連梁與框架計算

朱 振 德 編 著

大東書局出版

連梁與框架計算

（平　衡　法）

朱振德 編著

大東書局出版

本書主要內容是根據 Robert v. Halasz 所著的"Anschauliche Verfahren zur Berechnung von Durchlaufbalken und Rahmen"所編寫的。

本書用最精簡的算法敍述彎矩平衡法。首先說明平衡法的基礎資料，然後分章列述連續梁、不移位框架與移動性框架的分析、變慣矩梁桿的處理和鋼筋混凝土桁構次應力的計算。

在方法上如何使用普通法、節間法和兩級法；並如何利用了對稱性和反對稱性。就在結構系統內排列演算；或為便於打字機工作列成表格式。變慣矩梁桿的各種曲線圖表對結構師尤為實用，一切備述無遺。

本書可供土建大專學生學習和結構師設計參考之用。

朱振德 編著

*

1954 年 8 月發排 · 1954 年 11 月上海第一版

1954 年 11 月上海第一次印刷(0001—2000 冊)

書號:5166 · 30″×42″ · 1/25 · 133 千字 · 7 11/25 印張 · 定價 12,000 元

*

大東書局(上海福州路 310 號)出版發行

上海市書刊出版業營業許可證出〇四三號 · 上海市書刊發行業營業許可證發〇六一號

導文印刷所(威海衞路 357 弄 12 號)印刷

引　言

彎矩平衡法是一種接續計算法，就是說一種方法，它的結果不是經過單一的計算程序就能獲得的，而是分次經過多數步驟才逐漸靠近準確答案的。彎矩平衡法在本質上不是近似法，也就是說：它不屬於那些由於漠視了若干條件、或用粗略的假定使計算趨於簡化的法則。彎矩平衡法能用任意前進的精度引得答案，正如用其他準確方法所獲得的一樣。對比真的近似法，例如假定彎矩零點的位置，彎矩平衡法將導得較精確的結果。從某些觀點出發，彎矩平衡法竟可歸入實際應用的最準確計算方法的一類，因爲正好在這裏能考慮變慣矩、梁桿拱托、彈性嵌支和彈性支承，而並不太增多計算工作。用別種方法進行這樣接近結構實際情況的計算，也可能的，可是在應用上一般感到非常繁複和困難。

此外，彎矩平衡法在相同計算步序下具有多方面使用可能性。我們可以利用彎矩平衡法一樣好的計算普通連梁，和變慣矩、或彈性支承連梁。以及單層或多層、單孔或多孔、不移動或移動、直角或斜角框架，影響線、拱、桁構次應力和其他實用結構學的問題也都跨不出彎矩平衡法的應用範疇。

-4-6-83
25-2

目　　錄

第一章　基礎資料

1. 節點彎矩、定理和符號

普通稱桿件彎矩是正號，如果它在平梁的下緣或框架的裏緣產生拉應力（圖 1）。在不適用這種假定的地方，例如多柱框架的豎直內支柱（圖 2），應另行協議關於彎矩符號的規定。普通在草圖內，正彎矩產生拉力的一邊用虛線標明。

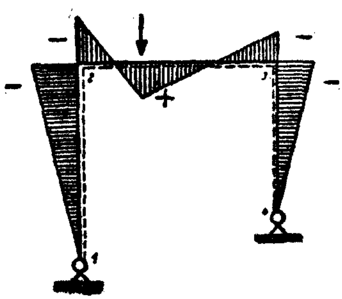

圖 1

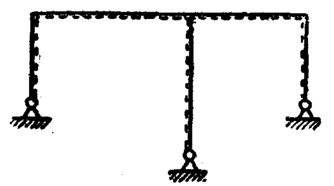

圖 2

應用彎矩平衡法時，彎矩的符號應重新規定。這裏所講的彎矩，一般不是發生在桿斷面上的桿件彎矩，而是作用在節點上的彎矩。

這些彎矩分別用箭頭來表示。正如我們標示作用在一根桿件內的拉力按照圖 3b 用兩個方向相背的箭頭，或標示壓力按照圖 3c 用兩個方向相指的箭頭，這裏按照圖 3d 和 3e 用兩個反方

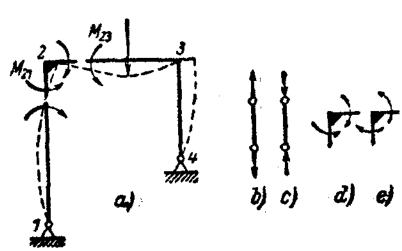

圖 3 a—e

向旋轉的箭頭來表示框角彎矩。圖 3d 拉應力在框角的外緣，圖 3e 則在框角的裏緣。按照一般符號規則的框角彎矩圖 3d 是負的，圖 3e 的是正的。

使用彎矩平衡法時，正如上面已經說過，須要另作一種的規定。

切出框架的一角（圖 3a），爲在切斷地點重新建立起平衡秩序，應添置彎矩（自然包括縱力和橫力）。添置在節點的彎矩稱爲“節點彎矩”。節點彎矩爲正，如果它在節點上順時針向旋轉；爲負，如果它在節點上反時針向旋轉。節點彎矩的代號應按照所屬節點和桿件來標示。如：

M_{23} ＝桿件 23 在節點 2 的節點彎矩；

M_{AB}＝桿件 AB 在節點 A 的節點彎矩。

圖 3a 中 M_{23} 是正的；M_{21} 在數值上是與 M_{23} 一樣大，可是負的。關於這兩個彎矩相互平衡問題，如果用這種符號規則核察時，就得它們的代數和是零。因在框構的一個節點或連梁的一個支點所作用的節點彎矩總是處於平衡狀態，所以總和應是零。

所以按照普通符號規定在一個框角作用一個一定符號的彎矩（圖 3d 示一個負號框角彎矩），按照新的規定在切下的框角上作用兩個符號相反的節點彎矩。採用這種規定是爲了簡化計算。

我們應當熟習於判定節點彎矩的符號。所以，如有圖 4 中的一根負重嵌支梁。它的彎曲線可按感性畫出。然後得：A 點的節點彎矩順時針

圖 4

圖 5

向旋轉，所以爲正；而 B 點的節點彎矩反時針向旋轉，所以爲負。作用於支座內，而與節點彎矩相持平衡的嵌支彎矩（圖 5）是反背節點彎矩的方向旋轉的。

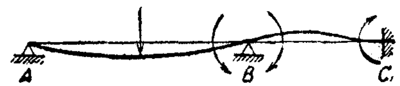

圖 6

圖 6 中：M_{BC} 和 M_{CB} 是正號；M_{BA} 是負號；M_{AB} 是零。

2. 一端嵌固梁和兩端嵌固梁的節點彎矩

正如我們以後會體會：按照這裏所描寫的方法計算框架和連梁時，兩端和一端嵌固梁是非常重要的。在書末附錄表 I 至 V 綜列這兩種嵌固梁在所有可能荷重下的節點彎矩。

已由圖 4 和 5 得出，在梁支座內的節點彎矩在數值上是等於嵌支彎矩。節點彎矩與嵌支彎矩按正反作用相持平衡。爲供本書應用，在表 I 至 V 中列示的不是嵌支彎矩，而是節點彎矩，且用 1 節所規定的符號。

舉例：

a）按圖 7，並利用表 II：

$$M_A=\frac{Pa_1b_1^2}{l^2}+\frac{q}{l^2}\left[l^2\frac{(a+c)^2-a^2}{2}-2l\frac{(a+c)^3-a^3}{3}+\frac{(a+c)^4-a^4}{4}\right]$$

$$=\frac{3\cdot4\cdot6^2}{10^2}+\frac{2}{10^2}\left[\frac{10^2}{2}\cdot(7^2-2^2)-\frac{20}{3}\cdot(7^3-2^3)+\frac{1}{4}(7^4-2^4)\right]$$

$$=+16,6\ \mathrm{tm}$$

利用表 IV 和 V：

$$a_1/l=0,4 \qquad a/l=0,2 \qquad (a+c)/l=0,7$$

$$M_A=\beta Pl+(\gamma_{0.7}-\gamma_{0.2})ql^2$$

$$=0,1440\cdot3\cdot10+(0,0764-0,0151)2\cdot10^2$$

$$=4,32+12,24=16,56\ \mathrm{tm}$$

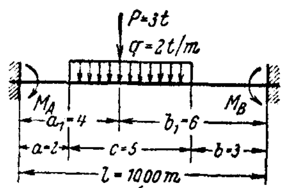

圖 7

自然，利用表 IV 和 V 的工作要較利用表 I 和 II 爲簡單。

$$M_B=-0,0960\cdot3\cdot10-(0,0543-0,0023)2\cdot10^2=-13,28\ \mathrm{tm}$$

b）支柱，圖 8。

$$M(\text{左欄})=-P\cdot e=-4\cdot0,5=-2\ \mathrm{tm}$$

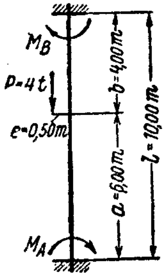

圖 8

利用表 III:

$$a/l=0{,}6$$

$$M_A=-0{,}32\cdot(-2)=+0{,}64\ \text{tm}$$

$$M_B=-0{,}12\cdot(-2)=+0{,}24\ \text{tm}$$

或利用表 II, 11 項:

$$M_A=-\frac{(-2)\cdot 4}{10^2}\cdot(2\cdot 6-4)=+0{,}64\ \text{tm}$$

$$M_B=-\frac{(-2)\cdot 6}{10^2}\cdot(6-2\cdot 4)=+0{,}24\ \text{tm}$$

c) 兩端嵌支梁與一端嵌支梁的節點彎矩關係。

如已知兩端嵌固梁的節點彎矩為 M_A' 和 M_B',則一端嵌固梁的節點彎矩為:

嵌支在 A $\quad M_A=M_A'-\dfrac{M_B'}{2}$

嵌支在 B $\quad M_B=M_B'-\dfrac{M_A'}{2}$

例如,一根承負均佈荷重兩端嵌支梁按表 II, 1 項:

$$M_A'=ql^2/_{12}\qquad M_B'=-ql^2/_{12}$$

一端嵌支在 A:

$$M_A=ql^2/_{12}-\frac{(-ql^2/_{12})}{2}=ql^2/_8$$

符合表 I, 1 項。

同樣的,一根承負集中荷重兩端嵌支梁,表 II, 3 項:

$$M_A'=Pab^2/l^2\qquad M_B'=-Pa^2b/l^2$$

一端嵌支在 A:

$$M_A=Pab^2/l^2-\frac{(-Pa^2b/l^2)}{2}=\frac{Pab(l+b)}{2l^2}$$

符合表 I, 3 項。

一端嵌支在 B:

$$M_B=-Pa^2b/l^2-\frac{Pab^2/l^2}{2}=-\frac{Pab(l+a)}{2l^2}$$

符合表 I, 3 項。

3. 在等慣矩一端嵌固梁上的彎矩傳遞,傳遞係數 γ

一根梁的一端是嵌支, 另一端是鉸支, 並在鉸支端作用一個彎矩 M,然後求這個彎矩對嵌固端所起的傳遞作用。在等慣矩梁桿上(圖 9)

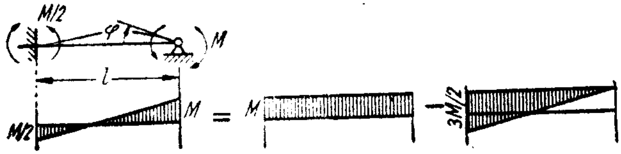

圖 9

引起嵌支彎矩 $M/2$。

在兩端的彎矩符號，按照普通符號規定是相反的；但按照這裏用的符號規則，如由彎曲線出發，則是相等的。傳遞彎矩與原作用彎矩之比稱爲傳遞係數 γ。等慣矩梁桿上 $\gamma={}^1/_2$。變慣矩梁桿上的 γ 在第五章內列示。

4. 剛度

按圖 9，桿件一端嵌支，另一端鉸支，則一個在鉸端作用的彎矩 M 會使該桿端旋轉 φ 角。在一定的彎矩作用下，如桿件愈長，慣矩 J 愈小，則產生旋轉角愈大；相反的，如果 J 愈大和桿件愈短時，用以產生一定旋轉角所需彎矩將愈大。在桿端因此存在若干對抗旋轉的阻力。這種阻力應當用彎矩來衡量，它是在鉸端產生旋轉角 1 所需要的。我們稱這個彎矩爲桿件的剛度 K。梁桿全長慣矩不變時，梁桿兩端對抗旋轉的阻力是相等的。兩端剛度是與 J/l 成正比的，不對稱梁桿的兩端剛度是各異的。這種情況將於以後討論之。

求計桿端剛度

a) 等慣矩、一端嵌支、一端鉸支梁桿（圖 9）：

求使鉸端產生旋轉角 $\varphi=1$ 時，在鉸端所需的彎矩 M。根據已知的莫耳(Mohr)定理：旋轉角應等於用 $\frac{M}{EJ}$ 面爲荷重所算得的橫力。將彎矩面劈分爲矩形與三角形兩塊彎矩面的差額（圖 9），則得：

$$EJ \cdot \varphi = \frac{Ml}{2} - \frac{3M}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{Ml}{4}$$

或當 $\varphi=1$ 時

$$M_1 = K = 4\,EJ/l \qquad (1)$$

b) 等慣矩兩端鉸支梁桿.

按圖 10 a $\qquad EJ \cdot \varphi = \frac{Ml}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{Ml}{3}$

意即 $\varphi=1$ 時

$$K = 3\,EJ/l \qquad (2)$$

對桿件兩端剛度是相等的。這種情況的剛度僅等於一端嵌支時的75%。

使兩端鉸支梁支端旋轉一定角度所需的彎矩，僅是使一端嵌支梁(J、l 和 E 都相等)的鉸端旋轉相同角度時所需彎矩的 75%。

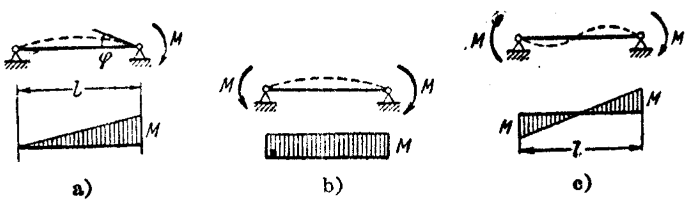

圖 10 a—c

c) 兩端鉸支梁桿的兩端同時承負對稱或反對稱彎矩：

在圖 10 b 中鉸支桿的兩端作用相等的彎矩 M。求計桿端剛度時，只須計算產生旋轉角 1 的彎矩。自然，這個彎矩要小得多；如果與圖 10 a 比較，只一端作用一個彎矩，也產生單位旋轉角。

$$EJ \cdot \varphi = Ml/2$$

$$K = 2\,EJ/l \qquad (3)$$

假如圖 10 c 作用在桿端的兩個彎矩方向是相反時，則產生旋轉角 1 所

需的彎矩要較圖 10 a 所需的爲大。

$$EJ\cdot\varphi=\frac{M}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}=Ml/6$$

$$K=6\,EJ/l \qquad (4)$$

d）一端嵌固的懸臂梁：

自由端的剛度（圖 11 c），自然較鉸支梁的更要小。這種情況的彎矩面是一個矩形。按照莫耳定理：

$$\varphi=\frac{Ml}{EJ}$$

或 $\varphi=1$ $$M_1=K=EJ/l \qquad (5)$$

它僅是當另一端嵌固時鉸支桿端剛度的 $^1/_4$。

e）一端鉸支的梁桿：

如桿之一端鉸支，另一端沒有支承，則此桿是不穩定的。自由端的剛度＝0，因爲無需加上旋矩，桿端即起旋轉角。將這種情況搞清，對今後考慮問題是有利的。

f）等慣矩一端彈性嵌支，一端鉸支梁桿：

這種情況存在於連結起來的桿構中，例如，桿之一端鉸支，另一端與桿構耐彎連接。所以，如圖 22 的連梁 AB 桿件，A 端鉸支，B 端因 BC 梁桿的作用（彈簧作用）成彈性嵌支。如果 BC 桿的慣矩無限大，則就得 AB 在 B 端是固定嵌支；如果 BC 桿的慣矩無限

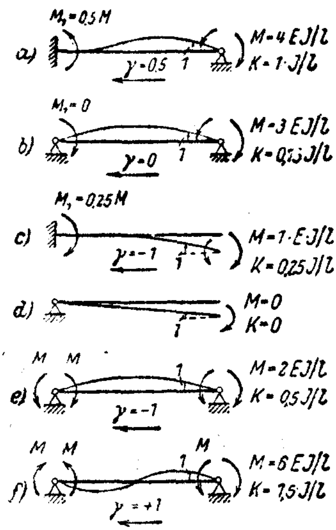

圖 11 a—f

小，則實質上在 B 端就沒有嵌制，得 AB 桿在 B 端也是鉸支。除掉這兩種極限情況外，AB 桿在 B 端是彈簧似的嵌支的。鉸支桿端 A 的剛度（B 端彈性嵌支時），所以應介乎 $3\,EJ/l$ 與 $4\,EJ/l$ 之間。

g）綜合表：

圖 11 綜合了上面所講的情況。在產生單位旋轉角的彎矩 M 的旁邊，再由 M 除 $4\,E$ 後求出剛度 K，因爲多數情况的 E 是不變的，並且一般情况的 K 是用圖 11 a 的。

5. 在一個節點彙集的各桿端上的彎矩分配

在圖 12 所示桿構的耐彎節點上作用彎矩 M。各桿件的長度是 l_1、l_2、l_3、l_4 和慣矩是 J_1、J_2、J_3、J_4。

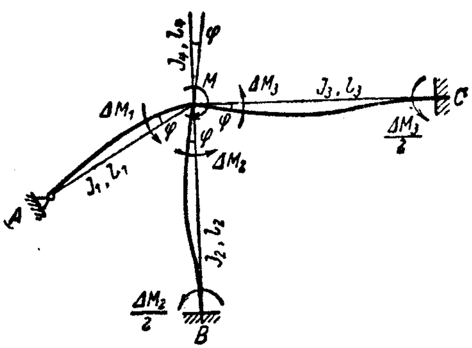

圖 12

由正彎矩 M 使節點順時針向旋轉 φ 角，並形成圖示的彎曲線。鉤出彎曲線後，節點彎矩的符號自可確定。所有節點彎矩都是向左轉的，所以是負的，對外來彎矩起抵抗作用的。彎矩 M 按各桿的剛度比例分配爲 ΔM_1、ΔM_2 和 ΔM_3。桿件 l_4 因是自由懸臂，不分得彎矩。

桿端剛度是：

$$K_1 = 3\,EJ_1/l_1 \qquad K_2 = 4\,EJ_2/l_2 \qquad K_3 = 4\,EJ_3/l_3$$

$$\Sigma K = K_1 + K_2 + K_3$$

因得：

$$\Delta M_1 = M \cdot K_1/\Sigma K \quad \Delta M_2 = M \cdot K_2/\Sigma K \quad \Delta M_3 = M \cdot K_3/\Sigma K$$

舉例

圖 13 中在支點 B 作用一個彎矩 $M=3$ tm。計算在連梁內產生的彎矩。

慣矩是逐孔不同的，因爲不需絕對值而僅用相對值即可，所以在(2)項內列入比例值。(3)項是比值 J/l。(4)項的桿端剛度是按 $K=0.75\,J/l$ 和 $K=J/l$ 註入的。兩部分梁桿的 E 是不變值，因此在 K 值中沒有考慮它。在(4)項內剛度 K 是註在桿件的所指端部。

因作用彎矩按剛度比例值分配；故在(5)項內先算出分配率 $\mu=K/\Sigma K$。

進行分配的彎矩 M 是向右旋轉，所以是正的，見(6)項。如從彎曲線出發，在節點 B 執行彎矩分配時所引起的部分彎矩，即所謂配給彎矩，是反方向旋轉，所以是負的。

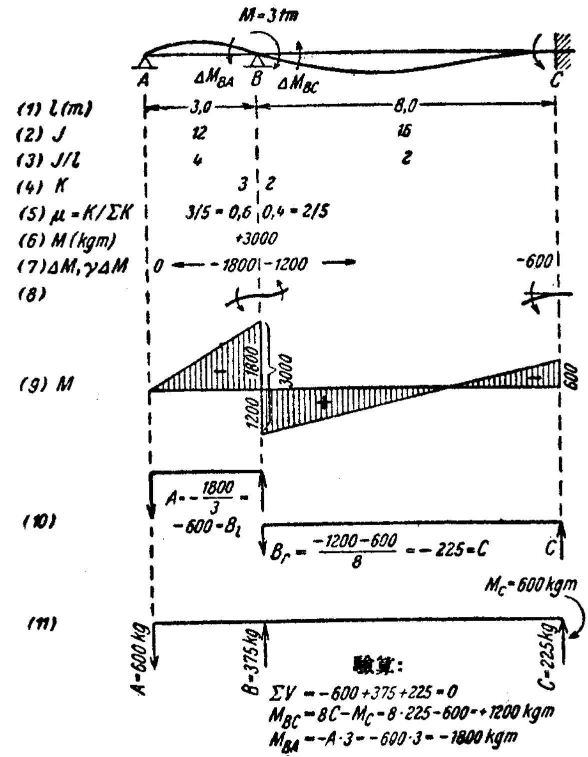

圖 13

因此：

$$\Delta M_{BA}=-M\cdot\frac{K_{BA}}{\Sigma K}=-M\cdot\mu_{BA}=-3\ 000\cdot0{,}6=-1\ 800\ \mathrm{kgm}$$

$$\Delta M_{BC}=-M\cdot\frac{K_{BC}}{\Sigma K}=-M\cdot\mu_{BC}=-3\ 000\cdot0{,}4=-1\ 200\ \mathrm{kgm}$$

在桿端 BC 發生的彎矩 ΔM_{BC} 按 $\gamma=0{,}5$ 向嵌支端 C 傳遞。

$$\gamma\cdot\Delta M_{BC}=\frac{1}{2}\cdot(-1\ 200)=-600\ \mathrm{kgm}$$

它在(7)項內是用箭頭標示的。向 A 支端不需傳遞彎矩，因該處是鉸支點。

在(7)項內算得的彎矩就是所求的節點彎矩。按照符號規則，連梁的彎矩面不難畫出。由(7)項的彎矩符號定得(8)項的彎矩旋轉方向和梁桿受拉的一邊。利用(8)項的輔助草圖可以畫出(9)項的桿件彎矩，並使用符合一般慣例，將彎矩面畫在受拉的一邊。

6. 由彎矩荷載或節點彎矩引起的擱支力

已知圖 14 的簡支梁，在 A 端作用一個彎矩 M_A。由平衡條件 $\Sigma M_A=0$ 和 $\Sigma M_B=0$ 獲得此項荷重的擱支力 $A=M_A/l$ 和 $B=-M_A/l$。圖 14 b 中將同樣的荷重再一次的註入，僅用反向的節點彎矩代替外來作用彎矩。因節點彎矩順時針向旋轉，所以是正的。由圖可以看出：由一個正號旋轉的節點，彎矩產生的擱支力(偶力)也是順時針向旋轉的。左邊的擱支力 A 向上，右邊 B 向下，二者一起將桿件順時針向旋轉。這是一個容易引人注意的規律。

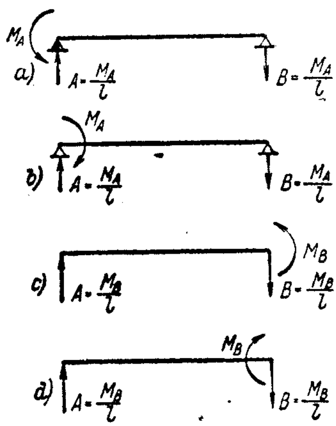

圖 14 a—d

也可在另一支點作用彎矩，進行相應的證明。圖 14 d、一個向右轉的節點彎矩 M_B 產生向右轉的擱支力 A 和 B。

圖 15 示一桿件 12，長度爲 $l_{12}=l_{21}$，兩端同時作用正號節點彎矩 M_{12} 和 M_{21}。由這節點彎矩產生的擱支力：

$$A=B=\frac{M_{12}+M_{21}}{l_{12}}=\frac{\Sigma M}{l} \qquad (6)$$

這裏應將節點彎矩按符號代入。

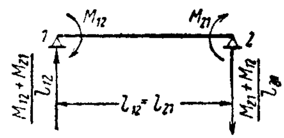

圖 15

如果彎矩之和 $M_{12}+M_{21}$ 是正號，則 A 向上和 B 向下。當負號彎矩和時，A 向下而 B 向上。擱支力旋轉方向與節點彎矩的相同。

圖 13、10 項的擱支力由（7）項的彎矩按下列算得：

桿 AB $\qquad A=B_l=\frac{\Sigma M}{l}=\frac{0-1\,800}{3}=-600\,\mathrm{kg}$

桿 BC $\qquad B_r=C=\frac{\Sigma M}{l}=\frac{-1\,200-600}{8}=-225\,\mathrm{kg}$

符號決定擱支力的方向。兩節桿件上擱支力都是反時針向旋轉的。在(11)項內是將總的擱支力 B 由(10)項內的橫力 B_l 和 B_r 按方向定得。

希望注意，這裏是計算與作圖相輔而行的，這也是本書所討論的方法的特徵。這裏所介紹的規則在實際計算中是有成就的，它們是特別顯明。

7. 嵌支桿端平行移位引起的彎矩

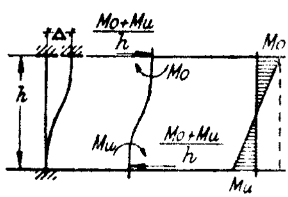

圖 16

a）兩端嵌固的等 J 梁桿：

圖 16 中兩端嵌固梁的一端對另一端相對的平行移動 Δ 值。

求計由移位產生的節點彎矩 M_0 和 M_u。因對稱關係，故 $M_0=M_u=M$。按照莫耳定理：EJ 倍的移位是等於以彎矩面爲荷重再一次算得的彎矩。

$$EJ\cdot\Delta=2M\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{2h}{3}-Mh\cdot\frac{h}{2}=\frac{Mh^2}{6}$$