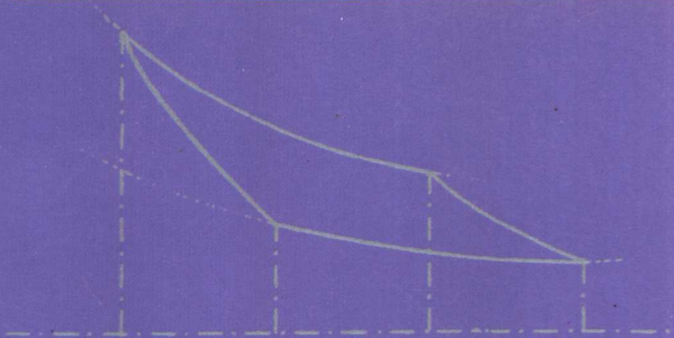
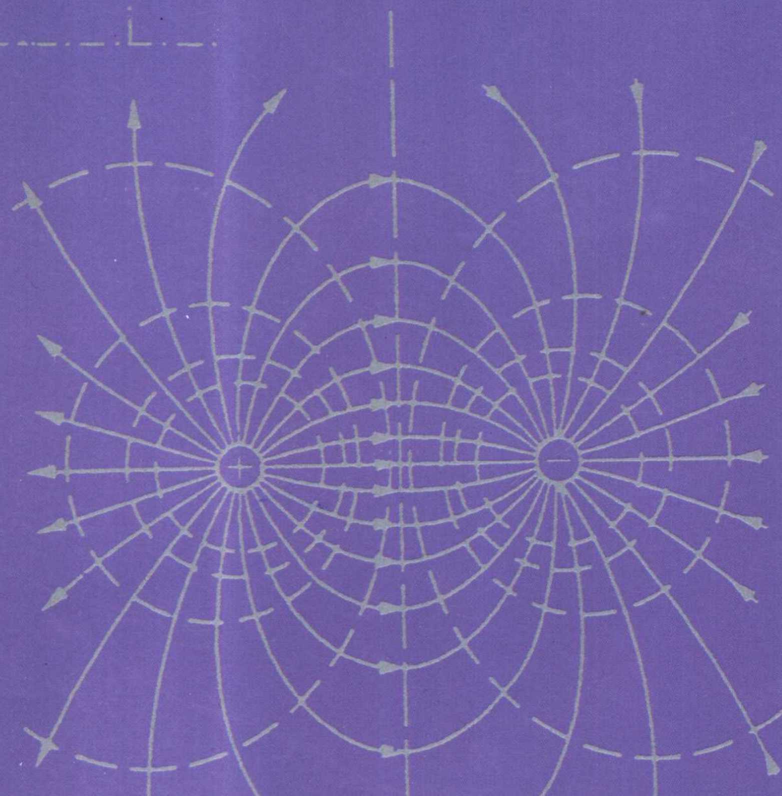
梁励芬　蒋平　编著

大学物理核心概念和题例详解

Daxue Wuli Hexin Gainian He Tili Xiangjie





復旦大學出版社

大学物理核心概念和题例详解

梁励芬　蒋　平　编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理核心概念和题例详解/梁励芬,蒋平编著.—上海:
复旦大学出版社,2003.4
ISBN 7-309-03590-9

Ⅰ.大… Ⅱ.①梁…②蒋… Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考
资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 020939 号

大学物理核心概念和题例详解
梁励芬 蒋 平 编著

出版发行 复旦大学 **出版社**
上海市国权路 579 号 200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 龚少明
装帧设计 陈 萍
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海锦佳装璜印刷发展公司
开 本 787×1092 1/16
印 张 22.75
字 数 582 千
版 次 2003 年 4 月第一版 2003 年 4 月第一次印刷
印 数 1—4 000

书 号 ISBN 7-309-03590-9/O·306
定 价 35.00 元

前　言

本书以例题和习题解答为主，这是在《大学物理简明教程》(复旦大学出版社 2002 年 9 月版)的基础上，根据广大读者学习、复习考试的需要，综合各种大学物理教材和考试要求之后编写而成的.

本书各章的章名与顺序都与《大学物理简明教程》(以下称《简明教程》)一致.每章首先扼要总结《简明教程》中的主要内容及学习要点以便读者把握学习重点，然后列举一些《简明教程》中未予列入的例题作为示范，以利读者应用相关的物理概念、原理和规律求解实际问题.众所周知，物理学解题的一个关键性的基础是透彻理解物理学的基本概念和基本原理.考虑相关的非计算性思考题有助于奠定并巩固这一基础，这便是几乎所有的大学物理基础教材每章都附有思考题的原因.然而，目前已经面市的与教材配套的习题集都鲜有包括思考题的解答在内者.为了适应这一方面的需要，我们在本书中对《简明教程》各章所列的思考题也一一列出参考性答案，希望给读者以更多的方便和帮助.

大学物理是一门涉及专业、系科相当广泛的基础课，而使用相应教材的读者数量也相当巨大.即使是已经毕业的学生，在择业、报考研究生以及日后的工作中不少人也希望有一本合适的大学物理学习指导书.为了适应过去不使用《简明教程》或相近教材读者的需要，我们在例题与习题中均增加了部分深度与广度比《简明教程》的要求更进一步的内容，并在相应的习题上标以星号 *.

编　者

2003 年 1 月

内 容 简 介

本书是在综合各种《大学物理教程》的基础上，根据电子工程、生物医药、化学化工及工科院校各专业学生学习《大学物理》的需要编写而成的。全书分 17 章，围绕力学、热学、电磁学、光学，近代物理学的核心概念，配备大量例题和习题解答。题例的选取力求凸现物理概念和典型方法，以使读者能够举一反三，触类旁通。

本书可供非物理类各专业的大学生及中学教师作为学习参考书，也可用作硕士研究生入学考试用书。

目　录

第一章　运　动　学

一、内 容 提 要

(一) 质点运动学

1. 位矢　$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$；

位移　$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$；

位移的大小　$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

2. 速度　$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，沿质点运动轨道的切向，

速率　$v = |\boldsymbol{v}| = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$；

直角坐标系中，$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$.

3. 加速度　$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$；

直角坐标系中　$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$；

曲线运动时还可表示为　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$，

$\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 分别为沿轨道切线与法线(指向凹边)的单位矢量.

4. 已知加速度，则　$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$，$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t$.

5. 特例：匀加速运动　$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t$，$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$，

$\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 分别为 $t=0$ 时刻的速度与位矢.

6. 抛体运动的求解常用两种运动叠加的方法：

设抛射初速为 $\boldsymbol{v}_0$，与水平方向夹角为 θ.

(1) 将抛体运动看成是速度为 $\boldsymbol{v}_0$ 的匀速直线运动和沿竖直方向的自由下落运动的叠加：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2.$$

(2) 将抛体运动看成是沿 x 方向的速度为 $v_0\cos\theta$ 的匀速直线运动和沿 y 方向的初速为 $v_0\sin\theta$、加速度为 $-g$ 的匀变速直线运动的叠加：

$$\boldsymbol{r} = (v_0 t\cos\theta)\boldsymbol{i} + \left(v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j}.$$

7. 质点系的质心位矢　$\boldsymbol{r}_c = \dfrac{\sum\limits_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum\limits_i m_i}$，$\boldsymbol{r}_i$ 为质量为 m_i 的质点的位矢. 质心速度　$\boldsymbol{v}_c =$

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t}$，质心加速度 $\boldsymbol{a}_c = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t^2}$.

对质量连续分布的物体，质心坐标可表示为

$$x_c = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m},\ y_c = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m},\ z_c = \frac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}.$$

（二）质点的圆周运动和刚体绕固定轴的转动

（1）角速度 $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$，角加速度 $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$.

（2）角量和线量的关系

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{a}_n = \omega^2 R\boldsymbol{n}.$$

（三）相对运动

动参照系 S' 相对于静参照系 S 作平动时，有下列关系

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0.$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 为 S' 的坐标原点相对于 S 的位矢，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{a}_0$ 分别为 S' 相对于 S 的速度和加速度.

二、自学指导和例题解析

本章的要点是掌握描述运动的方法.

描写运动的物理量如位移、速度、加速度和角位移、角速度、角加速度等都具有矢量性、瞬时性和相对性. 在学习中要特别注意以下几点：

（1）矢量式中的所有加减号都应理解为几何相加减，即满足平行四边形法则；一般而言，这和代数的相加减是两码事. 在讨论具体问题时，常用矢量的分量式进行运算，即在参照系中选择一个合适的坐标系，把矢量投影到各坐标轴上，再进行相应的代数运算.

（2）在一段时间 Δt 内质点的平均速度的方向和这段时间内质点位移的方向相同；而瞬时速度的方向总是沿着轨道的切向. 一般而言，平均速度的大小不等于平均速率，而瞬时速度的大小等于瞬时速率. 因为平均速率 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，而平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$，而一般 $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta s$，所以 $|\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$，但当 $\Delta t \to 0$ 时，$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，所以 $v = |\boldsymbol{v}|$.

（3）质点速度的大小和方向的变化都导致加速度. 利用切向加速度和法向加速度可以更清楚地说明这一点. 因为速度沿轨道切向，$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\tau}$ 为切向的单位矢量，则

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}.$$

等式右边第一项表示速度大小发生变化而方向不变所引起的加速度，为切向加速度；第二项是速度大小不变而方向随时间变化所引起的加速度，可证明该项即是法向加速度.

本章的难点是如何运用微积分解决物理问题，以及如何选择正确的参照系描写运动.

例题

例 1-1 质点沿 x 轴运动,其加速度和位置的关系为 $a=3+7x$, a 的单位是 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, x 的单位是 m. 已知质点在 $x=0$ 处的速度为 $8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,求质点的速度和位置的关系.

解: 加速度和速度的关系式中包含时间变量 t,而已知条件中只知加速度和位移的关系,所以应把所有表达式中的对时间的关系式变换成对坐标的关系:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

注意到上式中 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v$, 所以可化成不显含时间的变量. 把 $a=3+7x$ 代入上式,并作变量分离,使等式两边只与单一的变量相关,得

$$v\mathrm{d}v=(3+7x)\mathrm{d}x.$$

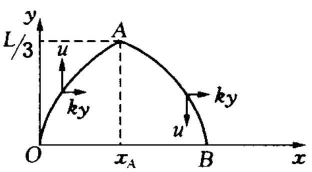
上式两边积分,由已知初始条件定出上、下限,得

$$\int_8^v v\mathrm{d}v=\int_0^x(3+7x)\mathrm{d}x.$$

解得

$$v=\sqrt{7x^2+6x+64}.$$

例 1-2 一条河宽度为 L,水的流速与离岸的距离成正比,河中心流速最大为 v_0,两岸处流速为零. 一船以恒定的相对于水的速率 u 垂直于水流从一岸驶向另一岸,当船驶至河宽的 $\frac{1}{3}$ 处时有事又返回本岸,求船驶向对岸的轨迹和返回本岸的地点.



例 1-2 图

解: 设 x 轴沿河水流动方向,y 轴指向对岸,出发点 O 为坐标原点,如图所示. 船向对岸行驶过程中,船对岸的速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{船对水}+\boldsymbol{v}_{水对岸}=u\boldsymbol{j}+ky\boldsymbol{i}.\ (k\ 为常数)$$

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ky; \qquad ①$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u. \qquad ②$$

由题意, $y=\frac{L}{2}$ 时, $v_x=v_0$ 为最大流速,代入①式,得

$$v_0=k\cdot\frac{L}{2},\ k=\frac{2v_0}{L}. \qquad ③$$

既然知道了小船在各个瞬时的速度,运用积分法就可知道小船在各瞬时的位置,但方程①中包含着未知的 $y(t)$,不能直接积分,因此可以先对②式积分,并从出发时开始计时,求得 $y=ut$,代入①式,并计及③式,得

$$v_x=\frac{2v_0}{L}\cdot ut,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2v_0u}{L}t,\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{2v_0u}{L}t\,\mathrm{d}t.$$

得 $$x=\frac{v_0u}{L}t^2;$$

以 $t=\frac{y}{u}$ 代入上式，得轨迹方程为

$$x=\frac{v_0}{Lu}y^2. \tag{4}$$

此为一抛物线方程. 当船到达$\frac{L}{3}$处时，坐标为(该处设为 A 点)

$$y_A=\frac{L}{3};$$

$$x_A=\frac{v_0}{Lu}\left(\frac{L}{3}\right)^2=\frac{v_0L}{9u}. \tag{5}$$

船在返回本岸过程中，改以船位于 A 点时为计时起点，船对岸的速度分量为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ky=\frac{2v_0}{L}\left(\frac{L}{3}-ut\right)=\frac{2v_0}{3}-\frac{2v_0u}{L}t, \tag{6}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-u; \tag{7}$$

两式分别积分，由⑥式得

$$\int_{x_A}^x\mathrm{d}x=\int_0^t\left(\frac{2}{3}v_0-\frac{2v_0u}{L}t\right)\mathrm{d}t.$$

解得

$$x=x_A+\frac{2}{3}v_0t-\frac{v_0u}{L}t^2. \tag{8}$$

由⑦式得

$$\int_{y_A}^y\mathrm{d}y=\int_0^t-u\mathrm{d}t;$$

得

$$y=y_A-ut. \tag{9}$$

船返回本岸到达 B 点，$y_B=0$，代入⑨式，得

$$t=\frac{y_A}{u}.$$

代入⑧式得

$$x_B=\frac{v_0L}{9u}+\frac{2}{3}v_0\frac{y_A}{u}-\frac{v_0u}{L}\left(\frac{y_A}{u}\right)^2=\frac{v_0L}{9u}+\frac{2v_0}{3u}\left(\frac{L}{3}\right)-\frac{v_0}{Lu}\left(\frac{L}{3}\right)^2=\frac{2v_0L}{9u}.$$

实际上，小船返回的轨迹根据对称性也可以得出，因此，可很容易得到

$$x_B = 2x_A = \frac{2v_0 L}{9u}.$$

例 1-3 已知质点在竖直平面内运动,位矢为 $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + (4t - 3t^2)\boldsymbol{j}$, 求 $t = 1\ \mathrm{s}$ 时的法向加速度、切向加速度和轨迹的曲率半径.

解: 由位矢可求得速度和速率

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 3\boldsymbol{i} + (4 - 6t)\boldsymbol{j},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + (4 - 6t)^2};$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -6\boldsymbol{j}.$$

切向加速度为

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{24(3t - 2)}{2\sqrt{3^2 + (4 - 6t)^2}} = \frac{12(3t - 2)}{\sqrt{3^2 + (4 - 6t)^2}};$$

$t = 1\ \mathrm{s}$ 时,得

$$a_\tau = \frac{12}{\sqrt{13}} = 3.3(\mathrm{m \cdot s^{-2}}).$$

法向加速度为

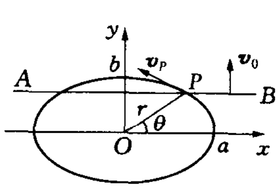
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{18}{\sqrt{13}} = 5.0(\mathrm{m \cdot s^{-2}}).$$

曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{3^2 + (4 - 6)^2}{5.0} = 2.6(\mathrm{m}).$$

从上面计算过程可见,速度$\boldsymbol{v}$对时间的导数和速率 v 对时间的导数是完全不同的.

例 1-4 直线 AB 以恒定速度$\boldsymbol{v}_0$在图示平面内沿 y 方向平动,在此平面内有一椭圆,其长轴为 a,短轴为 b,椭圆上穿一小珠,为直线刮动,但当其在第一象限内时始终位于直线与椭圆的交点,试求该小珠在第一象限内速度和加速度与 θ 角的函数关系.



例 1-4 图

解: 椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

如图所示,椭圆上任一点 P 的位矢为$\boldsymbol{r}$:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

代入椭圆方程,得

$$r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1;$$

$$r=\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}. \quad ①$$

题中已知 P 点是直线和椭圆的交点，因此按运动的叠加原理，P 点在 y 方向上的分速度一定和直线的速度 v_0 相同，另一个分速度 v_x 因受到椭圆轨道的制约，应从椭圆方程寻找 v_x 和 v_y 之间的关系. 将椭圆方程两边微分，得

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{2y\mathrm{d}y}{b^2}=0.$$

得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y}{x}=-\frac{a^2}{b^2}\tan\theta. \quad ②$$

由 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 得

$$\frac{v_x}{v_y}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}. \quad ③$$

②式代入③式，得

$$\frac{v_x}{v_y}=-\frac{a^2}{b^2}\tan\theta.$$

因 $v_y=v_0$，所以

$$v_x=-\frac{a^2}{b^2}v_0\tan\theta. \quad ④$$

由此得 P 点速度的大小为

$$v_P=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=v_0\sqrt{1+\frac{a^4}{b^4}\tan^2\theta}; \quad ⑤$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}=0.$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \quad ⑥$$

上式中的$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$可用下面方法求得：

$$v_0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(r\sin\theta)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta+r\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \quad ⑦$$

由①式两边对 t 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}&=ab\left(-\frac{1}{2}\right)(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^{-\frac{3}{2}}\left(-2b^2\cos\theta\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+2a^2\sin\theta\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\\&=-r\cdot\frac{1}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\cos\theta(a^2-b^2)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

代入⑦式得

$$
\begin{aligned}
v_0 &= r\cos\theta\left[1-\frac{\sin^2\theta(a^2-b^2)}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\right]\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\
&= ab(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\theta\cdot\frac{b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\
&= ab^3\cos\theta(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}
$$

所以

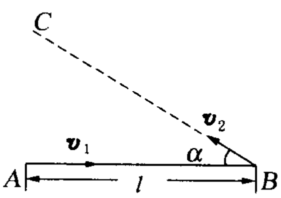
$$
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{ab^3\cos\theta}. \tag{⑧}
$$

⑧式代入⑥式得

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{a^2}{b^2}v_0\tan\theta\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\
&=-\frac{a^2}{b^2}v_0\sec^2\theta\cdot\frac{v_0(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{ab^3\cos\theta}\\
&=-\frac{av_0^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} \qquad ⑨
\end{aligned}
$$

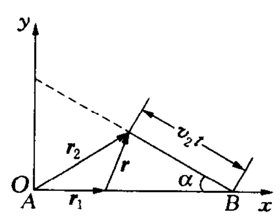
$$
a=a_x=-\frac{av_0^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\text{，负号表示沿 } x \text{ 轴负方向.}
$$

例 1-5 如图(a)所示，质点 A 和 B 同时从 A、B 两点出发，分别以速度$\boldsymbol{v}_1$沿 AB 和以速度$\boldsymbol{v}_2$沿 BC 作匀速直线运动，BC 和 BA 的夹角为α，开始时质点 A 和质点 B 相距为 l，试求两质点之间的最短距离.



例 1-5 图(a)

解法一： 以地面为参照系，以 A 点为坐标原点，取 x 轴沿 AB 连线，在任意时刻 t，两质点的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，两质点之间的距离为 $r=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$，因 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 都随时间变化，所以 r 也是时间的函数. 如图(b)所示，两质点的位矢分别为



例 1-5 图(b)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= v_1t\boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{r}_2 &= (l-v_2t\cos\alpha)\boldsymbol{i}+v_2t\sin\alpha\boldsymbol{j},\\
r &= |\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1| = |[l-(v_2\cos\alpha+v_1)t]\boldsymbol{i}+v_2t\sin\alpha\boldsymbol{j}|;\\
r &= r(t)=\sqrt{[l-(v_2\cos\alpha+v_1)t]^2+(v_2t\sin\alpha)^2}.
\end{aligned}
$$

求 r 的极小值，只要求根号内函数的极小值即可，令

$$
f(t)=[l-(v_2\cos\alpha+v_1)t]^2+(v_2t\sin\alpha)^2,
$$

$$
\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=2[l-(v_2\cos\alpha+v_1)t][-(v_2\cos\alpha+v_1)]+2v_2^2t\sin^2\alpha.
$$

极小值满足 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=0$，由此得

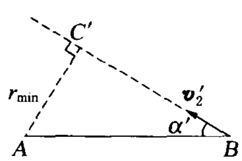
$$
t=\frac{(v_2\cos\alpha+v_1)l}{(v_2\cos\alpha+v_1)^2+(v_2\sin\alpha)^2}.
$$

把 t 值代入 $r(t)$ 表示式中得

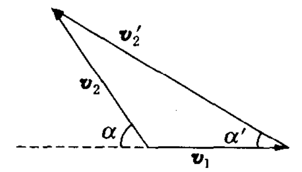
$$r_{\min} = \frac{v_2 l \sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}}.$$

严格说来，要判断这样求得的极值是极大还是极小，还需要根据 $\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}$ 是大于还是小于零，但从物理上分析，r 不可能有极大值，或者说极大值是无限大，所以所求得的结果只可能是极小值.

解法二： 利用相对运动关系求解：如图(c)所示，因 A、B 两质点均作匀速直线运动，故一质点相对另一质点的运动必定也是匀速直线运动. 以质点 A 为参照系，在此参照系中 A 是静止的，质点 B 则以相对速度 $\boldsymbol{v}_2'$ 沿直线 BC' 作匀速直线运动，BC' 与 AB 的夹角为 α'，$\boldsymbol{v}_2'$ 和 α' 均可用简单的几何方法求得，于是在 A 的静止参照系中，从 A 到直线 BC' 的垂直距离即为所求的最短距离，图(d)表示 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_2'$ 三者的矢量关系.



例 1-5 图(c)



例 1-5 图(d)

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1.$$

由余弦定理得

$$v_2'^2 = v_2^2 + v_1^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha.$$

由正弦定理得

$$\frac{v_2}{\sin\alpha'} = \frac{v_2'}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{v_2'}{\sin\alpha};$$

由上式得

$$\sin\alpha' = \frac{v_2}{v_2'}\sin\alpha.$$

因而两质点间最短距离为

$$r_{\min} = l\sin\alpha' = l\,\frac{v_2}{v_2'}\sin\alpha = \frac{v_2 l \sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}}.$$

由上述两种解法可以看出，若选 A 在其中为静止的动参照系，解题很方便，避免了烦琐的运算，解得极值也不必判断到底是极大还是极小.

三、习 题 解 答

1-1. 一质点沿 x 轴运动，其坐标随时间的变化关系为 $x = 10t^2$，式中 x 和 t 的单位分别是 m 和 s，试计算该质点在 3 s 到 4 s 内的平均速度以及 $t = 3$ s 时的速度和加速度.

解：由平均速度的定义，质点在 3 s～4 s 内的平均速度为

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{10(t_2^2-t_1^2)}{t_2-t_1}=10(t_2+t_1)=10(4+3)=70(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}).$$

速度为　$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=20t$，$t=3$ s 时，$v=20\times3=60(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$.

加速度为　$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=20(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$，与时间无关，说明质点作匀加速运动.

1-2. 一质点沿 x 轴运动，其速度随时间的变化关系为 $v=4t-8$，式中 v 和 t 的单位分别是 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 和 s，当 $t=1$ s 时，质点在原点左边 2 m 处，试求：

(1) 质点的位置及加速度的表示式；

(2) 质点的初速度；

(3) 质点到达坐标原点左边的最远位置；

(4) 质点何时经过坐标原点？此时速度多大？

解：已知 $v=4t-8$，$t=1$ s 时，$x=-2$ m，

由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$ 两边积分 $\int_{-2}^{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{t}v\mathrm{d}t$；$x+2=\int_{1}^{t}(4t-8)\mathrm{d}t$.

得　(1) $x=2t^2-8t+4(\mathrm{m})$，$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4t-8)=4(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$.

(2) $t=0$ 时，$v_0=-8(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$.

(3) $t=0$ 时，$x=4$，$v_0=-8$，$a=4$，质点开始时向 x 负方向作减速运动，到 $v=0$ 时到达原点左边的最远位置，由此得到达此位置的时间：

$$0=4t-8;\ t=2(\mathrm{s}).$$

代入 x 的表示式，得到质点离原点左边的最远位置 x_1：

$$x_1=2\times2^2-8\times2+4=-4(\mathrm{m}).$$

(4) 由 $x=0$ 得　$0=2t^2-8t+4$，$t=2\pm\sqrt{2}(\mathrm{s})$.

相应的速度为　$v=4t-8=4(2\pm\sqrt{2})-8=\pm4\sqrt{2}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，即质点两次经过坐标原点.

1-3. 已知质点沿 x 轴运动的加速度为 $a=6t$，式中 a 和 t 的单位分别是 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ 和 s，当 $t=2$ s 时，质点以 $v=12\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 的速度通过坐标原点，试求：

(1) 质点的速度及位置的表示式；

(2) 质点的初始位置及初速度.

解：(1) 已知 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6t$，$t=2$ s 时 $v=12\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，$x=0$.

将上式积分：$\int_{12}^{v}\mathrm{d}v=\int_{2}^{t}6t\mathrm{d}t$，得 $v-12=3t^2-12$，所以 $v=3t^2$.

同理，由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2$，$\int_{0}^{x}\mathrm{d}x=\int_{2}^{t}3t^2\mathrm{d}t$，解得　$x=t^3-8$.

(2) $t=0$ 代入 v 和 x 的表示式得

$$v_0=0\ \text{及}\ x_0=-8(\mathrm{m}).$$

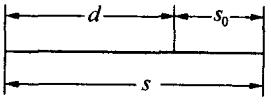
1-4. 一列以速率 v_1 沿直线行驶着的客车,司机意外发现前面与他相距 d 处,有另一列货车在同一轨道上以速率 v_2($v_2 < v_1$)沿相同方向行驶,于是他立刻刹车,使客车以加速度 a 作匀减速运动,问 a 应满足什么条件才能使两车不相撞?

解: 设火车速率从 v_1 减到 v_2 所行驶的距离为 s,则

$$v_2^2 - v_1^2 = -2as. \qquad ①$$

货车以 v_2 前进,在与火车减速到 v_2 所花的相同时间内行驶距离为 $s_0 = v_2 t$, $t = (v_1 - v_2)/a$,如图所示,要使两车不相撞应有 $s \leqslant d + s_0$,将此条件及 $v_2 = v_1 - at$ 代入①式得

$$v_1^2 - v_2^2 \leqslant 2a\left(d + v_2 \cdot \frac{v_1 - v_2}{a}\right).$$



习题 1-4 图

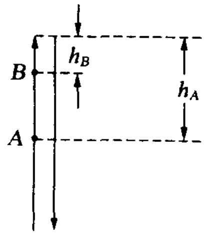
化为 $$v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2 \leqslant 2ad,$$

得 $$a \geqslant \frac{(v_1 - v_2)^2}{2d}.$$

1-5. 如图所示,竖直上抛一小球,测量得小球上升时经过 A 点到下落时经过 A 点的时间间隔为 T_A 和上升时经过 B 点到下落时经过 B 点的时间间隔为 T_B, $T_A > T_B$, 如果 A 点与 B 点的高度差为 h,求证重力加速度 g 可表示为 $g = \dfrac{8h}{T_A^2 - T_B^2}$.

解: 小球从 A 点到最高点所费时间为 $T_A/2$,则从 A 到最高处的高度为

$$h_A = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_A}{2}\right)^2.$$



习题 1-5 图

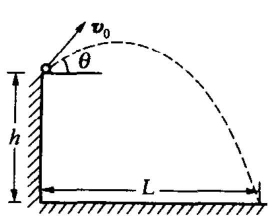
同理有 $$h_B = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_B}{2}\right)^2;$$

则 $$h = h_A - h_B = \frac{g}{8}(T_A^2 - T_B^2),$$

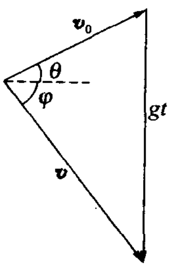
得 $$g = \frac{8h}{T_A^2 - T_B^2}.$$

1-6. 在离地面高为 h 处,一小球以初速 v_0 作斜抛运动,如图(a)所示,试问当球的抛射角 θ 为多大时,才能获得最大的水平射程? 并求出此最大水平射程 L_{max}.

解: 将小球的运动分解为沿水平的 x 方向和垂直的 y 方向,取坐标原点为抛出点,则



习题 1-6 图(a)



习题 1-6 图(b)

$$v_x = v_0 \cos\theta; \qquad ①$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt. \qquad ②$$

小球落地时，

$$-h = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{③}$$

$$L = v_0 \cos\theta\, t. \tag{④}$$

由②、③两式消去 t,得

$$v_y^2 - (v_0 \sin\theta)^2 = 2gh. \tag{⑤}$$

球落地时，$v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

将①、⑤两式代入上式　得

$$v^2 = (v_0 \cos\theta)^2 + (v_0 \sin\theta)^2 + 2gh = v_0^2 + 2hg,$$

即 $$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{⑥}$$

小球速度$\boldsymbol{v}$ 和$\boldsymbol{v}_0$之间的矢量关系为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t$，如图(b)所示，矢量三角形面积为

$$S = \frac{1}{2}v_0 \cos\theta \cdot gt.$$

水平射程 $$L = v_0 \cos\theta \cdot t.$$

由此两式得 $$S = \frac{1}{2}gL. \tag{⑦}$$

可见要 L 最大，S 必须取最大值，由三角形面积公式，有

$$S = \frac{1}{2}v_0 v \cdot \sin(\theta + \varphi).$$

因 v_0、v 恒定，只有当 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时，三角形有最大面积，也即要求$\boldsymbol{v}_0$和$\boldsymbol{v}$ 互相垂直. 由图(b)可知

$$v_0 \cos\theta = v\cos\varphi = v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = v\sin\theta,$$

得抛射角 $$\theta = \arctan\frac{v_0}{v} = \arctan\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

由⑦式 $$L_{\max} = \frac{2S_{\max}}{g} = \frac{2}{g} \cdot \frac{1}{2}v_0 v = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

1-7. 一物体以初速 $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 被抛出，抛射角(仰角)为 $\alpha = 60°$，略去空气阻力，试问：

(1) 物体开始运动后的 1.5 s 末，运动方向与水平面的交角 θ 是多少？

(2) 物体抛出后经过多少时间，其运动方向与水平面成 45°角，这时物体所在高度是多少？

(3) 在物体轨迹最高点处和落地点处，轨迹的曲率半径各为多大？

解：(1) $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = \dfrac{20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 9.8 \times 1.5}{20 \times \frac{1}{2}} = 0.26$, $\theta = 14.57°$.

(2) 由(1)可推出 $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha - v_0 \cos\alpha \cdot \tan\theta}{g}$，当 $\theta = 45°$ 时