数学小丛书

17

祖冲之算π之谜

虞言林　虞琪

科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书

17

祖冲之算π之谜

π

i

数学小丛书 17

祖冲之算 π 之谜

虞言林　虞　琪

科学出版社

2002

内 容 简 介

公元400多年,祖冲之公布了一条震惊世界的不等式 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$. 但是祖冲之求得不等式的方法失传了，这就成了一个谜. 本小册子以刘徽的割圆术为基础,运用当今中学的数学知识,介绍一个算 π 的方法,它很可能与失传了的祖冲之方法有关. 小册子的后半部描绘了古典割圆术的一个可能的发展. 这个发展必然会指向微积分学,从而可以为一些想学微积分的读者提供一个背景材料.

图书在版编目(CIP)数据

祖冲之算 π 之谜/虞言林,虞琪.—北京:科学出版社,2002

(数学小丛书)

ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.祖…　Ⅱ.①虞…②虞…　Ⅲ.数学-普及读物　Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第010169号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华店经销

*

2002年5月第 一 版　开本:787×960 1/32

2002年5月第一次印刷　印张:2 3/4　插页:1

印数:1—5 000　字数:39 000

全套书定价: 99.00元(共18册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》. 在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣. 书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长. 当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才. 当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展. 我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

目　　录

引　　言

祖冲之是我国古代的伟大数学家.他生于公元429年,卒于公元500年.在祖冲之的数学成就中最引人注意的是关于圆周率 π 的计算.唐朝长孙无忌的《隋书》卷十六律历卷十一中这样写道:

"古之九数,圆周率三,圆径率一,其术疏舛.自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒各有新率,未臻折衷.宋末,南徐州从事史祖冲之更开密法,以圆径一亿为一丈,圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽,朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽,正数在盈朒二限之间.密率:圆径一百一十三,圆周三百五十五.约率:圆径七,圆周二十二.又设开差幂、开差立,兼以正员参之,指要精密,算氏之最者也.所著之书称为《缀术》,学官莫能究其深奥,是故废而不理."

上述记载谈到了祖冲之的两个贡献.其一是他得到的不等式

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927,$$

其二是他用$\frac{22}{7}$作为π的约率，$\frac{355}{113}$作为密率. 祖冲之的这两个贡献皆是领先1000年的世界记录. 公元1424年阿拉伯数学家A. 卡西才打破祖的第一项记录，公元1573年德国数学家V. 奥托才得到密率$\frac{355}{113}$.

关于密率$\frac{355}{113}$的评说，我们建议大家去看华罗庚先生写的小册子《从祖冲之的圆周率谈起》[①]，而这本小册子只谈祖冲之的不等式：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

祖冲之在他的那个时代中能算出精确到小数点后7位的π值，是令人惊奇的. 他是如何算的呢？现在已经说不清了，因为记载中的祖冲之的著作《缀术》已经失传.《缀术》的丢失无疑是人类文明发展史中的一大损失.

1500年来人们只能去猜测祖冲之的算π方法. 众说纷纭，莫衷一是. 到了清朝，似乎出现了主流的意见，即认为：根据祖冲之生活时代的数学发展情况，除开继续使用刘徽的割圆术外不存在有其他方法的可能性. 清代数学家阮元

① 此书为本套小册书之3.

的《畴人传·祖冲之传》中写道："厥后祖冲之更开密法，仍割之又割耳，未能于徽法之外别有新法也."梅文鼎的著作以及后来的御制"数理精蕴"中皆表露出这种观点.民国以后，不相信清代主流意见的人逐渐多起来，不少人相信祖冲之有他自己的方法，只不过是失传了.于是祖冲之算 π 现在还是一个谜，一个有多年历史的谜.

解开这个谜的惟一途径是在古物的发掘中，在民间的秘藏里找回《缀术》，并经认真考证，得出结论.但是在找回《缀术》之前，人们提出一些猜测和假说，筛选出可能合理的结论，这也算得上是一种喜闻乐道的途径吧.这本小册子将沿着第二条途径来分析祖冲之算 π 之谜.全书内容安排如下：节 1 介绍刘徽的割圆术，它是本书的知识基础与分析问题的依据.节 2 介绍作者之一作过的一次尝试，表明只用当今中学生掌握的知识也可以不太费事地手算出精确到小数点后 7 位的 π 值.这提供了一个理论依据，以利于破解祖冲之算 π 之谜.节 3 以后是为中学水平的读者写的.设想他回到祖冲之时代，看看用自己掌握的知识可否对割圆术做些推进，补一补老祖宗们错过的计算.

1 刘徽的割圆术

人类的几个古代文明(希腊文明,东方的文明等)对圆的周长与面积都有一个共同的认识.那就是:有一个常数 π,使得对于半径为 r 的圆,其周长 $L(r)$与面积 $S(r)$满足下列公式

$$L(r) = 2\pi r,$$

$$S(r) = \pi r^2.$$

在这样的认识下,自然导致人们对 π 的精确值之追求.公元前 200 多年希腊的阿基米德,公元 3 世纪中国的刘徽分别建立了割圆术以求 π 的近似值.割圆术的想法是以圆内接或外切正多边形来逼近圆,算出多边形的周长或面积作为圆的周长或面积的近似值,从而再用上面的圆周长或面积公式得到 π 的近似值.阿基米德着眼于周长,刘徽着眼于面积,使得他们的割圆术有微小差别.后来的事实表明,这种微小的差别导致中国古代割圆术领先世界.刘徽是功不可

没的.

考虑单位圆(即半径为1的圆)的内接正 n 边形,令其面积为 S_n.采用现代数学记号,刘徽的割圆术可以总结为下列三条:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi$.

(2)刘徽不等式:对于 $n\geqslant 6$,

$$S_{2n} < \pi < 2S_{2n} - S_n.$$

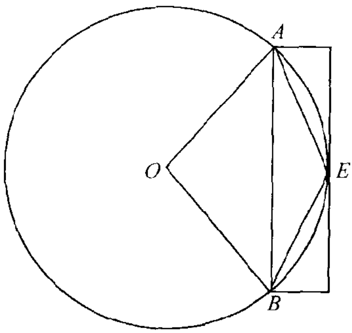
(3)弦矢互算法及与面积的关系:记内接正 n 边形的一边为 c_n,c_n 与单位圆圈围成的较小的那个弓形记作 G_n.我们称 c_n 为 G_n 的弦.弦的中垂线在 G_n 中的一段称为 G_n 的矢,并记作 a_n.为方便计,a_n,c_n 的长度也分别记作 a_n,c_n.利用勾股定理,有下列弦矢互算公式

$$\begin{cases} a_n = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{c_n^2}{4}}, \\ c_{2n} = \sqrt{a_n^2 + \dfrac{c_n^2}{4}}. \end{cases}$$

此外有弦矢表示面积的公式

$$S_{2n} = \frac{n}{2} c_n = S_n + \frac{n}{2} a_n c_n.$$

现在我们对上面的刘徽不等式给予证明.设 O 是单位圆的圆心,如图所示,其中 $AB = c_n$. 于是取 E 为弧$\overset{\frown}{AB}$的中点后,便知 $AE = BE = c_{2n}$ 以及



$$|\triangle AOE| + |\triangle EOB| = |\triangle AOB| + |\triangle ABE|,$$

其中 $|\triangle AOE|$ 表示三角形 $\triangle AOE$ 的面积. 将上式乘 n 便得

$$S_{2n} = S_n + n \cdot |\triangle ABE|,$$

或 $|\triangle ABE| = \frac{1}{n}(S_{2n} - S_n)$. 作一个矩形以 AB 为边并且对边过 E 点. 易见该矩形的面积是 $2|\triangle ABE|$,并且 n 个这种矩形与圆内接正 n 边形合起来能盖住圆,从而圆的面积 π 满足

$$\pi < S_n + n \cdot (\text{矩形面积})$$

$$= S_n + n \cdot (2|\triangle ABE|)$$

$$= S_n + 2(S_{2n} - S_n)$$

$$= 2S_{2n} - S_n.$$

又由于 $S_{2n} < \pi$ 是显然的,故我们得到刘徽不等式.

刘徽割圆术的第三条,由于较易,其证明从略.至于第一条,我们在节 3 中再来讨论.

刘徽根据上面的理论,依次算出 $S_6, S_{12}, S_{24}, S_{48}, S_{96}, S_{192}$,然后便得到 π 的近似值 3.14.具体的计算过程分为四段,记载在刘徽的《九章算术注》中.这四段分别是

(1)割六觚以为十二觚,

(2)割十二觚以为二十四觚,

(3)割二十四觚以为四十八觚,

(4)割四十八觚以为九十六觚.

各段中的算法都是一样的,人们把它们总结为刘徽割圆术的第三条.例如第四段.那是从 c_{48} 开始依次算出 a_{48}, c_{96}, S_{192} 的过程.而后再用刘徽不等式来确定这时的 π 的近似值.第四段的原文抄录如下:

"割四十八觚以为九十六觚,术曰:亦令半径为弦,半面为勾,为之求股.置次上弦幂,四而一,得四十二亿七千七百五十六万九千七百三

忽，余分弃之，即勾幂也．以减弦幂，其余开方除之，得股九寸九分七厘八毫五秒八忽十分忽之九．以减半径，余二厘一毫四秒一忽十分忽之一，谓之小勾．觚之半面，又谓小股．为之求小弦，其幂四十二亿八千二百一十五万四千一十二忽，余分弃之，开方除之，得小弦六分五厘四毫三秒八忽．余分弃之，即九十六觚之一面．以半径一尺乘之，又以四十八乘之，得幂三万一千四百一十亿二千四百万忽．以百亿除之，得幂三百一十四寸六百二十五分寸之六十四，即一百九十二觚之幂也．以九十六觚之幂减之，余六百二十五分寸之一百五，谓之差幂．倍之，为分寸之二百一十，即九十六觚之外弧田，所谓以弦乘矢之凡幂也．加此幂于九十六觚之幂，得三百一十四寸六百二十五分寸之一百六十九，则出圆之表矣．故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸，以为圆幂之定率，而弃其余分．”

上面原文在本册第 9,10 页的表中被依次解释．

表中的名词中，多次出现一个古字“觚”．如果把这个“觚”字理解为“挖去内接多边形的圆盘”，那么理解上面的各个词似乎不受影响，并且这一段的小标题“割四十八觚以为九十六觚”也说得通．不过有的古人把觚字等同于“弧”．因此大家可不必相信我们对觚字的解释，但是我

名　　词	中间变量及算式表达	刘徽计算值	今译名
半径	弦	1 尺	1
半面	第三段算出的 48 觚之半面	0.06543 尺	$\frac{1}{2}c_{48}$
	勾 = 半面	0.06543 尺	$\frac{1}{2}c_{48}$
次上弦幂	第三段算出的小弦之幂	171.10278813 亿	c_{48}^2
	勾幂 = 勾^2 = $\frac{1}{4}$次上弦幂	42.77569703 亿 = 0.004277569703 尺^2	$\frac{1}{4}c_{48}^2$
	弦幂 = 弦^2	1 尺^2	1
	股 = $\sqrt{\text{弦幂} - \text{勾幂}}$	$(0.997858 + \frac{9}{10} \times 10^{-6})$尺	$\sqrt{1 - \frac{1}{4}c_{48}^2}$
	小勾 = 半径 − 股	$(0.002141 + \frac{1}{10} \times 10^{-6})$尺	$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}c_{48}^2} = a_{48}$
	小股 = 48 觚之半面	0.06543 尺	$\frac{1}{2}c_{48}$

续 表

名　词	中间变量及算式表达	刘徽计算值	今译名
	小弦幂＝(小勾)^2＋(小股)^2	42.82154012 亿	$c_{96}^2 - a_{48}^2 + \frac{1}{4}c_{48}^2$
96 觚之一面	小弦＝$\sqrt{\text{小弦幂}}$	0.065438 尺	c_{96}
192 觚之幂	小弦×半径×48	31410.2400 亿＝314 $\frac{64}{625}$寸^2	$S_{192}=48c_{96}$
96 觚之幂	第三段算出	313 $\frac{584}{625}$寸^2	S_{96}
差幂	192 觚之幂－96 觚之幂	$\frac{105}{625}$寸^2	$S_{192}-S_{96}$
96 觚之外弧田	差幂×2＝弦乘矢之凡幂	$\frac{210}{625}$	$2(S_{192}-S_{96})=96c_{96}a_{96}$
出圆之表者	96 觚之幂＋96 觚之外弧田	314 $\frac{169}{625}$寸^2	$2S_{192}-S_{96}$
192 觚之全幂	192 觚之幂取整	314 寸^2	
圆幂之定率		3.14	π 的近似值