中学微积分问答

翟连林　赵家骅　编

中国农业机械出版社

内容简介

为了帮助高中学生、青年职工，特别是自学青年学习微积分.作者根据现行高中《数学》第四册教材，把微积分的一些重要概念、定理、公式、法则和常用的解题方法、技巧，以及初学者常易犯的错误，归纳成一个一个的问题，采取问答形式，进行通俗易懂的讲述.本书内容主要包括微积分的预备知识；函数的极限与连续性；导数和微分；导数和微分的应用；不定积分；定积分及其应用等.

读者对象：高中学生、青年职工以及自学青年，也可供中学数学教师参考.

中学微积分问答

翟连林　赵家骅　编

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

冶金工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

787×1092　32开　6 2/16 印张　135 千字

1982年 6 月北京第一版・1982年 6 月北京第一次印刷

印数：00,001—86,000　定价 ~~0.64~~ 元 0.53

统一书号：13216・008

前　言

本书系根据教育部颁布的全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案)和《中学部分学科内容要点汇编》的规定，一元微积分已下放到高中，并列为高考的内容．为了帮助广大高中学生、青年职工，特别是自学青年学习微积分，我们根据现行高中数学教材，结合我们讲授“微积分”这门课程的教学经验，采取问答形式，编写成此书．

本书的特点是把微积分的概念、定理、公式、法则，常用的解题方法和技巧，初学时常易犯的错误等归纳成一个一个的问题，采取问答形式，进行通俗易懂的讲述．

在本书定稿过程中，承北京农业大学的陈伟侯同志、北京建筑工程学院的马龙友同志审阅了全部书稿，中国矿业学院的郝家骅同志、北京宣武区红旗大学的胡修伟同志审阅了部分书稿，他们提出了许多宝贵意见；本书的全部插图都是由阮光南同志帮助绘制的；梁琴同志为本书的出版也付出了辛勤的劳动．在此一并表示衷心的感谢．

由于我们的水平有限，书中的缺点、错误在所难免，希望读者批评指正．

编　者

1981年9月

目　　录

第一章　预 备 知 识

1．什么是区间？

答： 区间是介于某两个实数之间的全体实数.

这两个实数称为区间的端点.

例如，以 1 和 $\sqrt{2}$ 两个实数为端点的区间，

表示了 1 和 $\sqrt{2}$ 之间的所有实数.

2．区间分几类？

答： 区间的分类如下表：

- 区　间
  - 有限区间
    - 开 区 间：不包括两个端点，如 (a,b) ㊀
    - 半开区间：包括一个端点，如 $[a,b]$、$[a,b]$
    - 闭 区 间：包括两个端点，如 $[a,b]$
  - 无限区间
    - $(-\infty,+\infty)$ ㊁：包括一切实数
    - $(a,\ +\infty)$：大于 a 的一切实数
    - $[a,\ +\infty)$：大于、等于 a 的一切实数
    - $(-\infty,\ b)$：小于 b 的一切实数
    - $(-\infty,\ b]$：小于、等于 b 的一切实数

3．区间有几种表示法？

答： 有四种.

（1）括号表示法

即用小括号表示开区间，如 $(-1,\ 2)$；用中括号表示闭区间，如 $[-1,\ 2]$.

㊀ a，b 为两个不等的实数，且 $a<b$.

㊁ “∞”读作“无穷大”，它不是一个很大的数，而是表示无限变大的趋势.

（2）不等式表示法

用关于 x 的一次不等式表示区间．如 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 表示闭区间；$0<x<1$ 表示开区间；$0\leqslant x<1$ 或 $-1<x\leqslant\sqrt{2}$ 表示半开区间；用 $x>a$ 表示大于 a 的无限区间．

（3）数轴表示法

用数轴上的线段表示区间．

例如，图1-1表示闭区间〔-2，3〕．图 1-2 表示开区间（-2，3）．

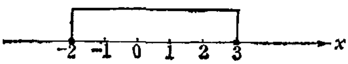

图 1-1

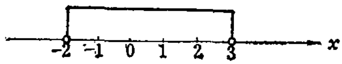

图 1-2

图 1-3 表示半开区间〔-2，3），图 1-4 表示无限区间（-2，$+\infty$）．

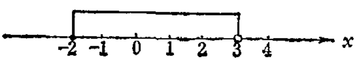

图 1-3

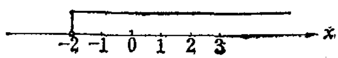

图 1-4

（4）集合表示法

集合 $A=\{x：-1<x<2\}$ 表示开区间（-1，2），

集合 $B=\{x：x\geqslant 2\}$ 表示无限区间〔2，$+\infty$）．

4. 图1-5表示的区间是（-2，3〕吗？为什么？

答： 不是．因为按图 1-5 所示，在区间中不包括第二个端点 3，而包括第一个端点 -2．

所以，图1-5表示的不是区间（-2，3〕．表示的是区间〔-2，3）．

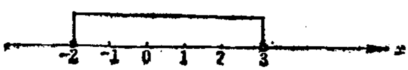

图 1-5

5. 下面所表示的区间对吗？为什么？

（1）〔3，2〕；（2）（$+\infty$，-2）；（3）（2，$+\infty$〕；

（4）〔12）.

答：都不对.

（1）不应把3写在2的左边．应改为〔2，3〕.

（2）不应把$+\infty$写在-2的左边．应改为$(-2,+\infty)$.

（3）在$+\infty$右边不能写成中括号．应改为$(2,+\infty)$.

（4）在两个区间端点之间丢掉了逗号．应改为〔1,2）.

6. 什么是函数的定义域？

答：使函数有意义的自变量的取值范围，称为函数的定义域.

7. 求函数定义域时应注意什么问题？

答：应注意函数的实际意义和数学意义.

（1）实际意义

例如，函数$S=\pi r^2$（S为圆面积，r为圆的半径）的定义域为$r>0$.

又如，函数$S=vt$（S为距离，t为时间，v为速度）的定义域为$t\geqslant 0$.

（2）数学意义

例如，

① $a_n=2n+1$，则$n\in N$（N是自然数集）；

② $y=\sqrt[2n]{x}$，则$x\geqslant 0(n\in N)$；

③ $y=\dfrac{1}{x}$，则$x\neq 0$；

④ $y=\log_a x$，则$x>0$（$a>0$，$a\neq 1$）；

⑤ $y=\operatorname{tg} x$，则$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in$整数集$J$）；

⑥ $y=\operatorname{ctg} x$，则$x\neq kx(k\in J)$；

⑦ $y=\arcsin x$，则$-1\leqslant x\leqslant 1$；

⑧ $y=\arccos x$，则$-1\leqslant x\leqslant 1$.

8. 怎样求下列函数的定义域？

（1）$y=\sqrt{x^2-4x+3}$；（2）$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；

（3）$y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$；（4）$y=\operatorname{tg}(x+1)$；

（5）$y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$.

答：（1）由 $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)\geqslant 0$，

即 $\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\x-1\geqslant 0;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-3\leqslant 0,\\x-1\leqslant 0.\end{cases}$

解之，得

$$x\geqslant 3，\text{或}x\leqslant 1.$$

∴ 函数的定义域为

$$\{x:x\geqslant 3\}\cup\{x:x\leqslant 1\}.$$

（2）由$\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\16-x^2\geqslant 0.\end{cases}$解之，得

$$\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\,(k\in J),\\-4\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

∴ 函数的定义域为

$$\{x:-4\leqslant x\leqslant -\pi\}\cup\{x:0\leqslant x\leqslant \pi\}.$$

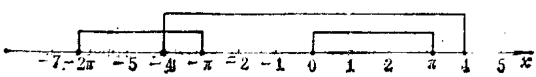

图 1-6

（3）$\sin x-\cos x\neq 0$.

而 $\sin x-\cos x=\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$=2\cos\frac{x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\cdot\sin\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

则 $$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0,$$

于是 $$x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi(k\in J),$$

即 $$x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}.$$

∴ 函数的定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$的一切实数.

（4）$k\pi-\frac{\pi}{2}<x+1<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$(k\in J)$

则 $k\pi-\frac{\pi}{2}-1<x<k\pi+\frac{\pi}{2}-1$,

∴ 函数的定义域为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}-1, k\pi+\frac{\pi}{2}-1\right)$.

（5）$-1\leqslant\frac{x-3}{2}\leqslant 1$

$$\Rightarrow\ 1\leqslant x\leqslant 5.$$

∴ 函数的定义域为〔1，5〕.

9. 下列各组函数的定义域相同吗？

（1）$2\ln(1-x)$和$\ln(1-x)^2$，（2）$\frac{x^2}{x}$和x；

（3）$\frac{\sin 2x}{\cos x}$和$2\sin x$；（4）$\sqrt{x^2}$和$|x|$；

答：（1）不同．

$2\ln(1-x)$的定义域为$x<1$，而$\ln(1-x)^2$的定义域为$x\neq 1$．

（2）不同．

$\frac{x^2}{x}$的定义域为$x\neq 0$，而x的定义域为一切实数．

（3）不同．

$\frac{\sin 2x}{\cos x}$的定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in J)$，而$2\sin x$的定义域为一切实数．

（4）相同．

$\sqrt{x^2}$和$|x|$的定义域都是一切实数．

10. 函数与函数值有什么区别？

答： 函数是自变量与因变量之间的对应关系．而函数值则是由已知的自变量的值根据函数关系而确定出来的一个因变量的对应值．所以，自变量为x的函数一般表示为$f(x)$，而$x=a$处的函数值表示为$f(a)$．

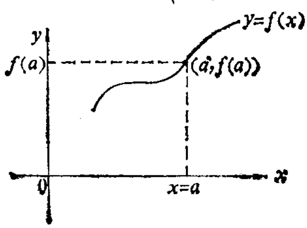

图 1-7

例如，函数 $f(x)=2x+3$，而 $x=0$ 处的函数值为 $f(0)=3$.

另外，在平面直角坐标系上函数表示一条曲线（或几条曲线），而$x=a$处的函数值 $f(a)$，则是函数曲线上对应点的纵坐标，如图1-7所示.

11. 当函数用解析式表示时，怎样求函数值？

答： 求一个函数在自变量为某一确定数时的函数值，只要将自变量的值代入对应的解析式中，通过计算就可以得到.

下面举两个例子：

例（1） 若$f(x)=\dfrac{1}{x}$，求$f(x+\Delta x)-f(x)$.

解： $\because\quad f(x+\Delta x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}$，

$$\therefore\quad f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

例（2） 若$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解：
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}.$$

从这里我们看到，当自变量的值用一个解析式表示时，求出的对应函数值是一个新的函数.

12. 什么是奇函数？

答： 如果函数$y=f(x)$当自变量 x 改变符号时，相应的函数值$f(x)$ 也随之只改变符号，即

$f(-x)=-f(x)$，**则称函数$y=f(x)$为奇函数.**

例如，$f(x)=\frac{1}{x}$就是奇函数．因为

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x).$$

13. 怎样证明函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ $(a>1)$ 为奇函数？

答： 如果 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数，则必须有

$$f(-x)=-f(x)\text{成立}.$$

即 $\log_a[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 成立.

$$\begin{aligned}\because\quad -f(x)&=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})\\&=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}\\&=\log_a\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\\&=\log_a\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}\\&=\log_a[-(x-\sqrt{x^2+1})]\\&=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\log_a[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}]=f(-x).\end{aligned}$$

$\therefore\quad -f(x)=f(-x).$

即 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数.

14. 奇函数的图象有什么性质？

答： 若$y=f(x)$为奇函数，则 $y=f(x)$的图象是关于原点为对称的曲线（如图1-8）.

15. 什么是偶函数？

答： 如果函数$y=f(x)$当自变量x改变符号时，对应的函数值

不变，即$f(-x)=f(x)$，则称函数$y=f(x)$为偶函数（如图1-9）。

例如，$y=\cos x$就是偶函数．因为$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$．

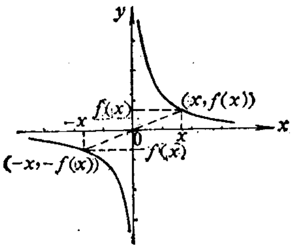

图 1-8

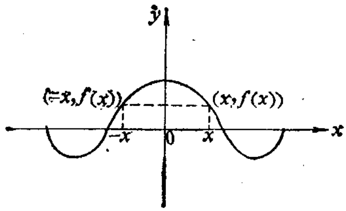

图 1-9

16. 怎样证明函数 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ $(a>1)$ 是偶函数？

答： $\because$ $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

$=f(x)$，

$\therefore$ $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$是偶函数．

17. 偶函数的图象有什么性质？

答： 如果$y=f(x)$是偶函数，则$y=f(x)$的图象是关于y轴为对称的曲线（如图1-9）．

18. 如何证明不论$f(x)$是定义在$(-l,\ l)$内的什么样的函数，$f(x)+f(-x)$为偶函数，而$f(x)-f(-x)$为奇函数？

答： 先证$f(x)+f(-x)$为偶函数．

令 $F(x)=f(x)+f(-x)$，

$\because$ $F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)$

$=F(x)$，

$\therefore\quad F(x)$，即$f(x)+f(-x)$为偶函数.

再证$f(x)-f(-x)$为奇函数.

令 $$G(x)=f(x)-f(-x),$$

$$\because\quad G(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-G(x),$$

$\therefore\quad G(x)$，即$f(x)-f(-x)$为奇函数.

19. 什么叫单调增函数？

答： 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内随着 x 增加而增加，即设x_1，x_2是 $(a,\ b)$ 内任意两点，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$内为单调增函数.

例如，$y=x^3$在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内为单调增函数.

20. 如何证明下列函数在指定区间为单调增函数？

(1) $y=x^3(-\infty,+\infty)$；(2) $y=\lg x+x(0,+\infty)$、

答： (1) 设x_1，x_2为 $(-\infty,+\infty)$ 内任意两点，且 $x_1>x_2$，

$$\because\quad x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2),$$

当x_1和x_2同号时，$\qquad x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$，

又$x_1>x_2$时，$\qquad x_1-x_2>0$，

则 $x_1^3-x_2^3>0$，即$x_1^3>x_2^3$.

当x_1和x_2异号时，$\qquad x_1^2+x_2^2>x_1x_2$

则 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$. 而$x_1>x_2$时，$x_1>0$，$x_2<0$.

于是 $\qquad x_1-x_2>0$，即$x_1^3-x_2^3>0$.

所以不论x_1与x_2同号还是异号，总有$x_1^3>x_2^3$.

因此，在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数$y=x^3$是单调增函数.

(2) 设 x_1，x_2为 $(0,+\infty)$内任意两点，且 $x_1>x_2$，

$\because\quad (\lg x_1+x_1)-(\lg x_2+x_2)=(\lg x_1-\lg x_2)+(x_1-x_2)$,

又 $\quad\because\quad y=\lg x$为单调增函数，且$x_1>x_2$，

则 $\quad \lg x_1-\lg x_2>0$，而$x_1-x_2>0$，

于是 $\quad (\lg x_1+x_1)-(\lg x_2+x_2)=(\lg x_1-\lg x_2)+(x_1-x_2)>0.$

所以 $\quad \lg x_1+x_1>\lg x_2+x_2.$

因此，函数$y=\lg x+x$在（0，$+\infty$）内为单调增函数.

21. 什么叫单调减函数？

答： 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内随x的增加而减少，即设x_1，x_2是(a, b)内任意两点，而$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间(a, b)内为单调减函数.

例如，$y=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$内都是单调减函数.

22. 如何证明下列各函数在指定区间内为单调减函数？

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x}$，在$(-\infty, 0)$；（2）$f(x)=\cos x$，在$[0, \pi]$.

答：（1）设x_1，x_2为$(-\infty, 0)$内任意两点，且$x_1<x_2$.

$$\because\quad f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2},$$

又 $\quad\because\quad x_1x_2>0$，且$x_2-x_1>0$，

$$\therefore\quad f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}>0,$$

即 $\quad f(x_1)>f(x_2).$

$\therefore\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty, 0)$内为单调减函数.

（2）设 x_1，x_2为〔0，π〕上任意两点，且 $x_1<x_2$。

$$\because \quad f(x_1)-f(x_2)=\cos x_1-\cos x_2$$

$$=-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}.$$

又 $\quad\therefore\quad x_1-x_2<0$，则 $\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0$.

$$\therefore\quad f(x_1)-f(x_2)=\cos x_1-\cos x_2>0,$$

于是 $\quad\cos x_1>\cos x_2$，即$f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore\quad f(x)=\cos x$在〔0，$\pi$〕上为单调减函数.

23. 什么叫周期函数？

答： 对于函数$y=f(x)$，如果存在一个常数$T\neq0$，使得当x取定义域内的每一个值时，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，那么函数$y=f(x)$叫做周期函数.

一般把最小正数T叫做这个函数的周期.

例如，正弦函数和余弦函数都是以2π为周期的周期函数，正切函数和余切函数都是以π为周期的周期函数.

24. 怎样求下列函数的周期？

（1）$y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$；（2）$y=1+\cos\frac{\pi}{2}x$.

答：（1）$\because\quad 2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)$

$$=2\sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\right],$$

即当自变量x改变成$x+\frac{\pi}{2}$时，函数值不变，

$\therefore\quad y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$的周期$T=\frac{\pi}{2}$.

（2）$\because\quad \cos\frac{\pi}{2}x=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}\left(x+4\right)$,

即当自变量x改变成$x+4$时，函数值不变，

$$\therefore\quad y=1+\cos\frac{\pi}{2}x\text{的周期}T=4.$$

25． 函数$y=f(x)$在什么条件下才具有反函数？

答： 如果函数$y=f(x)$的对应关系f是一一对应，则函数$y=f(x)$具有反函数$x=f^{-1}(y)$.

例如，函数$y=2x+1$在定义域$(-\infty,+\infty)$内为一一对应的，则有反函数 $x=\frac{y-1}{2}$.

又如，函数$y=x^2$在区间$(-\infty,0)$和$[0,+\infty)$内也分别是一一对应的，所以在$(-\infty,0)$内有反函数$x=-\sqrt{y}$；在$[0,+\infty)$内有反函数$x=\sqrt{y}$.习惯上自变量用x表示，函数用y表示，因此，函数$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$通常表示为$y=f^{-1}(x)$．例如，$y=2x+1$的反函数$x=\frac{y-1}{2}$，通常表示为$y=\frac{x-1}{2}$.

26． 怎样求下列函数的反函数？

（1）$y=\frac{2^x}{2^x+1}$；　（2）$y=2\sin3x$；

（3）$y=1+\lg(x+2)$；　（4）$y=3^{2x+5}$.

答：（1）$y(2^x+1)=2^x\Rightarrow y2^x+y=2^x$

$$\Rightarrow y=2^x(1-y)$$

$$\Rightarrow 2^x=\frac{y}{1-y}.$$

两边取以2为底的对数，得