

全国成人高考专升本

高等数学(二) 考试辅导

居余马 林翠琴 编



清华大学出版社

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

全国成人高考专升本

高等数学(二) 考试辅导

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

图书在版编目(CIP)数据

全国成人高考专升本高等数学(二)考试辅导/居余马,林翠琴编. —北京:清华大学出版社,2000

ISBN 7-302-04112-1

I. 全… II. ①居… ②林… III. 高等数学-成人教育:高等教育-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 77680 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者:北京昌平环球印刷厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:850×1168 1/32 印张:7.5 字数:195 千字

版 次:2001 年 1 月第 1 版 2001 年 1 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-04112-1/O · 250

印 数:0001~5000

定 价:12.00 元

前 言

本书是根据教育部新制订的全国成人高考专科起点升本科《高等数学(二)》(适用于经济学、教育学、农学、管理学)的考试复习大纲编写的。我们曾于2000年初在清华大学远程教育部举办的专升本考试辅导中,向清华在全国各地的网站播讲过《高等数学(二)》的考试辅导,本书是在该讲稿的基础上修改而成的。

我们编写本书的指导思想是“以不变应万变”,因为尽管每年的考题是千变万化的,但万变不离其宗,而其“宗”是不变的,它就是课程的基本概念、基本理论和基本方法。因此,我们着力于系统而简要地阐明课程的基本概念、基本理论和基本方法,使读者对高等数学所研究的基本问题以及分析问题、解决问题的基本方法有清晰的了解,同时又分类列举了各种典型的例题,通过对例题的分析和求解,进一步加深读者对课程的基本概念、基本理论和基本方法的理解,起到举一反三的作用。这样,读者面对各种考题都会心中有数,无所畏惧。所以,这本考试辅导教材的特色是,既有教材的功能,又有辅导的效用。

本书共列举了大大小小的例题约340个(其中个别带*号的题较难,应该不是考试要求的题),此外还选编了自我检查题(练习题)230个。读者做自我检查题要自己独立完成后,再对照提供的题解,才能有效地发现自己存在的问题。如果经过思考还不能求解,再去看解答才会知道解题的关键在何处,如此就会有较好的收益。此外,还选编了65个考试模拟题(一般考题为:选择题10个,填空题5个,计算证明题10~15个),供读者检查学习效果(这里只有答案,没有题解),如果完成较好,考试将会成功。

在附录中,我们汇集了:2000年成人高等学校专升本招生全国统一考试高等数学(二)试卷及答案;清华大学2000年远程教育专升本入学考试经济学专业高等数学(二)试卷及答案;成人高等学校专升本招生全国统一考试复习大纲(2001年)中高等数学(二)标准样卷。应考的考生可从这三份考题中清楚地了解到考试的基本要求,读者按本书作了全面复习,掌握了其中的基本内容,可以充满信心的去应考。

由于编写的时间仓促,不妥和错误在所难免,欢迎读者和关心本书的老师们指正。

编 者

于清华园 2000 年 9 月

目 录

第 1 章 函数 极限 连续	1
1.1 函数	1
1.2 极限	15
1.3 函数的连续性与连续函数	31
1.4 自我检查题(练习题)与答案	38
第 2 章 一元函数微分学	46
2.1 导数的概念	46
2.2 微分法	52
2.3 微分	64
2.4 中值定理	69
2.5 洛必达法则	72
2.6 函数的增减性与极值	77
2.7 函数的最大、最小值问题	81
2.8 函数图形的凹、凸、拐点	84
2.9 自我检查题(练习题)与答案	86
第 3 章 一元函数积分学	97
3.1 原函数和不定积分的概念	97
3.2 不定积分法(积分法)	99
3.3 定积分的概念及性质	118
3.4 变上限定积分与微积分基本定理 (牛顿—莱布尼兹公式)	125

3.5	定积分的换元法与分部积分法	131
3.6	定积分的应用	138
3.7	无穷区间的广义积分(反常积分)	145
3.8	综合例题	148
3.9	自我检查题(练习题)与答案	153
第4章	多元微积分初步	174
4.1	多元函数的概念	174
4.2	偏导数与全微分	177
4.3	复合函数的偏导数	181
4.4	隐函数的导数和偏导数	185
4.5	二重积分的概念	189
4.6	二重积分的计算	192
4.7	自我检查题(练习题)与答案	203
	总复习题(模拟试题)	213

附录

- 2000 年成人高等学校专升本招生全国统一考试
高等数学(二)试卷 222
- 清华大学 2000 年远程教育专升本入学考试经济学
专业高等数学(二)试卷 228
- 全国各类成人高等学校招生统一考试
专科起点升本科高等数学(二)试卷 232

第 1 章 函数 极限 连续

微积分是研究函数变化性质的一门学科,它的两类基本问题是微分和积分.在微积分中,研究问题的基本方法是极限方法和局部线性化方法(即函数在一点附近,以不变代变,以直代曲,以线性函数近似非线性函数);主要是研究连续函数的变化性质.因此,微积分教材一般都是先讲函数、极限和连续的概念、性质和计算;然后讲一元函数微分学和一元函数积分学;进而讲多元函数微积分.

1.1 函数

先介绍常用的量词 $\forall, \exists$.“ $\forall$ ”称为全称量词,它表示“任意的”或“任一个”.例如,“ $\forall x$ ”表示“对于任意的 x ”或“任一个 x ”.“ $\exists$ ”称为存在量词,表示“存在”或“有一个”.例如,“ $\exists x$ ”表示“存在 x ”或“有一个 x ”.

1.1.1 函数概念

定义 1 设有两个变量 x 和 y ,如果 $\forall x \in D$ (实数集 $\mathbf{R}$ 的一子集), y 都按一定的规则有一个确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$ 或 $y=y(x)$,其中: x 称为自变量, y 称为因变量或函数, D 称为函数的定义域,函数值的集合称为函数的值域,记作 W ,即

$$W = \{f(x) | \forall x \in D\}$$

1 确定函数的两个要素:(1) 定义域,(2) 对应规则.

(1) 关于定义域

实际问题中的函数,其定义域由实际意义确定.例如,圆面积

$S = \pi r^2$, 定义域为 $r > 0$.

由式子表示的函数 $y = f(x)$, 如不考虑实际意义, 其定义域是使 $f(x)$ 有意义的 x 的集合. 微积分是讨论实变量的实值函数, 所以 $f(x)$ 有意义是指 $f(x)$ 应为实数.

例 1 求 $y = f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}}$ 的定义域.

解 为使 $f(x)$ 有意义, 要求

$$x \neq 2, \frac{(x+1)(x-1)}{x-2} \geq 0$$

即
$$\begin{cases} (x+1)(x-1) \leq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} (x+1)(x-1) \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

可用下面的表格法, 解此不等式组. 下列表格中的“+”, “-”分别表示左端因式“ >0 ”, “ <0 ”. 例如, 在 $(-\infty, -1)$ 上 $x+1 < 0$, 在 $(-1, 1)$ 上, $x+1 > 0$.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x+1$	-	+	+		+
$x-1$	-	-	+		+
$x-2$	-	-	-		+
$\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}$	-	+	-	无意义	+

所以定义域为 $-1 \leq x \leq 1$ 或 $2 < x < +\infty$, 即

$$[-1, 1] \cup (2, +\infty)$$

例 2 求 $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$ 的定义域.

解 为使 $\sqrt{x - \sqrt{x}}$ 有意义 (即为实数), 要求 $x \geq 0$ 且 $x - \sqrt{x} \geq 0$, 即 $x \geq \sqrt{x}$, 从而得

$$x^2 - x = x(x-1) \geq 0$$

因为 $x \geq 0$, 所以 $x-1 \geq 0$, 即 $x \geq 1$, 故定义域为 $[1, +\infty)$.

例 3 求 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\log_{10}(x-1)}}$ 的定义域.

解 这里要求对数的真数 $x-1 > 0$, 所以 $x > 1$. 另外要求分母 $1+\log_{10}(x-1) \neq 0$ (因为负数开三次方也有意义), 即 $\log_{10}(x-1) \neq -1$, 由此得

$$x-1 \neq \frac{1}{10} = 0.1, \text{ 即 } x \neq 1.1$$

故定义域为 $(1, 1.1) \cup (1.1, +\infty)$.

(2) 关于对应规则“ f ”

函数 $y = f(x) = x^2 + \sin x$ 的对应规则 f 为: 把自变量 x 平方再加上 x 取正弦的值, 于是就有

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \sin \frac{1}{x}$$

上式的意义就是将 $\frac{1}{x}$ 代替 $f(x) = x^2 + \sin x$ 中的 x . 同理有

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (f(x))^2 + \sin f(x) \\ &= (x^2 + \sin x)^2 + \sin(x^2 + \sin x) \end{aligned}$$

例 4 已知 $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1+x}{2+x}$, 求 $f(x)$.

解 令 $\frac{1}{1+x} = t$, 即 $1 = (1+x)t$, 得 $x = \frac{1-t}{t}$, 所以

$$f(t) = \frac{1 + \frac{1-t}{t}}{2 + \frac{1-t}{t}} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1+t}{t}} = \frac{1}{1+t}$$

函数的实质是因变量与自变量之间的对应规则 f , 与自变量用什么记号无关, 将自变量 t 的记号换为 x , 即得 $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

例 5 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+1}$, 求 $f(x)$.

解 令 $x + \frac{1}{x} = t$, 即 $x^2 + 1 = xt$, 所以 $f(t) = \frac{x}{xt} = \frac{1}{t}$.

另法 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x}$.

2 函数的三种表示方法:式子,图形,表格.

式子表示,如 $S = \pi r^2$, $y = x + \sin x$.

例 6 如图 1-1,在半径为 R 的球面内,内接一个高为 h 的圆柱体,求圆柱体体积 V 与 h 的函数关系.

解 由圆柱体体积公式得 $V = \pi r^2 h$,
其中 $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$, 所以 $V = f(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$.

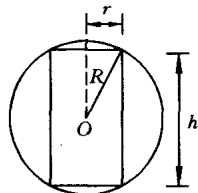


图 1-1

例 7 如图 1-2,长为 2 米的弦(皮筋) OA 置于 x 轴正向.将其中点 B 垂直提升 1 米,求弦上各点 y 坐标与 x 的关系.

解 OB 线段的方程为 $y = x$.

AB 线段的斜率为 -1 , 方程为

$$y - 0 = -1(x - 2)$$

即 $y = 2 - x$. 所以弦 OBA 上各点 y 坐标与 x 坐标的函数关系应分段表示为

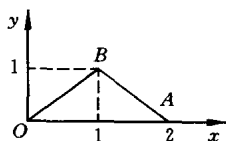


图 1-2

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

1.1.2 函数的简单性质

1 有界性

定义 2 $y = f(x)$ 在区间 I 上称为有界, 如果 $\exists M > 0$, 使 $\forall x \in I$, 均有 $|f(x)| \leq M$, 即 $f(x)$ 在 I 上的值域 $W \subset [-M, M]$.

例如, $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 因为 $|\sin x| \leq 1$; $y = \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界, 因为函数的值域为 $(0, 1] \subset [-1, 1]$; $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上无界, 因为 x 无限趋近于 0 时, $\frac{1}{x}$ 的值将无限地变大, 不论多大的数 M , 都不能使 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上的函数值都小于等于 M .

2 单调性

定义 3 如果 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 均有

(1) $f(x_1) \leq f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(递增); $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增;

(2) $f(x_1) \geq f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 上单调减少(递减); $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 上严格单调递减.

3 奇偶性

定义 4 设 $y = f(x)$ 的定义域 $D = [-a, a]$. 若 $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$, 则称 f 为偶函数; $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$, 则称 f 为奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴, 如图 1-3. 奇函数的图形对称于原点, 且 $f(0) = 0$, 如图 1-4, 1-5. 因为 $f(-0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0$, 所以 $f(0) = 0$.

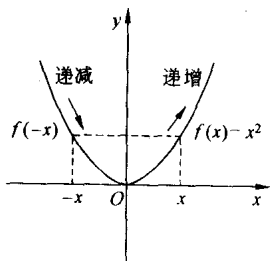


图 1-3

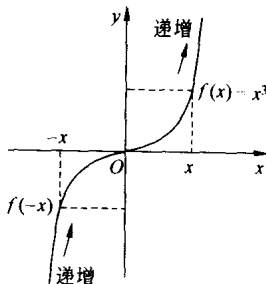


图 1-4

例如, $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, x^n$ (n 为奇数) 均为奇函数; 而 $\cos x, x^n$ (n 为偶数) 均为偶函数.

注意: 在早一点的书中 $\tan x$ 记为 $\operatorname{tg} x$, $\cot x$ 记为 $\operatorname{ctg} x$.

例 1 验证 $F(x) = x \sin^2 x$ 为奇函数.

解 因为 $F(-x) = (-x) \cdot \sin^2(-x) = -x \sin^2 x = -F(x)$, 所以 $F(x)$ 为奇函数.

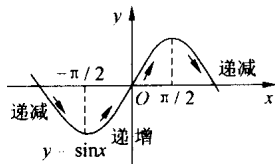


图 1-5

例 2 验证 $G(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$ 为偶函数.

解 因为 $G(-x) = \sqrt[3]{-x} \sin(-x) = (-\sqrt[3]{x})(-\sin x) = G(x)$, 所以 $G(x)$ 为偶函数.

一般地, 奇函数 $\times$ 偶函数为奇函数; 奇函数 $\times$ 奇函数为偶函数; 偶函数 $\times$ 偶函数为偶函数.

例 3 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-a, a]$, 则 $F(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $G(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

证 因为 $F(-x) = f(-x) + f(x) = F(x)$, 所以 $F(x)$ 为偶函数.

又由 $G(-x) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -G(x)$ 得 $G(x)$ 为奇函数.

例如, $G(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ 是奇函数, 因为 $G(-x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -G(x)$.

由例 3 易得: 定义域为 $(-a, a)$ 的任何函数 $f(x)$ 均可表示为奇函数与偶函数之和. 因为

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

其中 $\frac{f(x) - f(-x)}{2}, \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 分别为奇函数和偶函数.

例 4 判断 $y(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 判断函数 $y(x)$ 是否具有奇偶性, 根据定义就要判断 $y(-x)$ 与 $y(x)$ 是否异号或相等. 因为

$$\begin{aligned}y(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \\&= \ln \frac{(-x + \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} \\&= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -y(x)\end{aligned}$$

所以 $y(x)$ 为奇函数.

例 5 判断 $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 的奇偶性.

$$\begin{aligned}\text{解 } f(-x) &= \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)} \\&= -\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

4 周期性

定义 5 函数 $y=f(x)$, 若 $\exists T>0$, 且 $\forall x$ 有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, 最小的 T 为周期.

$$\begin{aligned}\text{此时 } f(x) &= f(x+T) = f(x+T+T) \\&= \cdots = f(x+kT), \quad k \in \mathbf{N}\end{aligned}$$

例 6 利用 $y=\sin x$ 的周期 $T=2\pi$, 证明 $f(x)=\sin 3x$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\text{证明 因为 } f(x) &= \sin 3x = \sin(3x+2\pi) \\&= \sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

故得 $\sin 3x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{3}$.

一般地, $y = \sin(\omega t + \alpha)$ (其中 ω, α 为常数) 的周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (其中常数 α 不影响正弦函数的周期).

例 7 $i = I_m |\sin \omega t|$, ($I_m > 0$), 问周期 $T = ?$

解 $i = I_m |\sin \omega t|$ 是交流电 $i = I_m \sin \omega t$ 的全波整流, 它的图形如图 1-6 所示. 由图可见 $T = \frac{\pi}{\omega}$.

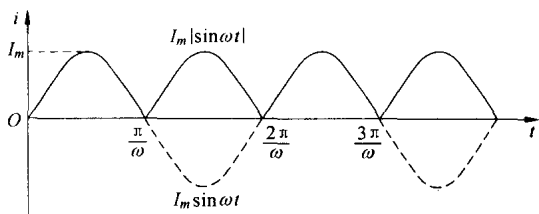


图 1-6

例 8 $y = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的周期 $T = ?$

解 由三角恒等式得

$$y = \frac{1 - \cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

所以 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

1.1.3 函数的运算

1 四则运算: 设 $f(x), g(x)$ 定义在 D 上, 则在 D 上可定义

$$f(x) \pm g(x); f(x)g(x); f(x)/g(x) (g(x) \neq 0)$$

两个函数作四则运算所得的新函数, 其函数值是两个函数在相应点的函数值作四则运算.

2 复合运算——复合函数

质点 P 以匀角速度 ω 绕原点按逆时针方向作圆周运动. 起点

为 $P(0)$, 如图 1-7, 于是 t 时刻点 P 的纵坐标为

$$y(t) = R \sin \alpha, \quad \alpha = \omega t$$

所以 $y(t) = R \sin \omega t$

此时, $y(t)$ 是由 $y = R \sin \alpha$ 与 $\alpha = \omega t$ 复合而成.

定义 6 设 $y = f(u)$, 定义域为 D_u , $u = \varphi(x)$, 定义域为 D_x , 值域为 W_u , 当 $W_u \subset D_u$ 时, y 是 x 的复合函数, 即 $y = f(\varphi(x))$, 定义域为 D_x . 它是由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数. 通常称 u 为中间变量.

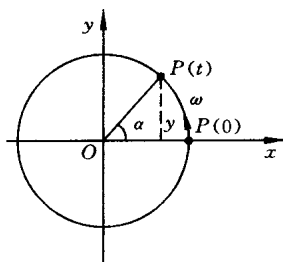


图 1-7

例 1 $y = \sqrt{1 + \sin x}$ 是由 $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = \varphi(x) = 1 + \sin x$ 复合而成.

例 2 $y = \sin^2(2x + 3)$ 是由 $y = f(u) = u^2$, $u = \sin v$, $v = 2x + 3$ 复合而成.

注意: 一般地 $f(\varphi(x)) \neq \varphi(f(x))$. 如例 1, $f(\varphi(x)) = \sqrt{1 + \sin x}$, 而 $\varphi(f(x)) = \varphi(\sqrt{x}) = 1 + \sin \sqrt{x}$.

3 反函数(逆运算)

$$y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

称 $y = \sqrt[3]{x}$ 为 $y = x^3$ 的反函数, 同样

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

称 $y = \arcsin x$ 为 $y = \sin x$ 的反函数.

定义 7 若 $y = f(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y)$, 则 $y = \varphi(x)$ 记作 $y = f^{-1}(x)$, 称为 $y = f(x)$ 的反函数.

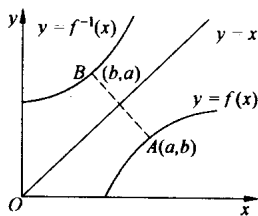


图 1-8

函数与其反函数的图形对称于直线 $y = x$, 见图 1-8. 因为由 $b = f(a)$

即得 $a = \varphi(b) = f^{-1}(b)$, 故点 $A(a, b)$ 与点 $B(b, a)$ 对称于 $y = x$.

例 3 求 $y = 1 - e^{\frac{x-1}{2}}$ 的反函数.

解 由原式得 $e^{\frac{x-1}{2}} = 1 - y$, 两边取对数得

$$\frac{x-1}{2} = \ln(1-y)$$

即 $x = 1 + 2\ln(1-y)$

故所求反函数为 $y = 1 + 2\ln(1-x)$.

1.1.4 基本初等函数与初等函数

1 基本初等函数共有 6 类函数:

$y = c$ (常数); 幂函数 $y = x^\mu$; 指数函数;
对数函数; 三角函数; 反三角函数.

幂函数的图形可参见图 1-9.

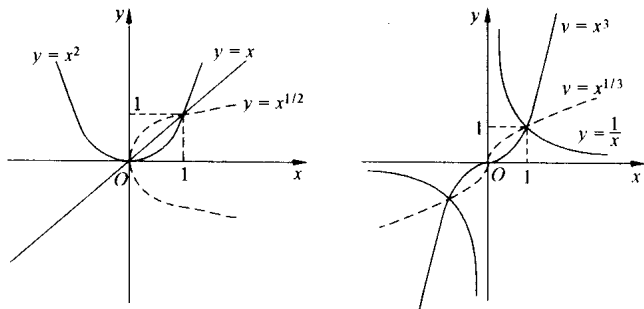


图 1-9

指数函数与对数函数的图形可参见图 1-10(a), (b).

三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 的图形与反三角函数的图形, 请参看有关教材.

$y = \arcsin x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域(主值)为 $[-\pi/2, \pi/2]$.

$y = \arccos x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域(主值)为 $[0, \pi]$.