数之间进行加、减、乘、除运算外，还要添加正实数开平方的运算．综上三种情况，可知根据作图公法得出的点，它的坐标只能是由已知点的坐标通过加、减、乘、除和正实数开平方而得出的数所组成．据此，即可判定一个作图题可否由尺规作图来完成，就是说：对于一个作图题，所求点的坐标如可用已知点坐标通过加、减、乘、除和正实数开平方而得出，这个作图题是可用尺规作图来完成的；反之，所求点的坐标如不可表成已知点坐标通过加、减、乘、除和正实数开

平方的形式，这个作图题便是尺规作图不能问题.

上述判别尺规作图可能性的方法，也给出了一个尺规作图题的一种可能解法（当然不一定是最简的解法）. 这里，只要把已知点分别投影到两坐标轴上，再分别在两坐标轴上作出所求点的坐标所对应的线段. 我们知道，作线段的和、差是很简单的，而相乘 $x=ab$、相除 $x=\frac{c}{d}$ 相当于作线段的第四比例项 $1:a=b:x$、$d:c=1:x$，开平方 $x=\sqrt{a}$ 则相当于作线段的比例中项 $1:x=x:a$，依此即可作出待求的点在两坐标轴上的投影（如是一个尺规作图可能问题，即所求点的坐标可用已知坐标通过加、减、乘、除和正实数开平方来表示的话），而由一个点在两坐标轴上的投影出发来作出这个点便不难了.

上面给出的判别方法，对于那些可直接归结为（或肯定不能归结为）由已知点坐标通过加、减、乘、除和正实数开平方而得出的数所表示的点的情形，自然是易于判断的. 例如，当已知单位线段 1，便可作出长度为有理数的线段；而要作出线段 $\sqrt{\pi}$ 的话，应用上面的判别法则并结合 π 是超越数的事实，则可得知 $\sqrt{\pi}$ 是一个尺规作图不能问题（参见本书第 17 页）. 但对另一些情形，如前面例 3 中的问题：已知线段 a，求作线段 $\sqrt[3]{2}a$，就不能简单地肯定 $\sqrt[3]{2}a$ 是否可由已知数 1、a 通过加、减、乘、除和正实数开平方来表示. 一般说来，这里要用到近世代数里的“伽罗瓦（Galois, E. 1811—1832）理论”，这已超出了本书的读者对象所能接受的范围.

鉴于本书是试图在初等范围里来讨论尺规作图的可能性，并主要解决几何三大作图的判别，这里在前述基础上再介绍一种判别方法. 这一方法完全是初等的，虽不能判别所有

的尺规作图不能问题，但三大作图问题中的两个已可得以解决了．

首先，把求交点的坐标问题退一步，先考察求交点坐标时所用的那个方程．如果这是一个一元三次方程的话，则有

定理 1　如果三次方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

有一个根可由 a、b、c 通过加、减、乘、除和正实数开平方而得出，那么这方程一定有一个根可由 a、b、c 通过加、减、乘、除而得出．

证明　今已知方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有一个根可由 a、b、c 通过加、减、乘、除和正实数开平方而得出，考虑到可能有几重开平方运算，于是，我们总可从 a、b、c 出发构造一串集合 K_0, K_1, ……, K_n, 使这个根在 K_n 中，而集合 K_0, K_1, ……, K_n 是采用递推的方法来定义：

K_0 是由 a、b、c 通过加、减、乘、除而得出的数的全体所组成的集合；

K_1 是由一切形如 $a_0+b_0\sqrt{k_0}$ 的数所组成的集合，其中 a_0、b_0、$k_0\in K_0$，但 $\sqrt{k_0}\notin K_0$；

$$\vdots$$

K_{i+1} 是由一切形如 $a_i+b_i\sqrt{k_i}$ 的数所组成的集合，其中 a_i、b_i、$k_i\in K_i$，但 $\sqrt{k_i}\notin K_i$．这里 $i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$．

显然，有 $K_0\subset K_1\subset K_2\subset\cdots\cdots\subset K_n$；并且，集合 K_i 中的数经加、减、乘、除而得出的数仍在集合 K_i 中 $(i=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$．

这样，定理 1 的结论就可改述成：已知方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有一个根在集合 K_n 中，则这方程一定有一个根在集