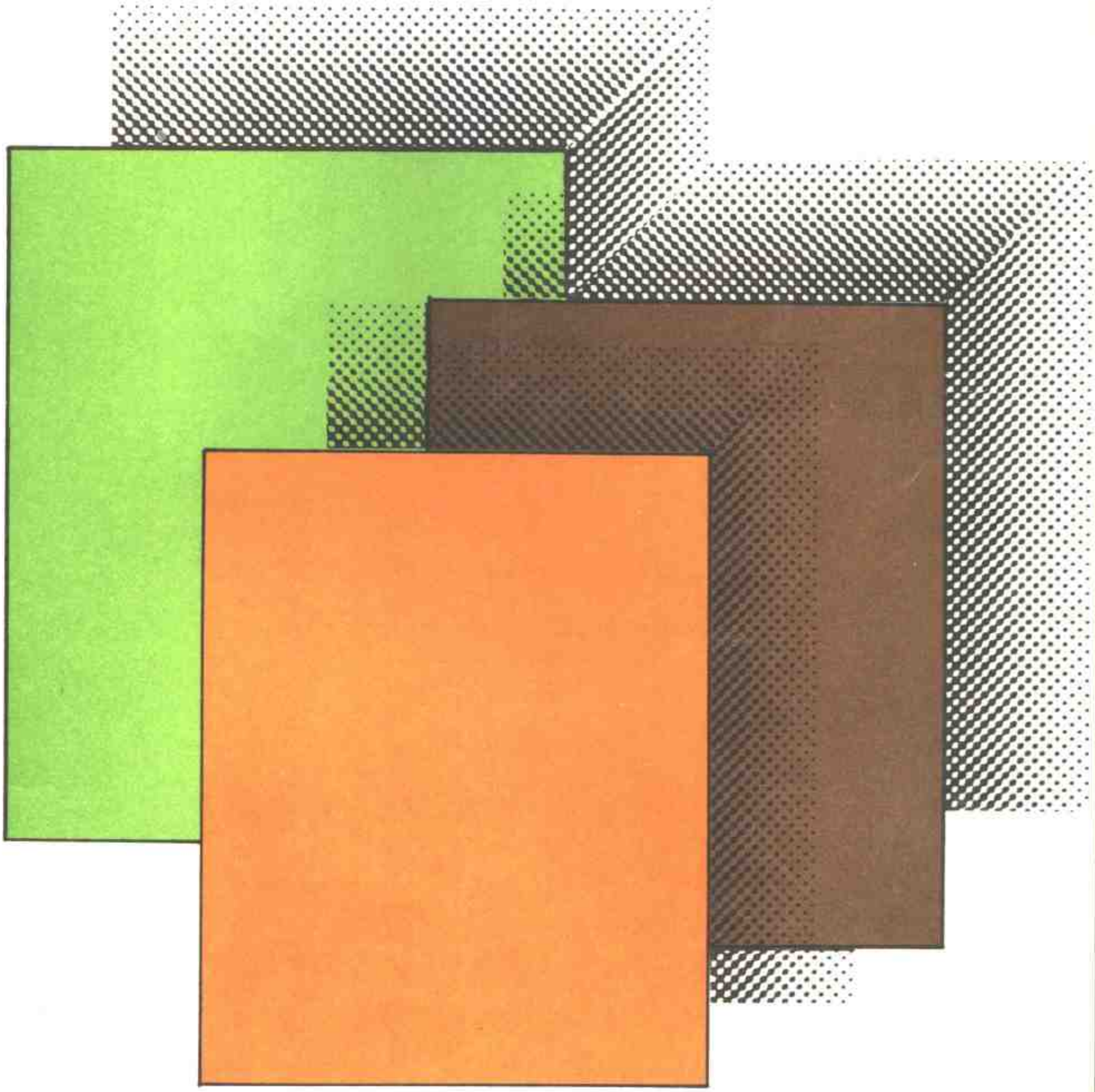
各类成人高考复习指导丛书（第六版）

数学（文史财经类用）
附解题指导

郑洪深　主编



高等教育出版社

各类成人高考复习指导丛书(第六版)

数　学 附解题指导

(文史财经类用)

郑洪深　主编

高等教育出版社

（京）112号

图书在版编目（CIP）数据

数学：附解题指导/郑洪深主编.—6版.—北京：高等教育出版社，1994.7（1995.5重印）
（各类成人高考复习指导丛书）
文史财经类用
ISBN 7-04-005024-2

Ⅰ.数… Ⅱ.郑… Ⅲ.①数学-入学考试-解题-解②成人教育：中等教育-丛书 Ⅳ.①G633.6②G632.479-51

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第02117号

高等教育出版社出版
新华书店总店北京发行所发行
中国青年出版社印刷厂印装

开本 787×1092 1/16 印张 26.5 字数 660 000
1984年5月第1版
1994年7月第6版 1996年2月第6次印刷
印数487 201—647 208
定价 19.65元

前　言

本丛书自1986年问世以来，深受广大读者欢迎。为了更加符合国家教委对各科目成人高考所提出的基本要求，充分体现便于成人自学的特点，本丛书曾多次修订，并自第三版起编辑、出版了与各科目复习教材相配套的解题指导，借以加强对考生掌握基本理论、运用基础知识进行解题的指导，帮助考生提高应考能力。

1994年，国家教委颁布了新的成人高考复习考试大纲。为此，我们根据审订后的新大纲及制订新大纲的基本精神和要求，对本丛书进行了修订，以求在知识范围、能力层次要求、题型结构各方面适应和满足新大纲的要求；并从科学性、知识性、文字叙述等方面消除疏漏，进一步提高质量。根据新大纲的修订情况，丛书中有些科目进行了重新编写，其余也均有较大幅度的修改或增补、调整。

本次修订，为了便于考生复习使用，我们对丛书的开本和分册进行了调整，将原来的32开本，变为16开本；原来的每一科目分复习教材和解题指导若干册，变为复习教材附解题指导全一册，解题指导有关内容全部附在每一章之后，原丛书每次重印时均附有近三年的全国成人高等学校招生统一考试各科目的试题及参考答案，本次修订改为附近二年的试题及参考答案。考虑到新的大纲和考试标准，已由我社和人民教育出版社共同出版，本次修订时不再附新大纲。

修订后的本丛书(第六版)包括如下9种9册：

《政治》附解题指导

《语文》附解题指导

《数学》附解题指导(文史财经类用)

《数学》附解题指导(理工农医类用)

《物理》附解题指导

《化学》附解题指导

《历史》附解题指导

《地理》附解题指导

《英语》附解题指导

本丛书此次重印时又对各科目某些内容和题型结构等作了不同程度的修改和增删，并增添了《全国各类成人高等学校招生统一考试试题解答与分析(文史财经类)1986—1994》、《全国各类成人高等学校招生统一考试试题解答与分析(理工农医类)1986—1994》二书，以更适应复习考试的要求和提高应试能力。

本书主编为郑洪深(《1986年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》、《1990年全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》及《1995 年全国 各类成人高等学校招生复习考试大纲》审定人)，参加编写的还有丁鹤龄、文小西。

高等教育出版社

1995年1月

目　录

平面解析几何

代　　数

第一章　数、式、方程和方程组

【本章要求】

1．理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、倒数、算术平方根的概念，会进行有关计算．

2．理解有关整式、分式、二次根式的概念，掌握它们的一些性质和运算法则．

3．掌握一元一次方程、一元二次方程的解法，能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题。

4．会解有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组(主要指以下几种类型：用加减消元法可消去某个未知数、可消去二次项的，以及至少有一个方程可分解成一次方程的)。

第一节　实　　数

【内容提要】

一、实数　有理数(有限小数或循环小数)与无理数(无限不循环小数)统称为**实数**．实数又可分类如下：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数(自然数)
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

二、数轴　规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做**数轴**(图1.1)。

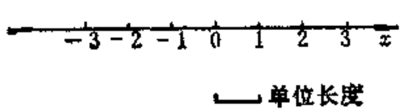


图 1.1

实数与数轴上的点是一一对应的，即数轴上每一个点表示唯一的一个实数；反过来，每

一个实数可用数轴上唯一的一个点来表示。因此，我们有时也把"实数"与"数轴上的点"不加区别，说数x为点x。

三、实数的运算律

表 1-1

	加　　法	乘　　法
交换律	$a+b=b+a$	$ab=ba$
	两个数相加(乘)，交换加数(因数)的位置，和(积)不变。	
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
	三个数相加(乘)，先把前两个数相加(乘)，或者先把后两个数相加(乘)，和(积)不变。	
分配律	$a(b+c)=ab+ac$	
	一个数同两个数的和相乘，等于把这个数分别同这两个数相乘，再把积相加。	

四、相反数　符号不同的两个数a与$-a$中的一个数称为另一个数的**相反数**。即$-a$是a的相反数，a也是$-a$的相反数。0的相反数为0。

五、倒数　1除以某数的商称为这个数的倒数。零没有倒数。

六、绝对值　对于一个实数a，当a是正数或零时，数a的绝对值是它本身；当a是负数时，数a的绝对值是它的相反数。数a的绝对值记作$|a|$，用算式表示，即

$$|a|=\begin{cases}a, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

在数轴上，一个实数的绝对值表示这一实数的点到原点的距离。

注意　$|a|$是一个非负数(大于零或等于零)。

七、平方根　如果一个数x的平方等于a，即

$$x^2=a,$$

则称x为a的平方根或二次方根。

正数a的平方根有两个，它们互为相反数，其中一个正的平方根记为$\sqrt{a}$，另一个负的平方根记为$-\sqrt{a}$。正的平方根$\sqrt{a}$又叫做算术平方根(简称算术根)。

例如　4的平方根是± 2，算术根是2；

3的平方根是$\pm\sqrt{3}$，算术根是$\sqrt{3}$。

说明　1）$\sqrt{a}$读作"根号a"，它是一个非负数。

2）$\pm\sqrt{0}=0$。

3）$\sqrt{a}$中的a叫做被开方数，它应是非负的。这也可说成负数没有平方根。

4）$(\sqrt{a})^2=a$；$\sqrt{a^2}=|a|$。

【例题与解题指导】

例1　下列哪些数是无理数、有理数、整数、自然数？

4.0，$-\frac{1}{4}$，$\frac{9}{11}$，$-\sqrt{3}$，$-\sqrt{9}$，$\sqrt[3]{-0.027}$，π，$\sqrt{(-2)^2}$，$\sqrt{|-2|}$。

分析　我们可以按实数分成"无限不循环小数"与"有限小数或循环小数"这两类来判断。

如果所给的数是前者，则它为无理数；如果所给的数是后者，则它为有理数。

特别，对所给的数是形如

$$\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

的数，则可判断它为整数。如果所给的数是形如

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

的数，则它是自然数。

此外，注意自然数、整数与有理数的关系。

解

<table>
<tr><td colspan="3">无理数(无限不循环小数)</td></tr>
<tr><td>$-\sqrt{3}=-1.732050\cdots$</td><td>$\pi=3.14159265\cdots$</td><td>$\sqrt{|-2|}=\sqrt{2}=1.41421356\cdots$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">有理数</td><td colspan="2">循环小数</td><td colspan="2">$\frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">有限小数</td><td colspan="3">$-\frac{1}{4}=-0.25$　$\sqrt[3]{-0.027}=-0.3$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">整数</td><td colspan="2">$-\sqrt{9}=-3$</td></tr>
<tr><td>自然数</td><td>4.0
$\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$</td></tr>
</table>

说明

1）$\frac{1}{4}$，$\frac{9}{11}$也可从它们是分数而说明为有理数。

2）不要认为带根号的数一定是无理数。

3）注意一个负数的立方根是一个负数。

例2　选择①：

$-0.3333\cdots$是

（A）负整数；　（B）负有理数；　（C）负无理数；　（D）无限不循环小数。

答（　）。

解　像这样的选择题，只要求选出其中一个代号填在括号内，不必写出演算、推理等过程。

这种类型的题可以有以下几种考虑方法。一种是按通常的解题方式，根据已知条件、定义、定理、公式等进行推导、判断得出一个正确结论。据此再在所给的几个结论中寻求所需

① 本书的选择题，均指(A)、(B)、(C)、(D)四个答案中只有一个结论是正确的。

的答案，如根据 0.3333…是循环小数，知它是有理数，因此 - 0.3333…是负有理数，故填(B)。另一种为"排除法"，即以题目所给的几个结论中只有一个是正确的为出发点，依据数学知识否定其中错误的结论，而最后剩下的一个结论肯定为正确的。如 - 0.3333…不能是(A)、(C)、(D)，则它只能是(B)。后一种方法，对于那些难以对正确结论进行推断，或是所给错误结论容易判定的题，常较简便。此外，上述两种方法也可兼用，这样可使得选择范围缩小以及起到相互验证的作用。

例3 选择：

(1) 下列的叙述中，正确的是

(A) 任意两个正数之差必是非负数；

(B) 任意两个整数之商(除数不为零)必是整数；

(C) 任意两个实数的和、差、积、商(除数不为零)必是实数；

(D) 在实数范围内，任一实数都有平方根。

答(　　)。

(2) 已知a，b，c 均为实数，且$|a|+a=0$，$|ab|=ab$，$|c|-c=0$，那么代数式$\sqrt{b^2}-|a+b|-\sqrt{(c-b)^2}+|a-c|$的值等于

(A) $2c-b$；　(B) $2b-2a$；　(C) b；　(D) $-b$。

答(　　)。

解 (1) 此题可以从否定三个错误结论入手。这可采用"特殊值"的方法来说明。如2-3不是非负数；$\frac{2}{3}$不是整数；-1是实数，但它没有平方根。由此依次否定了错误论断(A)、(B)、(D)。于是结论(C)是正确的。

(2) 由$|a|+a=0$得$|a|=-a$。因为$|a|\geqslant 0$，所以

$$a\leqslant 0. \qquad ①$$

由$|ab|=ab$知

$$ab\geqslant 0. \qquad ②$$

由$|c|-c=0$得$|c|=c$。因此

$$c\geqslant 0. \qquad ③$$

由①、②得

$$b\leqslant 0. \qquad ④$$

于是，$a+b\leqslant 0$，$c-b\geqslant 0$，$a-c\leqslant 0$。因此

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2}-|a+b|-\sqrt{(c-b)^2}+|a-c| &= -b-[-(a+b)]-(c-b)+c-a\\ &= -b+(a+b)-c+b+c-a=b.\end{aligned}$$

选C。

例4 已知$|x+3|+\sqrt{y+1}+(z-3)^2=0$，求$x$，$y$，$z$的值。

解 由于三个非负数之和为零，则各个数必为零。因此$x+3=0$，$y+1=0$，$z-3=0$。从而$x=-3$，$y=-1$，$z=3$。

说明 设x_1，x_2，…，x_n是实数，如果$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0$，那么$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$。这就是说，有限个数的平方和等于零，则各数必为零。

习　题

1. 选择：

下面四个命题中，正确的是

（A）若$\sqrt{a}=a$，则$a=0$；　　（B）若$|a|=a$，则$a=0$；

（C）若$-a=a$，则$a=0$；　　（D）若$\frac{1}{a}=a$，则$a=1$。

答（　　）。

2. 填空：

（1）$\frac{3}{4}$的算术根是____；如果一个数的平方是$\frac{3}{4}$，则这个数是____；如果一个数的算术根是$\frac{2}{3}$，则这个数是____。

（2）若$a=\sqrt{3}$，则a的相反数是____，$\frac{1}{a}=$____，$\frac{1}{a^2}=$____，a的绝对值是____。

（3）当$a\leqslant 2$时，$\sqrt{(2-a)^2}=$____；当a____时，$\sqrt{(2-a)^2}=a-2$。

（4）如果$a+|a|=0$，那么a____；如果$a\leqslant -1$，那么$|a+1|+a=$____。

（5）设x，y为实数。

如果$\sqrt{x}+x^2=0$，那么$x=$____；如果$\sqrt{x}+x+\sqrt{y}+y=0$，那么$xy=$____。

3. 填空：

（1）如果$|3x-2|+|2y+3|=0$，则$x+y=$____，$xy=$____，$\frac{x}{y}=$____；

（2）设$a^2+b^2+c^2=1$，如果$(ab-c)^2+|bc-a|+\sqrt{ca-b}=0$，则

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\_\_\_\_。$$

4. 求使下列各式成立的x，y值：

（1）$|x+2|+|y-1|=0$；　　（2）$\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=0$。

答案

1. C

2.（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\frac{4}{9}$　（2）$-\sqrt{3}$　$\frac{\sqrt{3}}{3}$　$\frac{1}{3}$　$\sqrt{3}$　（3）$2-a$　$\geqslant 2$　（4）$\leqslant 0$　-1　（5）0　0

3.（1）$-\frac{5}{6}$　-1　$-\frac{4}{9}$　（2）1

4.（1）$x=-2$，$y=1$　（2）$x=1$，$y=-2$

解答

1. 我们可从否定A，B，D来说明C是正确的。对于A，B，只要取$a=1$，结论就不成立。对于D，由$\frac{1}{a}=a$得$a^2=1$，$a=\pm 1$。

C是正确的也可说明如下：

由 $-a=a$ 得 $a+a=0$，$2a=0$，$a=0$。

2.（3）$\sqrt{(2-a)^2}=|2-a|=\begin{cases}2-a, & a\leqslant 2,\\ a-2, & a\geqslant 2.\end{cases}$

（4）由 $a+|a|=0$ 得 $|a|=-a$。从而 $a\leqslant 0$。

由 $a\leqslant -1$ 得 $a+1\leqslant 0$。因此 $|a+1|+a=-(a+1)+a=-1$。

（5）由 $\sqrt{x}+x^2=0$ 得 $\sqrt{x}=0$，$x^2=0$。因此 $x=0$。

$\sqrt{x}+x+\sqrt{y}+y=0$ 可变形为 $\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2+\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2=0$。
由非负数之和为零得 $\sqrt{x}=0$，$\sqrt{y}=0$。于是 $x=0$，$y=0$，故 $xy=0$。

说明　在已知等式中的 $\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$ 已隐含 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，故 $(\sqrt{x})^2=x$，$(\sqrt{y})^2=y$。

3.（1）由已知等式得 $3x-2=0$，$2y+3=0$。解得 $x=\frac{2}{3}$，$y=-\frac{3}{2}$。因此 $x+y=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{6}$，$xy=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$，$\frac{x}{y}=\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{4}{9}$。

（2）由所给方程得 $ab=c$，$bc=a$，$ca=b$。从而由已知条件得

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=c^2+a^2+b^2=1.$$

4. **分析**　所给各式都是非负数之和为零的问题。

解（1）　由 $x+2=0$，$y-1=0$ 得 $x=-2$，$y=1$。

（2）由 $x-1=0$，$y+2=0$ 得 $x=1$，$y=-2$。

第二节　式

【内容提要】

一、代数式　用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式。

二、代数式的分类表

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

三、代数式的值　用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做**代数式的值**。

四、单项式和多项式　由字母与数字相乘而成的代数式叫做**单项式**；几个单项式的代数和叫做**多项式**。

五、整式　由字母与数字相加、减、乘而成的代数式叫做**整式**。

整式包含单项式与多项式。

-2，x，ax^2，$-\frac{b^2}{2}$ 等是单项式。

x^2-y^2，ax^2+bx+c 等是多项式。

以上这些式子也是整式。

1. 整式的加减 主要指去括号，合并同类项。

例如 $4x^2+4x+5-(2x^2-2x-3)=4x^2+4x+5-2x^2+2x+3=(4-2)x^2+(4+2)x+(5+3)=2x^2+6x+8$。

2. 整式的乘除

1）正整指数幂的运算法则

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　　$(a^m)^n=a^{mn}$；

$(ab)^n=a^nb^n$；　　$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq0,\ m>n)$。

2）单项式乘以单项式 以它们系数的积作为积的系数，以它们相同字母的指数的和作为积里同一字母的指数，只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数写在积里。

例如 $5a^2x^4\cdot(-6a^4b^2x^3)=[5\times(-6)](a^2a^4)\cdot b^2\cdot(x^4x^3)=-30a^6b^2x^7$。

3）单项式乘以多项式 先将单项式乘以多项式的各项，然后再相加。

例如 $4x^2(2x^2-2x-3)=4x^2\cdot2x^2+4x^2\cdot(-2x)+4x^2\cdot(-3)=8x^4-8x^3-12x^2$。

4）多项式乘以多项式 先分别将一个多项式的每一项乘以另一个多项式，然后再相加。

例如 $(3x+2)(2x-1)=3x\cdot2x+3x\cdot(-1)+2\cdot2x+2\cdot(-1)=6x^2-3x+4x-2$

$=6x^2+x-2$。

5）单项式除以单项式 把被除式的系数、幂分别除以除式的系数、同底数幂作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式。

例如 $48a^3b^4x^4\div12a^2b^3=(48\div12)(a^3\div a^2)(b^4\div b^3)x^4=4abx^4$。

6）多项式除以单项式 先把多项式的每一项除以单项式，再把所得的商相加。

例如 $(48x^4+24x^3-30x^2)\div6x^2=48x^4\div6x^2+24x^3\div6x^2+(-30x^2\div6x^2)$

$=8x^2+4x-5$。

7）多项式除以多项式 先把两个多项式都按同一字母降幂排列，若被除式有缺项，留出空位（或补0），用竖式演算。

例如 计算$(2+11x+20x^2+32x^3)\div(1+4x)$。

先把被除式与除式的两个多项式都按同一字母x降幂排列，再用竖式演算：

$$
\begin{array}{r}
8x^2+\ \ 3x+2 \\
4x+1\overline{)\,32x^3+20x^2+11x+2} \\
\underline{32x^3+\ \ 8x^2} \\
12x^2+11x \\
\underline{12x^2+\ \ 3x} \\
8x+2 \\
\underline{8x+2} \\
0
\end{array}
$$

所以

$$(2+11x+20x^2+32x^3)\div(1+4x)=8x^2+3x+2。$$

3. 常用的乘法公式

完全平方公式　　$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$。

平方差公式　　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

立方和与立方差公式

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$$

六、分式 设A、B为两个整式，且B含有字母，则式子$\frac{A}{B}$叫做**分式**。

例如 $\frac{1}{x}$，$\frac{x+1}{2x-5}$等是分式。

如果没有特别说明，我们约定分式中的分母的值不为零。

1. 基本性质 $\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m}$，$\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}$（$m$为不等于零的整式）。

2. 符号法则 $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}=-\frac{-a}{-b}$.

3. 分式的运算

分式也有与分数类似的约分、通分、四则运算法则。

1）约分
$$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}.$$

2）分式的加减
$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}，\quad \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

3）分式的乘除
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}，\qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

4）分式的乘方
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad（n为正整数）。$$

七、有理式 整式和分式统称为**有理式**。

八、无理式 含有字母的开方运算的代数式，叫做**无理式**。

例如 $\sqrt{x^2-1}$，$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$等是无理式。

九、因式分解 把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做**因式分解**或**分解因式**。

因式分解的常用方法：提公因式法；应用乘法公式法；分组分解法；十字相乘法等。

十、二次根式

1. 定义 式子$\sqrt{a}(a\geqslant0)$叫做**二次根式**

由此定义知道，二次根式$\sqrt{a}(a\geqslant0)$就是a的算术根的表示式。

如$\sqrt{5}$，$\sqrt{a}(a\geqslant0)$，$\sqrt{x^2+1}$，$\sqrt{y^2-y-1}(y^2-y-1\geqslant0)$等都是二次根式。

2. 性质

1）$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}\ (a\geqslant0，b\geqslant0)$；　　2）$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant0，b>0)$。

3. 最简二次根式、同类根式

1）满足下列两个条件的二次根式叫做**最简二次根式**：

（1）被开方数的每一个因式的指数都小于根指数2；

（2）被开方数不含分母。

如$2\sqrt{3a}$，$\frac{\sqrt{a}}{2}$，$\sqrt{x^2+b}$等都是最简二次根式。

而$\sqrt{4a^2}$，$\sqrt{\frac{a}{2}}$，$\sqrt{18}$等都不是最简二次根式。

2）根指数和被开方数都相同的最简二次根式叫做**同类根式**。

如$\sqrt{2}$，$3\sqrt{2}$，$\sqrt{\frac{1}{2}}$是同类根式，$\sqrt{ab}$，$2\sqrt{ab}$，$ab\sqrt{ab}$是同类根式。

说明

1）对于含有字母的根式，如果没有特别说明，我们均认为字母所取的值使根式有意义。

2）同类根式可以象同类项一样进行合并。

4. 二次根式的运算

1）加减法　先把各个根式化为最简二次根式，然后分别合并同类根式。

2）乘除法　应用二次根式的性质(把公式反过来用)

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}，\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

运算。

3）有理化因式　如果两个无理式的乘积是一有理式，则称其中一个无理式为另一个无理式的**有理化因式**。

在二次根式中，常见的互为有理化因式有：

$$\sqrt{a}\text{与}\sqrt{a}；\ a\pm\sqrt{b}\text{与}a\mp\sqrt{b}；\ \sqrt{a}\pm\sqrt{b}\text{与}\sqrt{a}\mp\sqrt{b}。$$

4）分母有理化　如果代数式的分母是无理式，用分母的有理化因式同乘分子与分母，将分母化为有理式的变形过程，叫做**分母有理化**。

说明　二次根式运算的最后结果都要化为最简二次根式。

【例题与解题指导】

例1　计算：

（1）$(3x^2+4x+5)(6x^2+3x-4)$；　　（2）$(4x+3y)^2(4x-3y)^2$；

（3）$\frac{a}{a-b}\cdot\frac{b^2}{a+b}-\frac{a^4b}{a^4-b^4}\div\frac{a^2}{a^2+b^2}$；　　（4）$\frac{16}{x^2-16}+\frac{2}{4-x}$。

解

（1）原式$=18x^4+9x^3-12x^2+24x^3+12x^2-16x+30x^2+15x-20$

$=18x^4+33x^3+30x^2-x-20$。

（2）原式$=[(4x+3y)(4x-3y)]^2=(16x^2-9y^2)^2$

$=(16x^2)^2-2\cdot16x^2\cdot9y^2+(9y^2)^2$

$=256x^4-288x^2y^2+81y^4$。

（3）原式$=\frac{ab^2}{a^2-b^2}-\frac{a^4b}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{ab^2-a^2b}{a^2-b^2}$

$=\frac{ab(b-a)}{(a-b)(a+b)}=-\frac{ab}{a+b}$。

（4）原式$=\frac{16}{x^2-16}-\frac{2}{x-4}=\frac{16}{x^2-16}-\frac{2(x+4)}{x^2-16}=\frac{8-2x}{x^2-16}$

$$= -\frac{2(x-4)}{(x-4)(x+4)} = -\frac{2}{x+4}.$$

例2 把$18m^2-12mx-15my+10xy$分解因式.

分析 先用分组分解法，使得两组有公因式．然后再用提公因式法．

解法一 原式$=6m(3m-2x)-5y(3m-2x)=(3m-2x)(6m-5y)$.

解法二 原式$=18m^2-15my+10xy-12mx$

$=3m(6m-5y)+2x(5y-6m)$

$=(6m-5y)(3m-2x)$.

说明 由此例看到，分组分解法可以是多种多样的．但要注意分组适当，使得最终能分解因式．

例3 把下列各式分解因式：

（1）$4x^2-8x+4-16y^2$；　（2）$m^4-2m^3+3m^2-2m+1$.

分析

（1）先提公因数4，原式$=4(x^2-2x+1-4y^2)$．这时括号内的前三项可用完全平方公式，由此结果与第四项又可用平方差公式．

（2）注意把$3m^2$拆成两项：m^2与$2m^2$．这时可望用完全平方公式与提公因式法分解因式．

解

（1）原式$=4(x^2-2x+1-4y^2)=4[(x-1)^2-(2y)^2]=4(x-1-2y)(x-1+2y)$.

（2）原式$=m^4-2m^3+m^2+2m^2-2m+1$

$=(m^2-m)^2+2(m^2-m)+1$

$=[(m^2-m)+1]^2=(m^2-m+1)^2$.

说明 （2）题为了凑公式与提公因式而采用拆项的办法，这也是分解因式常用的方法，注意掌握．这题也可采用添一项(m^2)减一项(m^2)的办法，即

原式$=m^4-2m^3+m^2-m^2+3m^2-2m+1=m^4-2m^3+m^2+2m^2-2m+1$.

然后再分解．

例4 把$(a-2b)a^3-(b-2a)b^3$分解因式．

分析 对这个含有括号的式子，一时还无法直接看出如何将其分解因式．为此，可先按多项式乘法法则把括号去掉，然后再考虑分解因式．

解 原式$=a^4-2a^3b-b^4+2b^3a=(a^4-b^4)-2ab(a^2-b^2)$

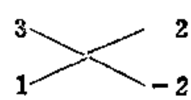
$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)-2ab(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(a^2+b^2-2ab)$

$=(a-b)(a+b)(a-b)^2=(a-b)^3(a+b)$.

例5 把下列各式分解因式：

（1）$3x^2-4x-4$；　（2）$3(x+1)^2-4(x+1)-4$；　（3）$3x^2-4xy-4y^2$.

分析 可用十字相乘法求解．



解

（1）如右图，二次项的系数3可分解为3与1，依次写在第1竖列上，常数项-4可分解为2与-2，依次写在第2竖列上，若交叉相乘求和$2\times1+3\times(-2)=-4$恰为一次项的系数，则相应于横行的$(3x+2)$与$(x-2)$就是所求的两个因式，即

$$3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2).$$