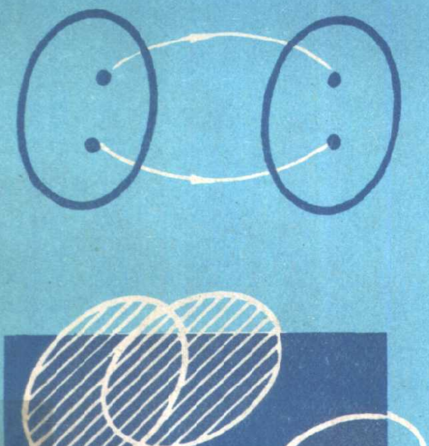
集合和映射

欧阳光中 编



育出版社

内 容 提 要

本书通过日常生活中常见的实例引入近代数学的一个分支——集合论——的基本思想，并介绍了集合的运算、等价关系、商集、顺序关系、映射、集合的势等许多重要概念. 本书可供高中学生和中小学教师阅读和参考.

目　录

§1 集合的概念~~和集合的运算~~

从百货商店说起

走进百货商店，各种货物琳琅满目。

当我们读小学的时候就已经知道，在这里不论是买和卖，都少不了整数和小数以及它们的四则运算。换句话说，在买卖中我们要研究的数学对象是整数和小数，这些数之间的运算是加减乘除。然而，在这百货商店里难道只用到这一种数学吗？不，还有另一种数学对象和它们的运算将展现在我们的面前。

现在，从百货商店的进货说起。如果第一批进的货是帽子、皮鞋、热水瓶、闹钟共计 4 个品种，第二批进的货是收音机、皮鞋、尼龙袜、茶杯、闹钟共计 5 个品种，要问一共进了多少品种的货。能不能回答一共进了 $4+5=9$ 种呢？显然不能，因为在这两批货中皮鞋和闹钟是重复的，扣掉重复，只能回答一共进了 7 种。这就告诉我们，不能用普通的算术来解这道题，而必须用另一种办法才行。

我们用 A_1 表示第一批进的货，用 A_2 表示第二批进的货，即：

$A_1=\{$帽子，皮鞋，热水瓶，闹钟$\}$，

$A_2=\{$收音机，皮鞋，尼龙袜，茶杯，闹钟$\}$。

把这两批进货的品种合并起来，我们把合并起来的货物品种记为 B，就得到

$$B=A_1 \text{ 和 } A_2 \text{ 合并}$$
$$=\{帽子，皮鞋，热水瓶，闹钟，收音机，尼龙袜，茶杯\}。$$

一共 7 个品种！

还要进第三批货，我们把它记为 A_3，进这批货有两个要求：一是它的品种必须在 A_2 中，二是它的品种不能在 A_1 中，问 A_3 里面有多少品种？也不能冒然回答 A_3 里共有 $5-4=1$ 个品种，而应该这样做：

$$A_3=\text{从 } A_2 \text{ 中减去 } A_1 \text{ 中也有的品种}$$
$$=\{收音机，尼龙袜，茶杯\}。$$

一共 3 个品种。

再进第四批货，把它记为 A_4，要求它的品种既在 A_1 中，同时又在 A_2 中，也就是

$$A_4=A_1 \text{ 和 } A_2 \text{ 的共同品种}$$
$$=\{皮鞋，闹钟\}。$$

在这些问题中，我们所处理的数学对象已经不是数，而是 A_1 和 A_2，它们是由一些东西所组成的。在 A_1 和 A_2 之间有一些有用的"运算"，这些运算也不是通常的加减乘除，而是"合并"、"减去"、"共同"。这样，一个新的数学领域立即展现在我们的面前。

集合的概念

什么叫集合，就人们的日常生活经验而言，这几乎是不言自明的概念，它是指某些指定的"东西"集在一起就成为集

合*。例如前面所说的 A_1, A_2, B, A_3, A_4 都是集合。又如全体中国人也是一个集合，所有大于 0 并且小于或等于 2 的实数同样构成一个集合，这个集合就是左开右闭的区间 $(0,2]$。在集合论中，我们往往用下面的记号来表示这个左开右闭的区间：

$$(0,2]=\{x \mid 0<x\leqslant 2\}。$$

右边括号的含意是：它表示一个集合，这个集合是由满足条件“$0<x\leqslant 2$”的一切 x 所组成的。我们把条件写在括号内右方，把 x 写在括号内左方，当中用一竖把它们分开（也可以用“:”把它们分开，写为 $\{x:0<x\leqslant 2\}$）。

一般说来，设集合 $A=\{x \mid \cdots\}$，这表示 A 是由满足条件“…”的那些 x 所组成的，我们称这种 x 是集合 A 的**元素**。显然，“x 是 A 的元素”和“x 属于 A”是一回事，我们用记号 $x\in A$ 来表示 x 属于 A，其中记号“$\in$”读作：属于。我们又用记号“$\notin$”表示“不属于”，例如“$x\notin B$”就是“x 不属于 B”。

下面，我们举出集合的一些例子，并熟习一下刚才引进的那些记号。

例 1 设 $A=\{x \mid x^2-1=0\}$，它是由满足方程 $x^2-1=0$ 的一切 x 所组成的集合，解方程即得

$$A=\{x \mid x^2-1=0\}=\{-1,1\}。$$

它的元素只有两个：-1 和 1。由于它的元素的个数是有限的，我们就说它是一个**有限集**。

例 2 设 Z 是整数集（即由全体整数所组成的集合），

---

* 究竟什么是集合，这是一个很不容易回答的问题，参见附录：罗素悖理。

那么：

$$E=\{n \mid \frac{n}{2}\in Z\}$$

也是一个集合。条件"$\frac{n}{2}\in Z$"表示$\frac{n}{2}$属于整数集，即$\frac{n}{2}$是整数，可见集合E是由满足条件"$\frac{n}{2}$是整数"的那些n所组成的。很明显，这种n必须是偶数，即

$$E=\{n \mid \frac{n}{2}\in Z\}=\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots\}。$$

它不是有限集，我们就说它是**无限集**。

例 3 设R是实数集（即由全体实数所组成的集合）。那么

$$S=\{x \mid x\in R, x^2+1=0\}$$

就是由方程$x^2+1=0$的属于实数的根所组成。由于这个方程没有实根，所以集合S是空的。我们把空的集记为ϕ，读作：**空集**。于是

$$S=\{x \mid x\in R, x^2+1=0\}=\phi。$$

要注意：$\{x \mid x^2=0\}=\{0\}$不是空集，因为它是由一个元素0所组成，所以并不空！

例 4 设$M=\{x \mid x^2-4\geqslant 0, x^2-4x<0\}$。它是由同时满足两个条件"$x^2-4\geqslant 0$"和"$x^2-4x<0$"的$x$所组成的集合，换句话说，这些$x$必须满足：

$$\begin{cases} x^2-4\geqslant 0, \\ x^2-4x<0。\end{cases}$$

通过解联立不等式，我们得出：

$$M=\{x|x^2-4\geqslant 0, x^2-4x<0\}=[2,4)。$$

它是一个区间，当然是无限集。

例 5 设 $S=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,\ x>0\}$。它是由平面上的点 (x,y) 所组成的集合，这些点必须同时满足 $x^2+y^2\leqslant 1$ 和 $x>0$。由解析几何知道，它是右半个单位圆(图 1)，不包含线段 MN，但包含半圆周。

象本例中由平面(或者空间)的点组成的集合，通常叫做**点集**。属于集合的点就是这个集合的元素。

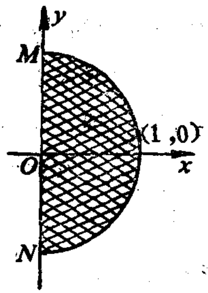


图 1

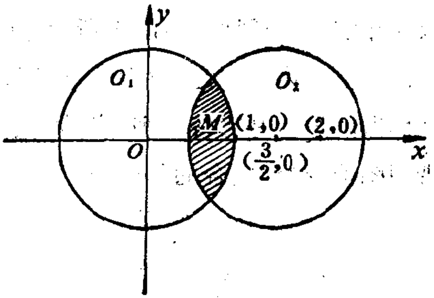


图 2

例 6 设 $M=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1, \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2\leqslant 1\}$。它是由具有下列性质的点 (x,y) 所组成的集合，这些点既要满足“$x^2+y^2\leqslant 1$”，又要满足“$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2\leqslant 1$”。由解析几何知道，所有满足“$x^2+y^2\leqslant 1$”的点组成一个以原点为圆心的单位圆(即图 2 中的 O_1)，所有满足“$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2\leqslant 1$”的点也组成一个单位圆，但它的圆心在 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ (即图 2 中的 O_2)。而

M 中的点既在 O_1 中又在 O_2 中，它的图形如图 2 所示。

最后还要注意一点：设集合 $A=\{1, 2, 3\}$。它由三个元素 1, 2, 3 组成，我们也可以把 A 写成 $A=\{2, 1, 3\}$ 或者 $A=\{3, 1, 2\}$ 等等。这就是说，当我们只是讨论集合是由哪些元素组成的时候，这些元素的书写次序是无关紧要的。

集合的运算：和，交，差

对一个一般的集合，我们常常用一个图形来表示它，就象例 5 和例 6 中那样。但由于所讨论的集合是一般的，没有对它作什么具体的规定，我们就可以随便画一个图形来表示它，这样做的好处是比较直观，容易考虑一些问题。现在，我们先借用图形，给出集合的和(并)、交、差三种运算的直观概念。

在图 3(a)中，我们画出了两个集合 A 和 B。

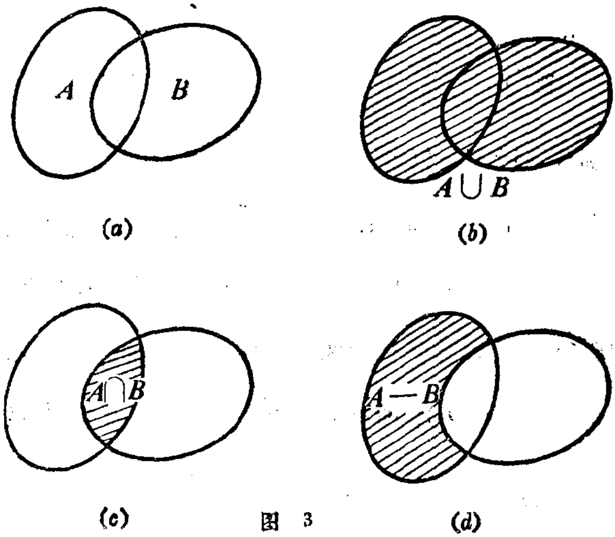


图 3

(1) 把这两个集合并起来，就得到图 3(b)，我们把它叫做集合 A 与 B 的和（也叫做集合 A 与 B 的并），记为 $A\cup B$。或者说，把集合 A 和集合 B 内的所有元素统统并起来，就得到 $A\cup B$。

(2) 图 3(c)中 A 与 B 的公共部分叫做集合 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$。或者说，$A\cap B$ 的元素既在 A 中又在 B 中。

(3) 图 3(d) 画出了 A 与 B 的差，即在 A 中挖去 B，记为 $A-B$。或者说，$A-B$ 中元素在 A 中，但不在 B 中。

上面所给出的只是和、交、差的直观概念，还不是数学上的定义。在集合论中，它们的定义是：**设 A、B 是两个集合，**

和(并)： $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$

$=\{x|$在 A、B 中至少有一个含有 $x\}$；

交： $A\cap B=\{x|x\in A, x\in B\}$，

如果 $A\cap B=\phi$(空集)，就说 A 与 B 不相交；

差： $A-B=\{x|x\in A, x\notin B\}$。

例 7 设 $A=(-1,1)$，$B=[0,2]$。

那么，$A\cup B=(-1,2]$，

$A\cap B=[0,1)$，

$A-B=(-1,0)$，

$B-A=[1,2]$。

例 8 设 $A=\{*,\triangle,\bigcirc,☆,\times\}$，$B=\{☆,\triangle,*,\square\}$。

那么，$A\cup B=\{*,\triangle,\bigcirc,☆,\times,\square\}$，

$A\cap B=\{*,\triangle,☆\}$，

$A-B=\{\bigcirc,\times\}$，

$B-A=\{\square\}$。

又设 $C=\{*,\times\}$，那么 $C-A=\phi$。

例 9 设 $A=\{x|x^2+x-6<0\}$，$B=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$。通过解不等式，我们有

$$A=(-3,2),\quad B=[-1,3]。$$

这时

$$A\cap B=(-3,2)\cap[-1,3]=[-1,2)。$$

由集合的交的定义知道，$A\cap B$ 正是联立不等式

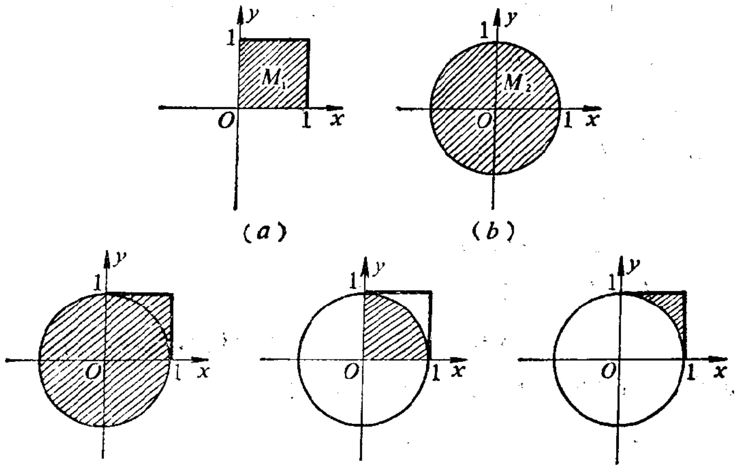
$$\begin{cases}x^2+x-6<0,\\ x^2-2x-3\leqslant 0\end{cases}$$

的解。

例 10 设 $M_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，

$$M_2=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}。$$

它们的图形画在图 4(a)和(b)中。图 4(c)中画出了 $M_1\cup M_2$，



(a) (b) (c) (d) (e)

图 4

图 4(d)中画出了 $M_1\cap M_2$，图 4(e) 中画出了 M_1-M_2。

在普通的算术中，我们有不等号“$\leqslant$”和等号“$=$”。同样，在集合论中，我们要引进所谓“**包含**”和“**相等**”的概念。

(1) 我们先给出什么叫做一个集合包含另一个集合。

设两个集合 A 和 B。如果 A 中的每一个元素都在 B 中，我们就说**集合 B 包含集合 A**，或者说 A 含在 B 内，并用 $A\subset B$ (或 $B\supset A$) 来表示这件事。用前面学过的记号写出来就是：

$$\text{若 } x\in A,\ \text{必有 } x\in B,\ \text{就说} A\subset B。$$

这时我们也说 A 是 B 的**子集**。例如全体中国人就是全体亚洲人的一个子集。又如集合$\{*,○\}$是集合$\{\times,*,+,○\}$的一个子集。再如整数集 Z 是有理数集 Q 的子集，而 Q 是实数集 R 的子集，即 $Z\subset Q\subset R$。

(2) 我们再给出什么叫做两个集合相等。

设两个集合 A 和 B，如果 A 中的每一个元素都在 B 中，而 B 中的每一个元素又都在 A 中，我们就说这**两个集合相等**，并记为 $A=B$。

由“包含”和“相等”的概念，立刻知道下面几件显而易见的事实。

(i) $A\subset A$，即任何集合 A 包含它自身。

但我们往往感兴趣的是“真正的子集”，即：$A\subset B$ 而 $A\neq B$(图 5)。我们就说 A 是 B 的真子集，这意味着 A 真正含在B 内。例如有理数集 Q 就是实数集 R 的一个真子集。如果 A是 B 的真子集，这

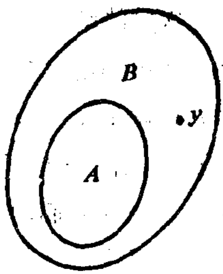


图 5

表明：$A\subset B$，同时在B中至少有一个元素y，$y\notin A$(图 5)。

（ii）任何两个集合A和B，总有$A\subset A\cup B$。

这是因为$A\cup B$比A扩大了，当然就有$A\subset A\cup B$。这一事实在后面的一些论证中常常要用到。

(iii) 如果两个集合A和B，既有$A\subset B$，又有$A\supset B$，这就表示$A=B$。

在集合论中，当证明两个集合A和B相等时，我们常常先证明$A\subset B$，再证明$A\supset B$，这样就证明了$A=B$。

在通常的加法和乘法中，有一些重要的法则，如交换律、结合律和分配律。与此类似，在集合的和与交中也有相仿的法则。设A,B,C都是集合。

交换律 $\quad A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

结合律 $\quad A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C。$$

分配律 $\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)。$$

同时，显然有

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A,\quad A-A=\phi。$$

这些法则都不难利用图形加以验证。例如，我们来验证分配律中的第一个式子$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，图6($a$)中画出了$A$，$B$，$C$三个集合，图6($b$)画出了$B\cap C$，图6($c$)中画出了$A\cup(B\cap C)$；图6($d$)和($e$)分别画出了$A\cup B$和$A\cup C$，再作它们的交便得到图6($c$)。这样就验证完了。

这仅仅是直观的验证，还不是数学上的证明。下面，我们用标准的集合论的方法来证明$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

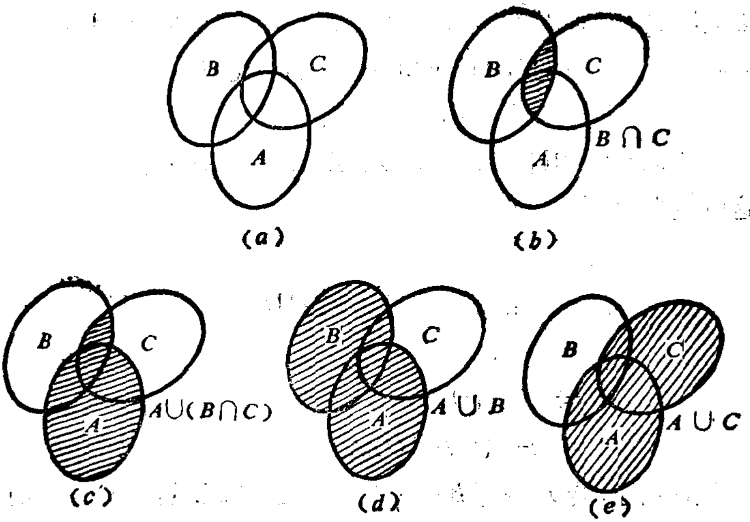


图 6

证明：(1) 我们先证明

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

设 $x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\cap C$*。

这时有两种可能性，也仅有两种可能性：

一种。 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup B,\ x\in A\cup C$

$$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

另一种。$x\in B\cap C\Rightarrow x\in B,\ x\in C$

$$\Rightarrow x\in A\cup B,\ x\in A\cup C$$

$$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

---

* 记号"⇒"表示"推得"，例如"$ab=ac$，$a\neq0\Rightarrow b=c$"，这句话表示"由 $ab=ac$ 和 $a\neq0$ 推得 $b=c$"。

这就证明了，如果 $x\in A\cup(B\cap C)$，必有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

因此 $$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

（2）再证明上式的左端$\supset$右端。

若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow x\in A\cup B$，$x\in A\cup C$。

这时也有（且仅有）两种可能性：

一种。$x\in A\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$

另一种。$x\notin A$，由于 $x\in A\cup B, x\in A\cup C$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x\in B,\ x\in C\\&\Rightarrow x\in B\cap C\\&\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)。\end{aligned}$$

这就证明了，若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，必有 $x\in A\cup(B\cap C)$。因此

$$A\cup(B\cap C)\supset(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

将（1）和（2）综合起来，便证明了结论。

例 11 设 $A=\{x\mid x^2-16<0\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+3\geqslant 0\}$。

解不等式得

$$A=(-4,4),\ B=(-\infty,1]\cup[3,+\infty),$$

这时

$$\begin{aligned}A\cap B&=(-4,4)\cap((-\infty,1]\cup[3,+\infty))\\&=((-4,4)\cap(-\infty,1])\cup((-4,4)\cap[3,+\infty))\\&=(-4,1]\cup[3,4)。\end{aligned}$$

这正是联立不等式

$$\begin{cases}x^2-4<0,\\x^2-2x-3\geqslant 0\end{cases}$$

的解。

至于分配律的另一个式子，建议读者用图形加以验证，或用集合论的方法加以论证。

现在，我们把两个集合的和与交推广到许多集合的和与交。设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合，我们用记号 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 表示这 n 个集合之和，用记号 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示它们的交，其确切的含义是：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$= \{x \mid \text{至少存在某个 } j, 1 \leqslant j \leqslant n, \text{使得 } x \in A_j\}$$

$$= \{x \mid \text{在 } A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 中至少有一个集合含有 } x\}。$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$= \{x \mid \text{对一切 } i = 1, 2, \cdots, n, x \in A_i\}$$

$$= \{x \mid x \text{ 属于一切 } A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}。$$

例12 设 A, B, C, D 都是集合，证明：

$A \cap (B \cup C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$。

证明：利用结合律和分配律，有

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C \cup D) &= A \cap (B \cup (C \cup D)) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap (C \cup D)) \\ &= (A \cap B) \cup ((A \cap C) \cup (A \cap D)) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)。\end{aligned}$$